UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT
UFR de MATHEMATIQUES

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES
présentée par

Françoise LEMONNIER JORE

Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique

Soutenue le : 10 novembre 2006

Directeur de thèse : Bernard PARZYSZ

JURY :

Teresa ASSUDE, Maître de Conférences, IUFM d'Aix-Marseille, Rapporteur
Régis GRAS, Professeur Émérite des Universités, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, Président du jury
Christophe HACHE, Maître de Conférence, Université Paris 7
Bernard PARZYSZ, Professeur Émérite des Universités, IUFM d'Orléans-Tours, Directeur
Éric PINSON, Professeur des Universités Catholiques, Université Catholique de l'Ouest Angers
Rudolf STRÄßER, Professeur, Justus Liebig Universität Giessen, Rapporteur

UNIVERSITÉ PARIS 7 – DENIS DIDEROT

UFR de MATHEMATIQUES

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Spécialité : DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

présentée par

Françoise LEMONNIER JORE

Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique

Soutenue le : 10 novembre 2006

Directeur de thèse : Bernard PARZYSZ

JURY :

Teresa ASSUDE, Maître de Conférences, IUFM d'Aix-Marseille, Rapporteur

Régis GRAS, Professeur Émérite des Universités, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, Président du jury

Christophe HACHE, Maître de Conférence, Université Paris 7

Bernard PARZYSZ, Professeur Émérite des Universités, IUFM d'Orléans-Tours, Directeur

Éric PINSON, Professeur des Universités Catholiques, Université Catholique de l'Ouest Angers

Rudolf STRÄßER, Professeur, Justus Liebig Universität Giessen, Rapporteur

Remerciements

Six ans, c'est long, et pourtant j'ai l'impression que c'était hier que nous prenions la décision, que nous nous lancions dans l'aventure. Je devrais certainement dire je, mais j'insiste sur le nous.

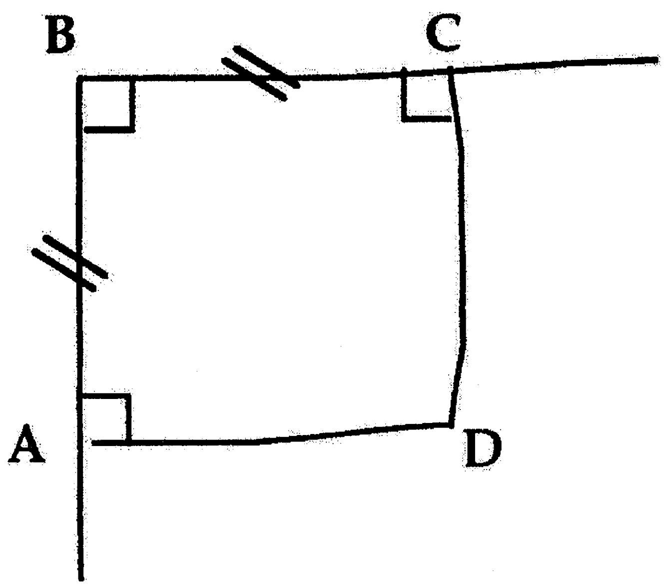
Ce nous, c'est bien sûr mon directeur de thèse, Bernard Parzysz, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Je tiens à le remercier chaleureusement parce qu'il m'a poussée à me lancer, parce qu'il m'a soutenue quand je désespérais d'écrire le fin mot, mais surtout parce qu'il m'a guidée dans ma recherche, guidée de ses conseils, de ses suggestions, de ses orientations. Nos discussions étaient toujours riches d'une réflexion à construire ensemble.

Ce nous, c'est aussi vous quatre, Phillippe, Jérémy, Sandie, Laurine, qui avez supporté les journées où j'étais enfermée dans mon bureau, mes sautes d'humeur parce que je n'arrivais pas à faire ce que je voulais ; vous qui étiez fiers de ce que je faisais.

Ce nous, c'est aussi vous tous, mes amis, qui avez cru les premiers que j'en étais capable. Je ne listerai pas les noms, la liste serait trop longue, vous vous reconnaîtrez.

Je tiens également à remercier Teresa Assude et Rudolf Sträßer qui ont eu la lourde tâche en plein été de lire mon texte et d'en faire un rapport. Leurs commentaires sont riches d'enseignement et m'ouvrent de nouvelles perspectives. Merci aussi à Régis Gras, dont les conseils à diverses reprises m'ont permis de m'initier à l'analyse implicative et à l'utilisation du logiciel CHIC, mais aussi d'oser écrire et communiquer seule sur mon travail. Merci encore à Éric Pinson qui tout au long de ces six années a su m'encourager et me faire confiance. Merci enfin à Christophe Hache, qui a bien voulu accepter également de faire partie de mon jury de thèse.

Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?



Jérémy, Sandie, Laurine : dis donc, maman, tu pourrais apprendre à te servir de ta règle et de ton équerre !

Sommaire

Sommaire détaillé

Table des annexes

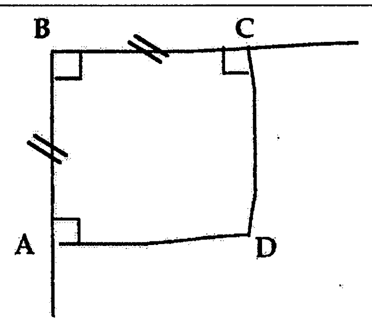
Introduction

Introduction

Mon expérience assez longue de formateur de futurs professeurs des écoles m'a mis à même de constater que la géométrie n'est pas sans poser de nombreux problèmes aux étudiants, et par conséquent au formateur ! Les difficultés de ce thème sont multiples et l'objectif de ce travail est d'apporter une contribution à l'amélioration de la formation des PE1[1] dans ce domaine. Pour cela, j'ai travaillé en collaboration avec un groupe de recherche[2] de l'IUFM d'Orléans-Tours, mis en place par mon directeur de thèse, sur ce sujet.

Explicitons naïvement le sujet. Partons de deux exemples de réponse à une question posée à des futurs professeurs des écoles en début de formation :

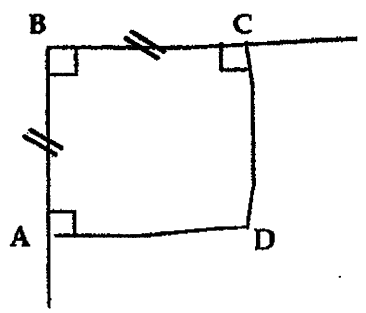
Isabelle :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

non
AB = BC ≠ AD ≠ DC
AD et DC ne sont pas tracés à la règle.
pas d'angle droit aux sommets C et D.

Fabienne :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

oui
En effet, ABCD est un quadrilatère possédant 3 angles droits et ayant 2 côtés consécutifs de même longueur.

[1] Professeurs des Ecoles en 1[ère] année de formation, après bac + 3.
[2] GReDiM : Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques

Que se passe-t-il ? Comment peut-on interpréter le fait que deux adultes face à une question apparemment si simple, aient des réponses aussi radicalement différentes ? On peut penser qu'il s'agit d'une simple question de points de vue. Ce sont en fait ces différents points de vue qui m'intéressent. Si l'on considère que chaque réponse possède une cohérence interne, cela signifie que ces deux étudiantes travaillent dans des cadres différents, avec des références, des règles de fonctionnement différentes. *Grosso modo*, Isabelle travaille perceptivement, en observant le quadrilatère proposé, tandis que Fabienne raisonne à partir des informations données dans l'énoncé et sur le schéma. Elles travaillent en fait dans des paradigmes différents. Ce sont ces paradigmes géométriques que je vais m'attacher à définir, expliciter, exploiter. Cet outil me servira à analyser le comportement des étudiants face à une tâche de géométrie. Il est en effet utile de comprendre comment fonctionne l'étudiant pour espérer agir efficacement sur sa formation.

Le problème central est le suivant : **quel rapport aux objets géométriques les PE1 entretiennent-ils ?**

Je vais donc, dans ce travail de thèse, étudier la manière dont les PE1 considèrent les objets géométriques qu'ils utilisent, à partir notamment d'une analyse statistique portant sur de nombreuses productions de PE1. Je m'intéresse exclusivement à des situations de géométrie plane dans le micro-espace[3] ; géométrie plane parce que c'est dans cette situation que se présente de manière la plus claire la confusion « dessin-figure » sur laquelle je vais en particulier travailler. La géométrie dans l'espace présente en effet des problèmes de représentation qui complexifient le rapport entre le dessin et l'objet. Micro-espace parce que c'est la situation la plus courante à laquelle les futurs professeurs des écoles sont confrontés, que ce soit dans leur formation ou ensuite dans leur classe.

Mais ce micro-espace peut être matérialisé par deux environnements différents : papier-crayon ou informatique. L'environnement papier-crayon est l'environnement habituel de la classe de mathématiques en géométrie ; la feuille de papier, les instruments - règle, équerre, compas - en sont depuis longtemps les éléments symboliques. Mais depuis quelques années, l'environnement informatique est venu compléter les dispositifs pédagogiques. Les

[3] Brousseau [BROUSSEAU, 1983, p 213] définit le micro-espace comme « théâtre de la manipulation de petits objets », le méso-espace comme « l'espace où les déplacements du sujet sont contrôlés par la vue (objets fixes entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet) », et enfin le macro-espace.

instructions officielles du collège, puis de l'école, et plus récemment encore du concours de recrutement de professeur des écoles, font référence aux T.I.C.E.[4], voire en particulier aux logiciels de géométrie dynamique. Il est donc intéressant d'analyser le comportement des étudiants face aux divers paradigmes géométriques dans ces deux environnements. J'utiliserai donc Cabri-géomètre pour quelques études de cas.

Pour traiter de ces paradigmes géométriques, des contenus géométriques sont indispensables. Des situations variées seront proposées aux PE1, avec des contenus divers, mais l'un d'eux sera prépondérant, sorte de fil rouge tout au long de ce travail : la médiatrice. Celle-ci est incontournable dès le début du collège. Intervenant dès le programme de sixième, c'est un objet aux multiples facettes. Elle peut être définie de plusieurs manières et la formulation de ses propriétés est tout aussi variée. Elle peut faire l'objet de multiples procédures de construction. Elle est liée à une transformation majeure, la seule exploitée à l'école élémentaire : la symétrie orthogonale. Elle peut ainsi être exploitée dans de nombreuses démonstrations. Tous ces éléments justifient le choix de la médiatrice comme objet récurrent dans cette étude. Elle ne sera pas exploitée pour elle-même, mais pour ce qu'elle nous apprend sur le rapport aux objets géométriques des PE1. Néanmoins, ce travail sera l'occasion de mieux cerner la représentation que les PE1 se font de cet objet.

Mais un état des lieux, un constat, n'est pas suffisant. Il faut aussi agir. Tout ce que nous aurons appris sur le rapport aux objets géométriques des professeurs des écoles en début de formation initiale nous permettra alors de proposer des situations de formation pour les PE1 en vue d'améliorer leur formation. De nombreuses difficultés se présentent aux formateurs de PE1 en géométrie. Il n'est pas question ici de les inventorier toutes, ni surtout de chercher des solutions pour résoudre chacune d'elles. Il s'agit de prendre un point particulier, de l'étudier en détail afin d'en tirer quelques conclusions en vue de l'amélioration de la formation sur ce point.

Le problème central explicité plus haut nécessite d'être reformulé. Mais il me faut au préalable définir précisément la nature des objets sur lesquels je vais travailler, et donc le vocabulaire que je vais utiliser ainsi que le cadre théorique qui sous-tend mon travail, en particulier autour des paradigmes géométriques.

[4] Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement.

Chapitre 1

Chapitre 1 : Dessin, figure et paradigmes géométriques dans la littérature

L'habitude de la rigueur mathématique nous invite tout naturellement à définir aussi clairement que possible les objets dont nous parlons. Mais si en mathématiques un mot correspond sans ambiguïté à un seul objet (du moins, en général), nous verrons que ce n'est pas le cas en didactique des mathématiques. Je vais, dans ce chapitre, détailler deux types d'objets, à partir de ce qu'ont pu écrire un certain nombre d'auteurs, pour la plupart didacticiens.

Tout d'abord, je m'intéresserai aux objets « dessin », « objet géométrique », « figure » qui sont ceux sur lesquels nous travaillons tout naturellement dans le cadre de la géométrie. Je ferai donc un tour d'horizon, le plus large possible à défaut d'être exhaustif, des différentes acceptions de ces mots ; puis je préciserai le sens que je leur donnerai dans la suite de mon travail.

Dans un deuxième temps, je présenterai ce qui sera le support du cadre théorique de cette thèse à proprement parler : la distinction des paradigmes géométriques G1 et G2. Je comparerai et commenterai pour cela les approches de Houdement-Kuzniak et Parzysz.

1. Dessin – objet géométrique

> *« Commençons par fixer quelques points de la terminologie que nous utiliserons dans ce qui suit. Il ne s'agit pas de faire du verbalisme pour le plaisir : une mise au point s'impose, de par la polysémie même du mot « figure » dans le champ sémantique de la géométrie. En effet, ce terme désigne soit l'objet géométrique (idéal, au sens platonicien) sur lequel porte l'étude, soit un dessin représentant cet objet. » [Parzysz. 1989, page 13].*

Consciente de la nécessité de fixer de manière précise le vocabulaire utilisé par la suite dans cette thèse dès le début du travail, j'ai voulu faire le point sur les mots dessin, figure, objet géométrique. Je suis tout naturellement allée examiner le texte de mon directeur de thèse sur ce sujet. Tout semblait clair et dit en quelques lignes, et cela m'a suffi pendant quelques temps … Mais la lecture d'articles publiés postérieurement m'a vite obligée à remettre en cause ce point de vue. En effet, comme je vais le montrer dans ce qui suit, le mot figure est employé par chacun dans un sens qui lui est propre.

1.1. Dessin – objet géométrique

Les deux points de vue sur la figure présentés ci-dessus par Parzysz (dessin – objet géométrique) sont le plus souvent mis en relief par l'utilisation de deux mots distincts. Nous trouvons une explicitation de ces mots notamment dans [Parzysz. 1988, page 80] :

> *« La figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation »*[5]

ainsi que dans divers articles d'Arsac :

> *« Il est classique depuis Platon de distinguer la figure tracée sur le papier (ou l'écran), qu'il est naturel de désigner comme un dessin, de l'objet géométrique sur lequel porte en fait la démonstration » [Arsac. 2004]*

> *« Nous distinguons dans la suite le dessin de la figure, désignant par dessin le dessin concrètement tracé sur une feuille de papier (ou dans le sable pour Archimède) et par figure l'objet mathématique dont le dessin n'est qu'une représentation... Ainsi la figure est un élément du « monde mathématique » et non du monde sensible.... »[Arsac. 1989, page 86]*

ou encore dans un article de Laborde et Capponi :

> *« On distingue les objets et relations géométriques qui sont de nature théorique, de leurs extériorisations dans des systèmes de signifiants divers. On s'intéresse en particulier aux* **réalités spatio-graphiques** *(dessins produits par la trace du plomb sur le papier, d'un bâton sur le sable, d'électrons sur l'écran de l'ordinateur) qui représentent ces objets théoriques. »[Laborde & Capponi. 1995]*

Nous avons donc d'un côté le dessin, et c'est ce terme « dessin » que je garde pour cet objet, trace matérielle sur le papier, le tableau, le sable, l'écran d'ordinateur, représentation pour les experts dans l'espace sensible d'un objet géométrique théorique ... et de l'autre cet objet géométrique théorique lui-même, qui est souvent appelé « figure » par les divers auteurs, mais pour lequel je garderai l'expression « objet géométrique théorique », OGT pour simplifier le discours, pour éviter les ambiguïtés, au moins dans ce premier temps de clarification du

[5] « the FIGURE is the geometrical object which is described by the text defining it. »

vocabulaire. Celui-ci peut être envisagé, comme les extraits précédents le montrent, d'au moins deux points de vue : un objet défini par une théorie, par exemple la géométrie euclidienne, à partir de définitions, d'axiomes, etc. et donc complètement dans le monde mathématique ou bien un objet idéal, au sens de Platon, comme le rappelle Arsac :

> *« Les constituants de la figure (points, segments) peuvent être considérés comme ayant un statut d'objets idéaux (point de vue grec) ou comme simplement définis par des axiomes (suivant un point de vue moderne)... » [Arsac. op.cit., page 86]*

Le point de vue « objet idéal » est envisagé par [Arsac. 1989] avec les élèves de collège sous la forme :

> *« la figure peut être considérée à cet âge (12 ans) comme un dessin « qui serait infiniment précis ». »*

La différence entre ces deux points de vue porte sur la nature du lien entre l'OGT et la réalité. L'objet idéal correspond à une sorte de « passage à la limite » à partir de l'objet réel, dans une problématique de la précision. Les dessins, objets réels, peuvent être de plus en plus précis, en variant les techniques de tracé, les instruments, etc. L'OGT objet idéal est la limite, l'objet « infiniment précis ». Comme cela se produit fréquemment avec les limites, cet objet change de nature : il n'est plus physique comme les dessins dont il est la limite, c'est une construction mentale qui appartient alors au champ théorique.

L'objet défini par une théorie, par exemple la géométrie euclidienne, a, lui, « coupé le cordon ombilical » avec la réalité. Certes, les objets de la géométrie euclidienne ont été définis pour modéliser la réalité. Mais, à partir des définitions, axiomes et règles de déduction, les objets définis dans la géométrie euclidienne prennent leur indépendance avec la réalité et ont une existence propre dans le champ des mathématiques. L'OGT appartient alors au monde mathématique et le dessin n'est plus qu'un représentant de l'OGT dans le monde sensible.

Cette distinction entre les deux manières d'envisager l'objet théorique géométrique lui-même me paraît importante car nous verrons par la suite que ce peut être un outil d'analyse des productions des étudiants (par exemple dans la reconnaissance de dessins comme étant ou non des « carrés ») mais aussi comme outil de comparaison des paradigmes géométriques proposés par Houdement-Kuzniak ou Parzysz, ou encore pour expliciter les théories ou technologies liées à une technique.

Un schéma, qui va évoluer au cours de ce chapitre, va permettre de mettre en évidence les divers éléments pris en compte :

dessin		objet géométrique théorique
Trace matérielle sur un support, réalité spatio-graphique	⟷	• Objet défini par une théorie géométrique • Objet idéal

La flèche signifie simultanément :

- qu'il y a des relations intrinsèques entre le dessin et l'OGT. Ces relations viennent d'être rapidement explicitées ; elles vont être approfondies dans la suite.
- que l'expert passe sans cesse d'un objet à l'autre. Là encore, nous aurons l'occasion de développer ultérieurement cet aspect.

Cette première approche met en évidence deux objets apparemment très tranchés. Mais c'est en fait un peu plus compliqué ...

1.2. Un dessin ... mais pas n'importe lequel !

Le dessin en effet n'est pas n'importe quel dessin. Celui qui nous intéresse est un dessin géométrique. C'est celui dont parle [Parzysz. 2004] dans sa description de G1 (nous reviendrons ultérieurement sur la définition de G1 / G2) :

> *« G1 est une géométrie dans laquelle les objets physiques ont subi un début d'idéalisation, en ce sens que seules certaines caractéristiques des objets matériels sont retenues comme pertinentes (ainsi, la couleur des traits d'un tracé sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur, le matériau dans lequel est réalisée une maquette ne seront pas pris en compte). C'est-à-dire que le regard porté sur les objets les a déjà quelque peu abstraits et simplifiés par rapport au réel (maquette, tracé sur une feuille de papier, sur un écran d'ordinateur) »*

Ainsi, ce dessin géométrique n'est plus l'objet physique « brut », mais un objet qui a déjà subi par le sujet qui le regarde une transformation intellectuelle, une interprétation, pour en faire un dessin géométrique. Le lecteur peut en effet envisager ou non le dessin comme un objet géométrique : un « rond » représente-t-il un cercle ou un ballon ? Les premières difficultés apparaissent : interpréter transforme, et l'objet n'est plus alors tout à fait le même pour différents observateurs de cet objet. Je distinguerai plusieurs niveaux de regard sur ce dessin :

Niveau 0 : en amont du dessin géométrique, le **dessin** est l'objet physique sans interprétation particulière. On ne peut rien faire de cet objet dans la classe de mathématiques, si ce n'est le transformer mentalement pour passer au niveau suivant.

Niveau 1 : au niveau 1, le dessin devient l'objet géométrique, au sens des compléments au programme et instructions du 13 mai 1985 concernant la géométrie à l'école :

> *« Le passage du monde des objets physiques à celui des objets géométriques est important et difficile ; il nécessite un effort d'abstraction (au sens de « enlever de »). Prenons l'exemple d'une boîte cubique : il faut en effet parvenir à ne pas tenir compte des inscriptions sur les faces, de la couleur de la boite, à substituer l'idée et le mot de « face » à l'idée et au mot « couvercle » : une boîte a un couvercle mais toutes les faces d'un cube sont identiques. » [IO 1985].*

Il s'agit là du niveau décrit dans [Parzysz. 2004] précédemment cité, où il y a prise en compte des seules propriétés géométriques de l'objet. Les propriétés non géométriques sont facilement repérées comme telles par l'expert, mais cette abstraction nécessite un réel apprentissage en cycle 2, voire en cycle 3. Ce niveau nécessite par ailleurs bien sûr une action volontaire du lecteur comme l'expliquent Laborde et Capponi :

> *« Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire ... Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation. » [Laborde & Capponi. 1994, page 169].*

Autrement dit, le dessin devient un **dessin géométrique** à partir du moment ou le lecteur en décide ainsi, en fonction du contexte[6], par exemple parce que ce dessin est sur le tableau de la classe de mathématiques ou sur une page du manuel de mathématiques. La seule action du sujet envisagée dans ce niveau est de considérer le dessin comme géométrique, avant toute interprétation, tout raisonnement, toute déduction.

Nous pouvons compléter ce point de vue sur le dessin par la typologie de traitement des figures de Duval. Dans ce niveau 1, intervient en effet forcément au moins « l'appréhension perceptive » des figures :

> *« L'appréhension perceptive ... permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme, ou un objet, soit dans le plan, soit dans l'espace. Cette identification d'une forme en 2D ou 3D se fait en fonction de lois, dites « gestaltistes » d'organisation ou en*

[6] au sens courant du terme « Ensemble de circonstances qui accompagnent un événement, une action » (définition du dictionnaire de l'académie française, neuvième édition, version informatisée).

fonction d'indicateurs intrafiguraux ... par exemple des différences de taille ou d'orientation. » [Duval. 1994, page 123]

Même si Duval parle ici de figure (il n'effectue pas la distinction dessin-figure) nous garderons le terme de dessin en ce sens que cette appréhension perceptive a bien lieu sur l'objet physique, la trace sur le papier, ..., considéré comme dessin géométrique. Cette trace n'est pas n'importe quelle trace, mais une trace envisagée par le lecteur comme « géométrique ».

Pour mettre en évidence l'importance de la perception dans ce niveau, je parlerai dans la suite de dessin « perçu »

Niveau 2 : le dessin passe, au niveau 2, d'un dessin géométrique seulement « perçu », à un dessin géométrique que le lecteur s'approprie. Il s'agit ici d'un objet géométrique sur lequel le lecteur effectue des interprétations, des actions. Je parlerai ainsi pour ce dessin de dessin géométrique « interprété ». Considérons l'intégralité de l'extrait précédent de Laborde et Capponi :

> *« Un dessin renvoie aux objets théoriques de la géométrie dans la mesure où celui qui le lit décide de le faire, l'interprétation est évidemment dépendante de la théorie avec laquelle le lecteur choisit de lire le dessin ainsi que des connaissances de ce lecteur. Le contexte joue un rôle fondamental dans le choix du type d'interprétation. » [Laborde & Capponi. 1994, p. 169].*

Ils insistent sur le fait que ce dessin va être interprété différemment en fonction des connaissances du sujet. Si la trace matérielle est la même pour tous, l'interprétation qui en est faite est différente pour chacun. Notons qu'ils utilisent les verbes « décider » et « choisir », mais que cette décision, ce choix, sont souvent inconscients chez le sujet.

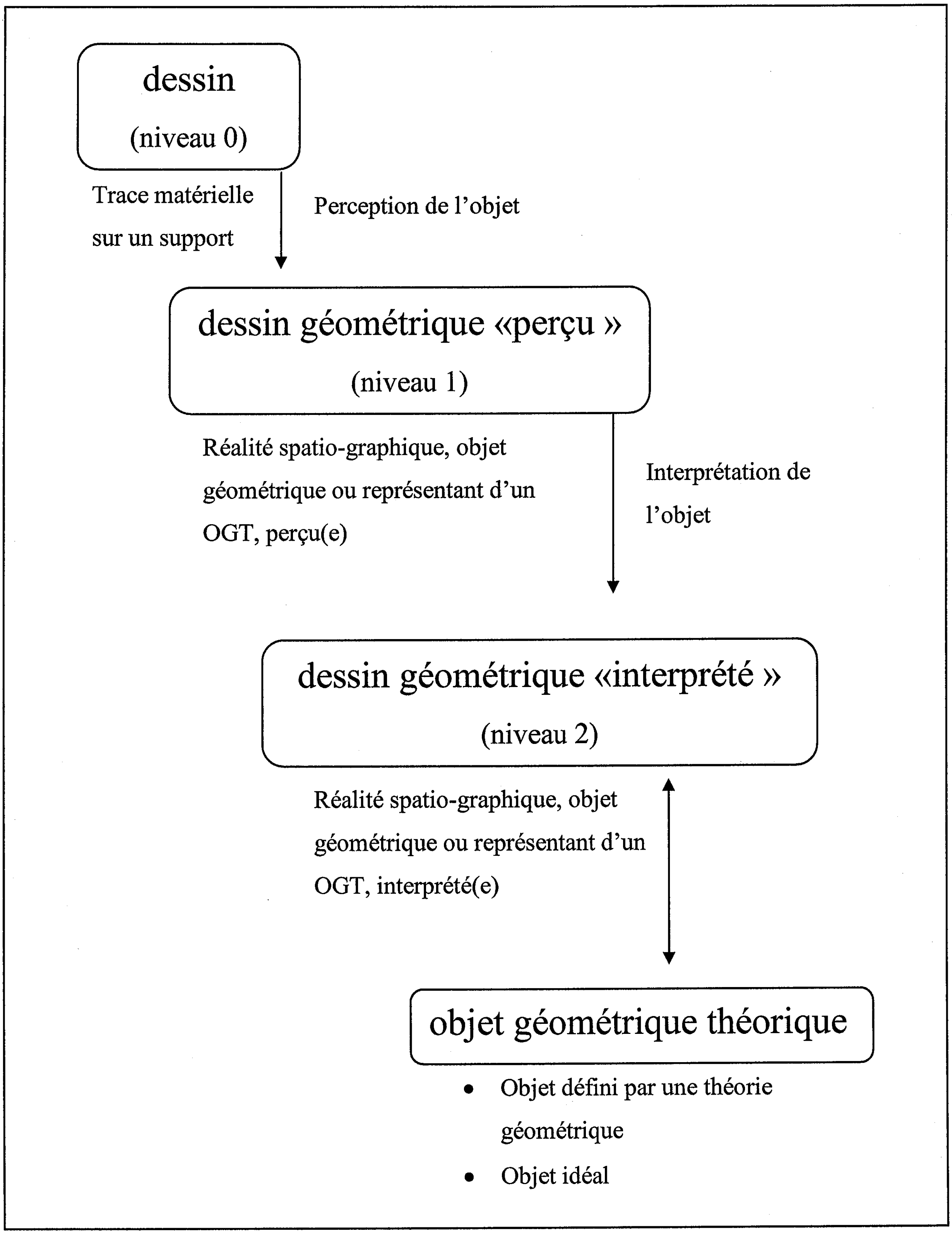
Nous pouvons compléter ce problème d'interprétation en reprenant la typologie de traitement possible des figures de Duval, chacun de ces traitements nourrissant l'interprétation. Duval met en évidence diverses formes d'appréhension :

> *« **L'appréhension opératoire** est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures. Nous avons distingué ailleurs trois grands types de modification : les modifications méréologiques consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure, les modifications optiques consistant dans l'agrandissement, la diminution ou la déformation de la figure, et les modifications positionnelles consistant soit dans le déplacement de la figure dans le plan soit dans le déplacement du plan de la figure par rapport au plan fronto-parallèle ... **L'appréhension discursive** d'une figure correspond à une explicitation des autres*

> *propriétés mathématiques d'une figure que celles indiquées par la légende ou par les hypothèses. Cette explicitation est de nature déductive. La fonction épistémologique de l'appréhension discursive est la démonstration ...* ***L'appréhension séquentielle*** *concerne l'ordre de construction d'une figure. » [Duval. 1994, pages 124, 126]*

Il ne s'agit pas ici de développer les travaux de Duval, mais de mettre en évidence des actions possibles de l'individu sur le dessin géométrique, pour mieux définir ce que nous appelons dessin géométrique. Dans tous les cas, niveau 1 de regard « passif » ou niveau 2 de regard « actif » du dessin, nous considèrerons qu'il s'agit d'un dessin géométrique, alors que dans le niveau 0, il ne s'agit que d'un dessin. A ce stade de l'analyse, ce dessin géométrique peut être l'objet géométrique d'étude lui-même, ou un représentant de l'objet géométrique théorique étudié. Nous reviendrons évidemment sur cette distinction essentielle par la suite.

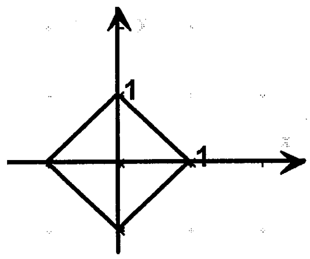
Je peux alors enrichir le schéma précédent, où je conserve le terme de « réalité spatio-graphique » de Laborde et Capponi pour parler de cette trace sur le papier, envisagée d'un point de vue géométrique.


dessin
(niveau 0)
Trace matérielle
sur un support
Perception de l'objet
dessin géométrique «perçu »
(niveau 1)
Réalité spatio-graphique, objet
géométrique ou représentant d'un
OGT, perçu(e)
Interprétation de
l'objet
dessin géométrique «interprété »
(niveau 2)
Réalité spatio-graphique, objet
géométrique ou représentant d'un
OGT, interprété(e)
objet géométrique théorique
• Objet défini par une théorie
géométrique
• Objet idéal

1.3. Le dessin représentant de l'objet géométrique théorique

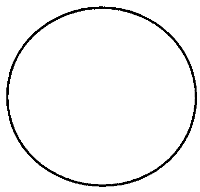
Deux points de vue ont jusqu'ici coexisté dans mon analyse : le dessin géométrique objet du travail en lui-même, ou le dessin géométrique représentant d'un objet théorique géométrique. Parce que j'ai cité des auteurs experts en mathématiques, le point de vue le plus fréquent est que le dessin est une représentation de l'objet théorique sur lequel on travaille. En effet, dans la résolution d'un problème, le mathématicien raisonne, en général, sur l'objet théorique, au moins au moment où il rédige par exemple une démonstration, la phase heuristique pouvant bien entendu largement utiliser le dessin. C'est le point de vue exprimé dans divers extraits cités au paragraphe 1.1. Il est maintenant intéressant de pointer quelques spécificités de cette représentation. Les rapports entre l'OGT et sa représentation sont en effet complexes. [Capponi & Laborde. 1995] notamment envisage quelques aspects de cette complexité.

1.3.1. Des interprétations multiples



Tout d'abord, comme nous l'avons vu, la représentation est sujette à des interprétations multiples. Même dans une lecture géométrique, l'interprétation dépend des **connaissances du lecteur**. Le dessin ci-contre par exemple peut être interprété, dans un repère orthonormal du plan, comme un carré de sommets $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ par un élève de collège (dans le cas où il accepterait de ne pas seulement le reconnaître comme losange, à cause de sa position), et comme une boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour une norme bien choisie par un étudiant de mathématiques en deuxième année à l'université.

Cette interprétation dépend également du **contexte**. Le même élève de cycle 3 considèrera la figure ci-contre comme un cercle ou comme un disque selon qu'il s'intéresse à son périmètre ou à son aire (pour ceux qui auront réussi à construire ces deux concepts, ce qui n'est pas toujours le cas en fin de cycle 3).



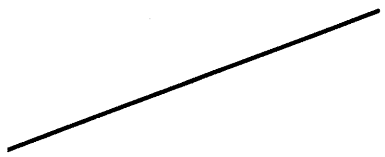
Autrement dit, un même dessin peut renvoyer à des OGT différents.

1.3.2. Un domaine de fonctionnement limité

Deuxièmement,

> *« en tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais ne le fait que partiellement. On peut attacher un domaine de fonctionnement au dessin (ensemble des propriétés géométriques représentées par certaines des propriétés spatiales du dessin). » [Laborde & Capponi. 1995, page 171]*

Ainsi, l'OGT possède des propriétés qui peuvent ne pas être visibles sur le dessin. Le domaine de fonctionnement est le domaine dans lequel le dessin est susceptible de fournir des informations pertinentes. Parce que le dessin ne dit pas tout de l'OGT, un texte est nécessaire. Par exemple, comment savoir si le dessin ci-contre représente un segment ou une droite ?[7] On peut remarquer qu'à partir d'un texte, on peut en général faire un dessin (et même plusieurs), parce que l'OGT est complètement défini par un texte, mais qu'à partir d'un dessin, on ne peut pas reconstituer le texte, et donc définir l'OGT, de manière sûre.



1.3.3. Un domaine d'interprétation limité

Troisièmement,

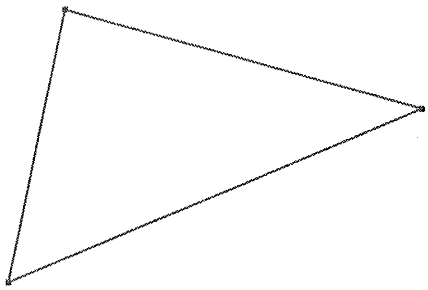
> *« toutes les propriétés du dessin ne peuvent être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet, au dessin est attaché un domaine d'interprétation. La position du dessin dans la feuille de papier par exemple est en dehors du domaine d'interprétation des dessins en tant que signifiants d'objets de la géométrie euclidienne. Certains des problèmes rencontrés par des élèves tiennent justement à ce qu'ils fonctionnent avec un domaine d'interprétation différent de celui de la géométrie euclidienne » [Capponi & Laborde. 1995, page 172].*

Les élèves de cycle 3, tout comme nos PE1 d'ailleurs, utilisent en effet volontiers des expressions du type « en haut », « au-dessus », « à droite », « horizontal », « vertical », etc. , qui ne font pas partie *« du domaine d'interprétation des dessins en tant que signifiants d'objets de la géométrie euclidienne ».*

---

[7] Cet exemple est classique. On le retrouve notamment dans [Parzysz. 1988, page 81] : « for instance, in plane geometry, does a representation, rightly identified as being that of a segment , really represent a segment, or rather a straight line ? ».
traduction : « par exemple, en géométrie plane, une représentation, correctement identifiée comme étant celle d'un segment, représente-t-elle vraiment un segment ou une ligne droite ? »

Par ailleurs, d'autres propriétés du dessin sont liées au choix d'un représentant particulier de l'OGT. Le triangle dessiné ci-contre, par exemple, possède des mesures de côté, dont il ne faudra généralement[8] pas tenir compte puisqu'elles ne sont pas données dans l'énoncé.



D'où le travail, parfois difficile, de limiter au maximum le nombre de caractéristiques du dessin qui ne sont pas des caractéristiques de l'OGT.
Ce problème est étudié par Arsac :

> *« Lorsque l'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils dessinent précisément un triangle quelconque, c'est-à-dire ni isocèle, ni rectangle, il essaie d'obtenir qu'ils tracent une figure* ***générique*** *en ce sens qu'on ne risque pas d'y lire d'autres propriétés que celles postulées dans les hypothèses du problème étudié. » [Arsac. 2004]*

Les exemples de ce type sont nombreux : tracer un triangle quelconque[9], mais aussi un quadrilatère qui ne soit pas particulier, une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle qui ne soit ni médiane, ni médiatrice, etc. En fait, il subsiste nécessairement des caractéristiques du dessin qui ne sont pas des propriétés de l'OGT. Il s'agit d'en réduire le nombre à défaut de les faire disparaître toutes.

1.3.4. Absence d'isomorphisme, description discursive

Cette complexité de l'interprétation du dessin met en évidence l'absence d' « isomorphisme » entre l'ensemble des dessins géométriques et celui des objets géométriques théoriques : un même dessin géométrique peut correspondre à plusieurs OGT différents (exemple du carré et de la boule, cf. § 1.3.1), et inversement plusieurs dessins géométriques peuvent correspondre à un même OGT (de nombreux dessins représentent un triangle ABC « quelconque »[10]). D'où l'impossibilité de définir l'OGT par un dessin, et la nécessité d'une description discursive, afin :

- de lever les ambiguïtés inhérentes au dessin :

[8] sauf bien sûr dans des exercices de cycle 2 ou 3 où l'exercice consiste à mesurer la longueur des côtés du triangle, pour apprendre par exemple à se servir de la règle graduée, où dans des exercices de découverte du périmètre.
[9] Lubczanski a proposé à ce sujet un certain nombre de « recettes » permettant de tracer un triangle plus quelconque que les autres. Le lecteur intéressé pourra consulter [Lubczanski. 1985-1,2,3]
[10] Même si Lubczanski cherche à montrer qu'il en existe un qui est « plus quelconque » que les autres …

« Une description discursive caractérisant l'objet géométrique est nécessaire pour lever les ambiguïtés inhérentes au dessin. » [Capponi & Laborde. 1995, page 171]

- de choisir l'objet représenté :

« Une figure[11] *ne représente une situation géométrique que dans la mesure où la signification de certaines unités figurales et de certaines de leurs relations sont explicitement fixées au départ. ... un même dessin peut représenter des situations mathématiques très différentes et donc servir de support intuitif à des raisonnements différents. Il faut donc une indication verbale pour ancrer la figure comme représentation de tel ou tel objet mathématique.» [Duval. 1995, page 188]*

- Ou encore tout simplement de définir cet objet :

« la figure est l'objet géométrique qui est décrit par le texte le définissant.»[12] *[Parzysz. 1988, page 80].*

1.4. Le dessin objet de la géométrie

Mais le débutant en géométrie est loin de l'expertise du géomètre. L'OGT dont nous venons de parler est un objet de pensée qui lui est dans un premier temps inaccessible. Pour lui, il n'existe pas d'objet autre que le dessin, le dessin géométrique EST l'objet géométrique sur lequel l'enfant travaille. C'est évidemment le cas en cycle 2 :

« Au cycle 2, ..., les élèves vont d'abord prélever des propriétés de façon perceptive, puis être amenés à utiliser les instruments de géométrie pour vérifier les hypothèses émises. » [Appl. Maths C2. 2002, page 24]

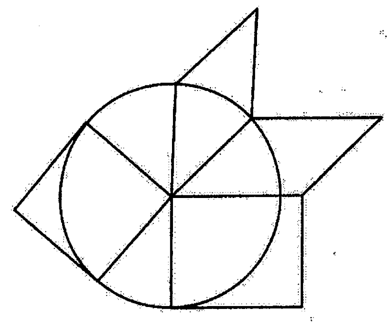
Les activités géométriques vont ainsi être menées directement sur le dessin géométrique, sans référence à un objet théorique. C'est encore le cas au moins en partie en cycle 3 :

« L'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés. » [Appl. Maths C3. 2002, page 30]

[11] ici encore, Duval utilise le mot figure pour ce que j'appelle dessin
[12] « the figure is the geometrical object which is described by the text defining it. »

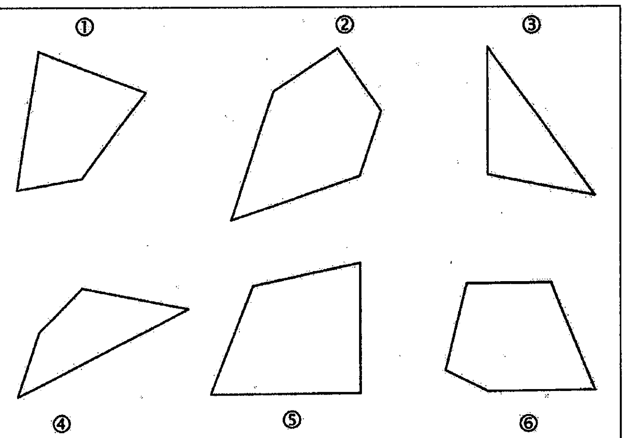
Ainsi, dans les évaluations à l'entrée en sixième, bon nombre de dessins proposés (appelés « figures ») sont les objets géométriques sur lesquels les élèves doivent travailler, et non des représentants d'objets géométriques théoriques. Considérons par exemple les exercices 15 et 24 des évaluations de 2000.

Le même dessin (ci-dessous) est proposé aux élèves avec les énoncés suivants :

Exercice 15 : Observe attentivement la figure suivante. Repasse, en couleur, les côtés d'un losange de cette figure.	
Exercice 24 : Observe attentivement la figure suivante. Repasse, en couleur, les côtés d'un carré de cette figure.	

De même, observons les exercices 2 et 27 dans les évaluations de 2003.

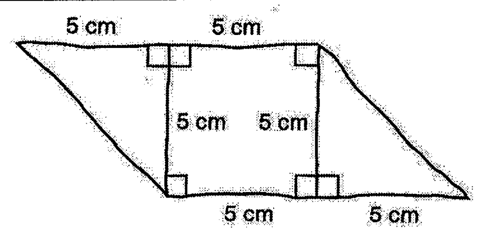
Le même dessin (ci-dessous) est proposé aux élèves avec les énoncés suivants :

Exercice 2 : Voici six figures. Sur certaines figures, il y a des côtés perpendiculaires. Repasse en couleur ces côtés perpendiculaires	
Exercice 27 : Voici six figures. Sur certaines figures, il y a des côtés parallèles. Repasse en couleur ces côtés parallèles.	

Les élèves peuvent soit se contenter d'observer les dessins proposés, soit utiliser les instruments. Dans tous les cas, l'objet de travail est le dessin, aucun codage ni aucune description discursive ne permet de considérer un objet géométrique théorique.

L'introduction du codage ne signifie pas par ailleurs que l'on va nécessairement s'intéresser à l'objet théorique. Prenons par exemple cet exercice, extrait du manuel [Cap Maths CM1. 2003, page 79] :

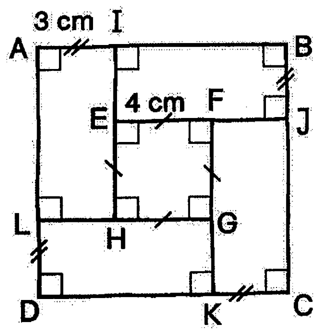
Voici un dessin à main levée d'une figure[13]. Le dessin n'est pas en vraie grandeur. Construis cette figure en vraie grandeur sur papier uni, avec tes instruments de géométrie.



Ce schéma peut être interprété comme représentant un objet physique ou un objet théorique. Mais cela importe peu dans cet exercice. L'activité de l'élève consiste en effet à décoder le schéma pour **effectuer la construction**[14]. Je reviendrai ultérieurement sur ce que signifie « construire », mais nous pouvons ici considérer simplement qu'il s'agit de produire un dessin, correspondant à la description qui en est faite par le codage. L'objet de travail est ainsi à nouveau le dessin, pour lequel il faudra mesurer, utiliser l'équerre, etc.

Ce n'est cependant pas le cas de tous les exercices proposés à l'école. Considérons par exemple l'exercice suivant, extrait du manuel [Cap Maths CM2. 2004, page 147] :

Le grand carré ABCD est formé de 4 rectangles identiques et d'un petit carré EFGH.
Quelle est la longueur du côté du grand carré ?
Explique comment tu as trouvé.



Le support est un dessin à main levée, et les informations permettant de définir l'objet sont codées. L'élève peut à nouveau interpréter ce schéma comme représentant un objet physique ou un objet théorique. Mais l'activité de l'élève consiste cette fois à décoder le schéma puis utiliser les propriétés codées de l'objet pour **raisonner** et conclure à une autre propriété. Le raisonnement et les conclusions sont identiques, quelle que soit la représentation (physique ou théorique) que l'élève a de l'objet, mais l'activité principale de l'élève est ici le raisonnement, comme l'indique le livre du maître :

« Un schéma et des connaissances géométriques peuvent suffire pour résoudre certains problèmes, sans qu'il soit nécessaire de faire une figure précise et d'effectuer des mesures

[13] Un implicite intervient dans ce dessin : il n'y a que des segments.
[14] Il s'agit de l'appréhension séquentielle de Duval.

sur la figure. Il faut alors faire un raisonnement pour exploiter les informations fournies par le schéma. »[Charnay & al., 2004, page 279]

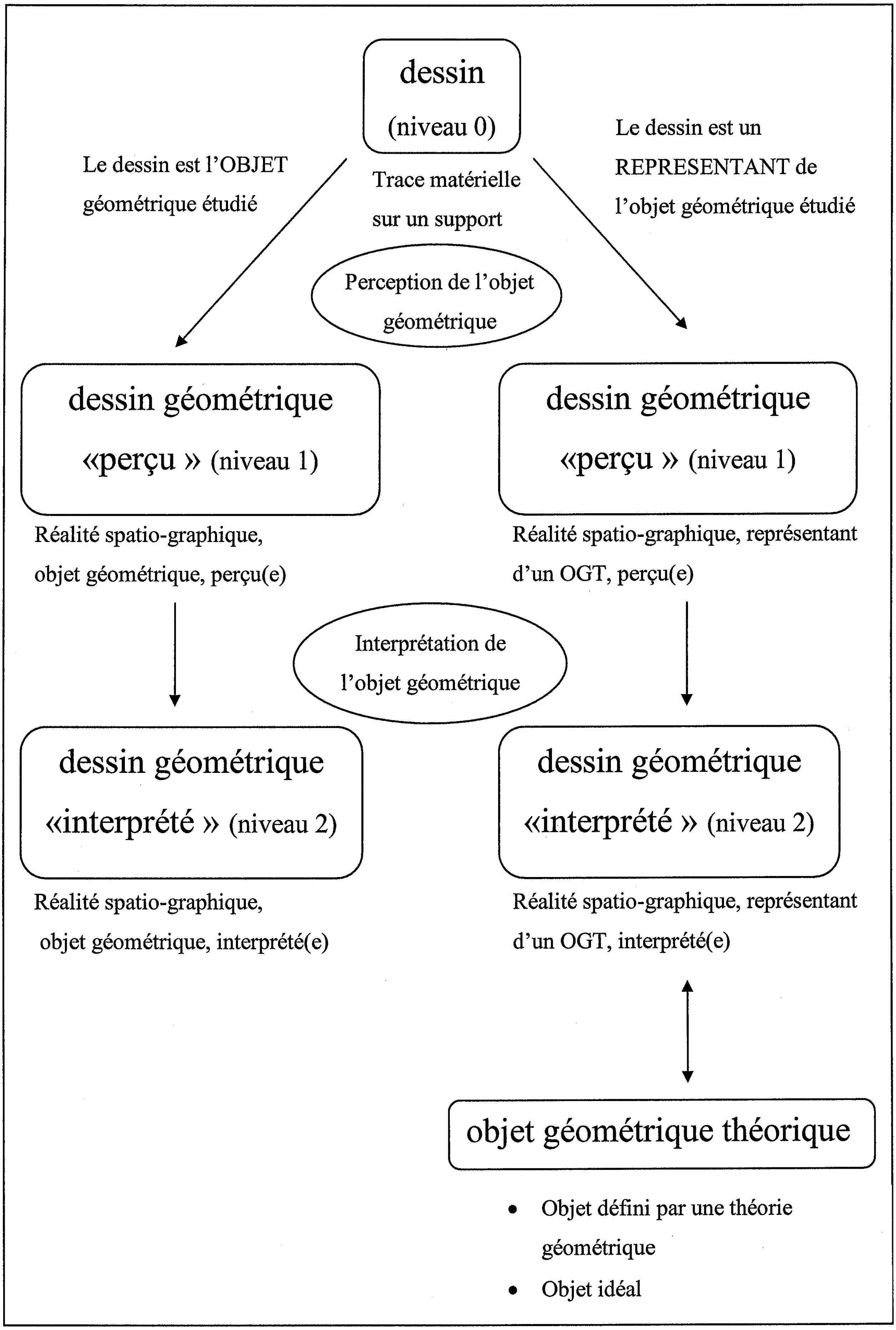
Ce raisonnement peut s'appliquer sur un objet physique ou sur un objet théorique, mais rien n'oblige à travailler sur l'objet théorique. Il est donc tout à fait possible que l'élève habitué à manipuler l'objet physique le fasse ici. De toutes façons, il s'agit là de quelques exercices seulement (6 en tout dans le manuel entre les pages 144 et 147).

Le texte sur l'articulation entre l'école et le collège met en effet en évidence que la distinction entre dessin et objet géométrique théorique ne va véritablement s'installer qu'au collège :

« En sixième, ...la distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction. » [Articulation école collège. 2004, page 5]

C'est ce qui explique que dans les schémas précédents, nous avons gardé les expressions « objet géométrique ou représentant d'un objet géométrique » pour décrire le dessin géométrique. Il est le plus souvent objet géométrique pour l'enfant à l'école élémentaire et représentant d'un objet géométrique théorique au collège (du moins, c'est ce qui est souhaité en fin de collège), mais ce n'est pas systématique.

Autrement dit, **l'objet du travail en géométrie** n'est pas le même tout au long de la scolarité, ni probablement pour un individu à un instant donné en fonction des tâches qui lui sont proposées. **Toute la question pour nous est de savoir ce qu'il est pour nos PE1.**


dessin
(niveau 0)
Trace matérielle sur un support
Le dessin est l'OBJET géométrique étudié
Le dessin est un REPRESENTANT de l'objet géométrique étudié
Perception de l'objet géométrique
dessin géométrique «perçu » (niveau 1)
Réalité spatio-graphique, objet géométrique, perçu(e)
dessin géométrique «perçu » (niveau 1)
Réalité spatio-graphique, représentant d'un OGT, perçu(e)
Interprétation de l'objet géométrique
dessin géométrique «interprété » (niveau 2)
Réalité spatio-graphique, objet géométrique, interprété(e)
dessin géométrique «interprété » (niveau 2)
Réalité spatio-graphique, représentant d'un OGT, interprété(e)
objet géométrique théorique
Objet défini par une théorie géométrique
Objet idéal

1.5. Un objet théorique … mais pas seulement …

Revenons maintenant sur cet objet théorique dont nous parlions précédemment, considéré comme objet d'une théorie géométrique, pour nous la géométrie euclidienne. Il est tentant de croire que le mathématicien ne fait référence qu'à des objets géométriques théoriques lorsqu'il effectue une démonstration, à l'exclusion de toute référence au dessin. La règle du jeu, au collège notamment, est bien souvent formulée par les élèves : « il faut démontrer, on ne peut pas lire de propriétés sur la figure ». Ce n'est en fait bien souvent qu'une illusion, certaines propriétés étant effectivement démontrées, mais en en utilisant d'autres qui sont lues sur le dessin.

> *« Quant à l'insistance de l'enseignant sur les figures génériques, elle n'aurait qu'un rôle pédagogique : éviter de lire sur le dessin des propriétés parasites, montrer que la démonstration doit être dans une certaine mesure indépendante du dessin.*
>
> *En fait, cette position est illusoire car la très grande majorité des démonstrations géométriques font appel à des propriétés lues sur la figure ». [Arsac. 2004]*

Arsac a beaucoup développé cet aspect dans ses articles, notamment dans [Arsac.1997-1998, page 16] :

> *« Si l'on analyse maintenant les manuels de géométrie français, on trouve que ce sont les mêmes propriétés qu'Euclide lisait sur le dessin qui vont encore y être lues : il n'y a jamais aucun emploi explicite des propriétés d'ordre, et ce sont les mêmes propriétés du groupe des axiomes d'incidence qui sont lues sur le dessin de façon implicite et donc considérées comme évidentes.*
>
> *… Ainsi, malgré les évolutions, il reste qu'un certain degré d'appel à la figure s'est maintenu à peu près, d'Euclide à nos jours, dans l'histoire de l'enseignement… En tous cas, si l'on n'accepte pas ce genre de lecture sur le dessin, si l'on veut tout démontrer, on aboutit rapidement à une complication qui exclurait la géométrie de l'enseignement élémentaire »*

Ainsi donc, le recours au dessin, au collège en particulier, reste présent, même quand on essaie de travailler sur l'objet théorique géométrique. Cela ne signifie pas qu'il n'est pas possible de se passer complètement du dessin à quelque niveau que ce soit, mais en tous les cas à celui du collège. Deux types d'objets théoriques apparaissent ainsi : d'un côté celui entièrement et uniquement construit par la théorie, sans aucun recours au dessin, que l'on peut envisager au niveau universitaire, et qui cette fois n'est plus un objet idéal mais seulement un objet formellement défini par la théorie, *« objet d'une théorie complètement axiomatisée »* pour reprendre le vocabulaire de [Parzysz. 2002] (c'est l'objet géométrique que nous retrouverons dans le paradigme G3), d'un autre côté l'objet théorique manipulé au collège, avec un recours au dessin limité à quelques types de propriétés, *« objet d'une géométrie incomplètement axiomatisée »* [Parzysz. 2002] (c'est celui que nous retrouverons dans le paradigme G2). Je peux alors compléter à nouveau le schéma précédent, afin d'affiner la distinction dessin-OGT. C'est entre ces deux derniers objets que se situent les difficultés des PE1, et par là-même notre étude.

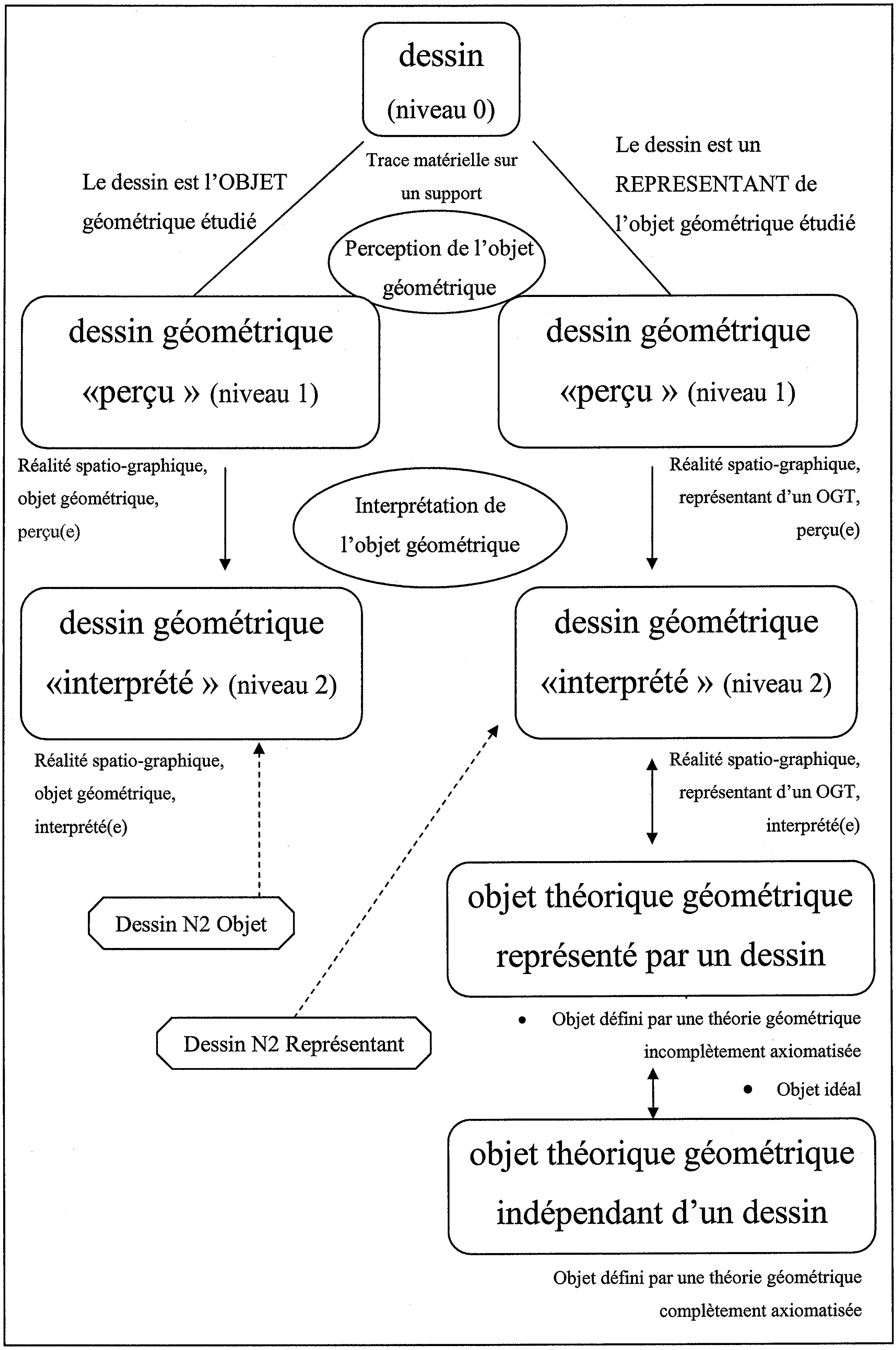
Je peux, à ce stade de l'analyse, préciser une de mes questions :

Sur quels types d'objets les PE1 en formation travaillent-ils spontanément :

- **dessin géométrique de niveau 2 objet géométrique (dessin N2 Objet) ?**
- **ou dessin géométrique de niveau 2 représentant un objet géométrique théorique (dessin N2 Représentant) ?**
- **ou encore objet théorique géométrique représenté par un dessin géométrique ?**

L'hypothèse sous-jacente peut être ainsi formulée :

HR1 : Les PE1 « naviguent » entre ces trois points de vue, sans en être conscients.


dessin
(niveau 0)
Le dessin est l'OBJET géométrique étudié
Trace matérielle sur un support
Le dessin est un REPRESENTANT de l'objet géométrique étudié
Perception de l'objet géométrique
dessin géométrique «perçu » (niveau 1)
dessin géométrique «perçu » (niveau 1)
Réalité spatio-graphique, objet géométrique, perçu(e)
Interprétation de l'objet géométrique
Réalité spatio-graphique, représentant d'un OGT, perçu(e)
dessin géométrique «interprété » (niveau 2)
dessin géométrique «interprété » (niveau 2)
Réalité spatio-graphique, objet géométrique, interprété(e)
Réalité spatio-graphique, représentant d'un OGT, interprété(e)
Dessin N2 Objet
objet théorique géométrique représenté par un dessin
Dessin N2 Représentant
Objet défini par une théorie géométrique incomplètement axiomatisée
Objet idéal
objet théorique géométrique indépendant d'un dessin
Objet défini par une théorie géométrique complètement axiomatisée

2. Figure

J'ai jusqu'ici travaillé autour de deux expressions : dessin et objet géométrique, que j'ai essayé d'expliciter, de préciser, à partir d'extraits d'auteurs que je reprends à mon compte. Il me faut maintenant en introduire une troisième, très fréquente dans ce contexte de la géométrie : la figure, et préciser son lien avec les deux autres termes. Je vais dans un premier temps analyser quelques extraits d'articles, afin d'expliciter le sens que ces auteurs donnent au mot « figure », notamment par rapport au dessin géométrique et à l'objet théorique géométrique que je viens d'étudier. Je préciserai ensuite ce que je ferai de ce terme dans la suite de ma thèse.

Autant il y avait, « grosso-modo », consensus chez les mathématiciens sur dessin et objet géométrique, autant le mot figure est pris dans des acceptions vraiment différentes selon les auteurs, et parfois même selon les articles chez un même auteur. Ce mot « figure » peut tout aussi bien revêtir le sens de dessin, que d'objet géométrique, que divers sens entre les deux.

2.1. Figure = dessin

Dans un premier temps, « figure » peut être synonyme de « dessin », **de niveau 0**. Par exemple, dans l'extrait de Duval suivant, figure prend le sens de la trace matérielle sur la feuille de papier dont nous parlions tout à l'heure :

> *« Une figure est une organisation d'éléments d'un champ perceptif non homogène, constituant un objet qui se détache du champ » [Duval. 1988, page 58]*

Dans cette définition, il n'y a en effet aucune référence à un regard géométrique.

Duval parle ensuite d'appréhension perceptive des figures ; il s'agit alors de **notre dessin géométrique de niveau 1** :

> *« ...l'appréhension perceptive... permet d'identifier ou de reconnaître, immédiatement, une forme ou un objet, soit dans un plan, soit dans l'espace. » [Duval. 1994, page 123]*

Duval s'est beaucoup intéressé à la démonstration et on peut penser que, le plus souvent, le dessin géométrique est pour lui un représentant d'un objet théorique, mais ce qui est dit ici sur l'appréhension perceptive s'applique également tout naturellement aux dessins géométriques que les élèves manipulent à l'école élémentaire, nos « objets géométriques », dont nous avons mis en évidence qu'ils ne sont pas théoriques pour l'élève.

Quand il parle ensuite d'appréhension opératoire, il travaille sur un **dessin géométrique de niveau 2** , représentant un objet géométrique :

« L'appréhension opératoire est l'appréhension d'une figure donnée en ses différentes modifications possibles en d'autres figures ... les modifications méréologiques ... , les modifications optiques ... et les modifications positionnelles » [Duval. 1994, page 126]

De même que précédemment, pour, par exemple :

« Identifier, de manière perceptive, une figure simple dans une figure complexe.

Vérifier l'existence d'une figure simple dans une figure complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments.

Décomposer une figure en figures plus simples. » [Appl. Maths C3. 2002, page 32]

il s'agit bien de mettre en œuvre l'appréhension opératoire des figures de Duval. Ainsi, cette appréhension opératoire des figures s'applique à des dessins géométriques de niveau 2, objets géométriques.

Autrement dit, Duval utilise le mot figure pour ce que nous avons appelé dessin (niveau 0) ou dessin géométrique, qu'il soit de niveau 1 ou de niveau 2, objet géométrique ou représentant d'un OGT.

On retrouve bien sûr également le mot figure pour désigner un dessin géométrique dans les instructions officielles pour l'école élémentaire dans les commentaires :

« La perception d'un alignement de plusieurs points dans une figure complexe permet de tracer la droite correspondante et de mettre en évidence une propriété de cette figure. » [Appl. Maths C3. 2002, page 31]

ou plus loin dans les compétences :

« Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie. » [Appl. Maths C3. 2002, page 31]

Cette « perception » ne peut en effet s'effectuer que sur les objets physiques, donc ici sur des dessins géométriques. J'ai choisi ces extraits parmi de nombreux autres dans les textes officiels. En effet, pratiquement partout dans les instructions officielles de l'école, le mot figure est utilisé pour désigner ce que j'ai appelé « dessin géométrique », qu'il soit le plus souvent considéré comme objet géométrique d'étude pour lui-même ou plus rarement comme représentant d'un OGT.

2.2. Figure = objet géométrique théorique

Avec un point de vue complètement opposé, le mot figure désigne pour certains l'objet géométrique théorique. C'est le point de vue classique, présenté dans le paragraphe 1.1, par des extraits de Arsac ou Parzysz, ou encore dans l'extrait suivant :

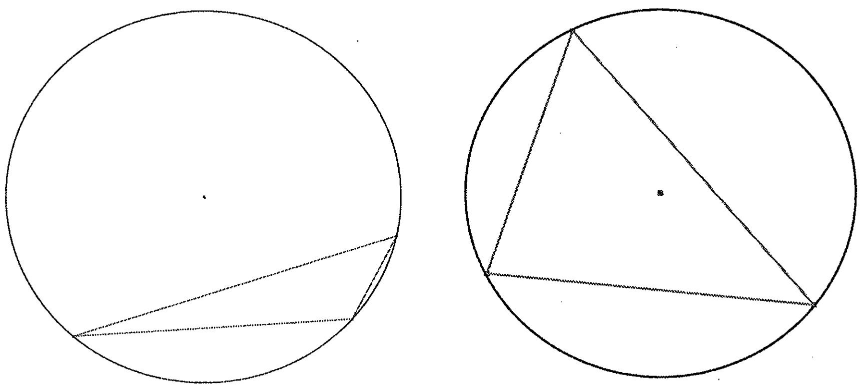
> *« ... nous réserverons (il s'agit d'une convention, contestable comme toutes les conventions) le terme de FIGURE à l'être géométrique, tandis que nous emploierons le mot DESSIN pour une représentation graphique (plane) de cette figure. »[Parzysz. 1989, page 14]*

Mais souvent, le mot figure est utilisé pour désigner un objet plus complexe que ceux de dessin ou d'OGT ...

2.3. Figure = classe d'équivalence de dessins

Arsac, dans certains cas, considère la figure comme une classe d'équivalence de dessins représentant le même OGT. C'est ce qu'il appelle le point de vue mathématique sur la figure.

> *« une figure apparaît comme une classe d'équivalence : concrètement, deux dessins représentent la même figure lorsqu'ils sont semblables ou isométriques (suivant le type de propriétés que l'on veut étudier) ou même simplement s'ils se correspondent dans une transformation affine. » [Arsac & al. 1992, page 174]*



Dans le cas ci-dessus, il n'existe pas de transformation affine qui transforme un de ces deux dessins en l'autre. Pourtant, d'un certain point de vue, ils représentent le même objet géométrique : un triangle quelconque[15] et son cercle circonscrit. On pourrait alors élargir la définition précédente d'Arsac et considérer la figure comme l'ensemble de tous les dessins qui représentent un objet géométrique défini par un énoncé (décrivant des objets, des propriétés, des relations), ici « un triangle quelconque, c'est-à-dire non rectangle et non isocèle, et son cercle circonscrit ». Chaque énoncé définit une partition de l'ensemble des dessins géométriques en deux parties : ceux qui représentent l'énoncé et ceux qui ne le représentent pas.

Laborde et Capponi reprennent, de manière plus complexe, ce concept de classe d'équivalence : ils insèrent le concept de figure dans le triangle signifiant, signifié, référent. Le dessin est le signifiant, la représentation ; l'objet géométrique théorique est le référent, l'objet représenté. Dans cette perspective,

> *« la figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme est pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme de figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur de dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associée pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fischbein (1993) appelle* figural concept. *»[Laborde & Capponi. 1994, page 168].*

Le problème est que cette définition n'est pas très facile à manipuler …

2.4. Concept figural

Comme nous y invitent Laborde et Capponi, allons étudier Fischbein, dans son article « The theory of figural concepts ». Il explicite tout d'abord concept et image :

> *« Ce qui caractérise un concept est le fait qu'il exprime* une idée, *une représentation générale, idéale, d'une classe d'objets, basée sur leurs caractéristiques communes.*

[15] le premier a des mesures d'angles issues de [Lubczanski. 1985-3], le second correspond aux valeurs proposées dans [Lubczanski. 1985-1],

> *Par contraste, une image (nous nous référons ici aux images mentales), est une représentation* sensorielle *d'un objet ou d'un phénomène...*
>
> *Dans toutes les théories cognitives existantes, concepts et images sont considérés comme deux catégories fondamentalement distinctes d'entités mentales. »*[16] *[Fischbein. 1993, page 139]*

Fischbein montre ensuite que les « figures » sur lesquelles nous travaillons en géométrie ne sont ni tout à fait l'un, ni tout à fait l'autre.

> *« Nous traitons d'un monde idéal, avec des significations idéales. Les objets auxquels nous nous référons - points, côtés, angles et les opérations sur eux – n'ont qu'une existence idéale. Ils sont de nature conceptuelle.* En même temps, *ils ont une nature figurale intrinsèque : ce n'est qu'en se référant aux images que l'on peut considérer des opérations comme isoler, retourner ou superposer.*
>
> *En fait, le triangle auquel on se réfère et ses éléments ne peuvent être considérés comme des concepts purs, ni comme de simples images ordinaires. Les opérations mentionnées ci-dessus n'auraient pu être réalisées ni avec des concepts purs, ni avec des objets réels. »*[17] *[opus cit., page 140]*

Fischbein complète cette analyse en mettant en évidence cinq propriétés des « figures » qui sont du côté conceptuel de la figure, ce que j'ai jusqu'à présent appelé « l'objet géométrique théorique » :

- *« Les entités auxquelles nous nous sommes référés ci-dessus – points, côtés, angles, le triangle lui-même, et les opérations sur eux – possèdent des qualités conceptuelles. Dans le raisonnement mathématique, on ne se réfère pas à ces entités comme à des objets matériels ou à des dessins. Les objets matériels – solides ou dessins – ne sont que des modèles matérialisés des entités mentales avec lesquelles les mathématiciens travaillent.*

---

[16] *"What [then] characterizes a concept is the fact that it expresses* an idea, *a general, ideal representation of a class of objects, based on their common features.*
In contrast, an image (we refer here to mental images) is a sensorial *representation of an object or phenomenon...*
In all the actual cognitive theories, concepts and images are considered two basically distinct categories of mental entities."
[17] *"We deal with an ideal world, with ideal meanings. The objects to which we refer – points, sides, angles and the operations with them – have only an ideal existence. They are of a conceptual nature.* At the same time, *they have an* intrinsic *figural nature : only while referring to images one may consider operations like detaching, reversing or superposing.*
As a matter of fact, the triangle to which we refer and its elements cannot be considered either pure concepts or mere common images. The operations mentioned above could not have been performed either with pure concepts or with real objects."

- *Deuxièmement, ce n'est que dans un sens conceptuel qu'on peut considérer la perfection absolue des entités géométriques – lignes droites, cercles, carrés, cubes, etc.*
- *Troisièmement, ces entités géométriques n'ont pas de véritables correspondants matériels. Les points (objets de dimension nulle), les droites (objets de dimension 1), les plans (objets de dimension 2) n'existent pas, ne peuvent exister dans la réalité. Les objets réels de notre expérience pratique sont nécessairement tri-dimensionnels...*
- *Quatrièmement, tous ces concepts sont des représentations générales, comme chaque concept, et jamais des copies mentales d'objets particuliers, concrets...*
- *Mais il y a une cinquième propriété qui caractérise les figures géométriques et qui est également liée à leur nature conceptuelle. Les propriétés des figures géométriques sont imposées par les définitions du domaine d'un certain système axiomatique, ou en découlent. De ce point de vue également une figure géométrique est d'une nature conceptuelle. Un carré n'est pas une image dessinée sur une feuille de papier. C'est une forme contrôlée par sa définition (bien qu'elle puisse être inspirée par un objet réel). Un carré est un rectangle ayant des côtés égaux.... »[18]. [opus cit., pages 140 et 141]*

Malgré ces remarques, il ne situe pas la figure géométrique complètement du côté de l'objet géométrique théorique :

« Une figure géométrique peut alors être décrite comme ayant intrinsèquement des propriétés conceptuelles. Néanmoins, une figure géométrique n'est pas seulement un concept. C'est une image, une image visuelle. Elle possède une propriété que les concepts usuels ne possèdent pas, à savoir, elle inclut la représentation mentale de la propriété spatiale...

---

[18] *" The entities to which we have referred above – points, sides (line segments), angles, the triangle itself, and the operations with them – possess conceptual qualities. In mathematical reasoning one does not refer to them as material objects or as drawings. The material objects –solids or drawings – are only materialized models of the mental entities with which the mathematician deals.*
Secondly, only in a conceptual sense one may consider the absolute perfection of geometrical entities : straight lines, circles, squares, cubes, etc.
Thirdly, these geometrical entities do not have genuine material correspondents. Points (zero-dimensional objects), lines (uni-dimensional objects), planes (bi-dimensional objects) do not exist, cannot exist in reality. The real objects of our practical experience are necessarily tri-dimensional...
Fourth, all these constructs are general *representations, like every concept, and never mental copies of particular, concrete objects...*
But there is a fifth property which characterizes the geometrical figures and which, also, is related to their conceptual nature. The properties of geometrical figures are imposed by, or derived from definitions in the realm of a certain axiomatic system. From this point of view, also, geometrical figure has a conceptual nature. A square is not an image drawn of a sheet of paper. It is a shape controlled by its definition (though it may be inspired by a real object). A square is a rectangle having equal sides... "

Le triangle, le cercle, le carré, le point, la droite, le plan mentionnés dans les exemples ci-dessus et, en général, toutes les figures géométriques représentent des objets mentaux qui possèdent simultanément des propriétés conceptuelles et figurales...

Les objets de recherche et de manipulation dans le raisonnement géométrique sont alors des entités mentales, que nous appelons « concepts figuraux », qui reflètent des propriétés spatiales – forme, position, taille-, et en même temps, possèdent des qualités conceptuelles – comme l'idéalité, l'abstraction, la généralité, la perfection. »[19] *[op. cit., pages 141 et 142]*

[Laborde & Capponi. 1994] analysent ainsi le texte de Fischbein :

« Fischbein distingue aussi l'objet géométrique du dessin représentation matérielle, mais il se place au niveau des constructions mentales élaborées par le sujet, et introduit la notion de figural concept pour rendre compte de la construction mentale manipulée dans un raisonnement géométrique. »

Je retiens de ces extraits de Fischbein que même si on souhaite travailler avec l'OGT, la représentation mentale que l'on s'en fait est liée aux représentations physiques que l'on peut faire, c'est-à-dire aux dessins.

2.5. Figure : définition variable

Voici un autre point de vue sur le mot « figure ».

Puisque manifestement l'objet sur lequel l'élève travaille évolue au fil du temps, de l'apprentissage, de la progression, des tâches,... et puisque l'emploi du mot figure est omniprésent dans toutes les situations en géométrie, peut-être est-ce simplement que c'est ce mot figure qui doit être utilisé pour « objet de la géométrie », objet du travail en géométrie, ...

C'est, me semble-t-il, le point de vue de Kuzniak :

---

[19] *" A geometrical figure may, then, be described as having* intrinsically *conceptual properties. Nevertheless, a geometrical figure is not a mere concept. It is an image, a visual image. It possesses a property which usual concepts do not possess, namely, it includes the mental representation of space property...*
The triangle, the circle, the square, the point, the line, the plane, mentioned in the above examples and, in general, all the geometrical figures represent mental constructs which possess, simultaneously, conceptual and figural properties...
The objects of investigation and manipulation in geometrical reasoning are then mental entities, called by us figural concepts, *which reflect spatial properties (shape, position, magnitude), and at the same time, possess conceptual qualities – like ideality, abstractness, generality, perfection. "*

« Nous posons comme principe que la définition de la figure dépend du paradigme géométrique de référence. » [Kuzniak. 2004]

Cet objet de la géométrie qui évolue au fil du temps et des situations, en fonction ici des paradigmes géométriques (que nous étudierons plus loin) dans lequel l'élève se situe est ainsi appelé figure. La définition de la figure, -ici donc l'objet de la géométrie- n'est pas figée mais dépend du point de vue duquel on se place.

Je ne m'approprierai pas cette définition du mot figure parce qu'il me paraît délicat de manipuler un mot qui change de sens en fonction d'éléments souvent totalement implicites. Dans ce travail de thèse, je vais essayer de déterminer sur des productions d'étudiants de quel point de vue ils se placent, et nous verrons que celui-ci est parfois bien difficile à déterminer.

2.6. Figure : objet géométrique particulier

Voici, avant de proposer mes propres définitions, une dernière acception du mot « figure ».

Prenons quelques extraits du programme de mathématiques de cycle 3 de 2002 , dans le paragraphe « espace et géométrie » :

« L'objectif principal est de permettre aux élèves d'améliorer leur « vision de l'espace » (repérage, orientation), de se familiariser avec quelques figures planes et quelques solides ... Si les compétences attendues en fin de cycle ne concernent que quelques figures et solides, les problèmes proposés portent sur d'autres objets : quadrilatères particuliers tels que le trapèze, le « cerf-volant », le parallélogramme ; solides tels que le prisme, la pyramide, la sphère, le cylindre, le cône.

Les connaissances relatives à l'espace et à la géométrie concernent :

-...

- les figures planes (en particulier : triangle et ses cas particuliers, carré, rectangle, losange, cercle) : reconnaissance, reproduction, construction, description, décomposition d'une figure en figures plus simples

-...

- l'agrandissement et la réduction de figures planes, en lien avec la proportionnalité. » [Prog. école. 2002]

Le mot « figure » désigne ici des objets mathématiques particuliers, par exemple les triangles, carrés, etc., ou des assemblages de ces objets. C'est un des points de vue que l'on retrouve dans le dictionnaire de l'académie française pour le mot « figure » :

« Combinaison d'éléments divers dessinant une forme, s'organisant en un motif. Représentation graphique de lignes, de surfaces, de volumes. Le cercle, le trapèze sont des figures géométriques. » [Académie française. Neuvième édition]

Le point de vue perceptif est ici privilégié.

2.7. Dessin-figure-objet géométrique théorique : synthèse

Lorsque le dessin EST l'objet géométrique étudié, l'objet de travail en géométrie, alors on peut aussi l'appeler figure, peu importe puisque l'on ne manipule qu'un seul type d'objet. Dessin, figure, objet géométrique sont alors des synonymes. C'est le cas en particulier à l'école élémentaire. Lorsque, au contraire, le dessin est un représentant de l'objet géométrique théorique, on a deux objets distincts et il est essentiel d'avoir deux mots ou expressions différents pour les dénommer.

C'est le point de vue que j'adopterai systématiquement dans la suite de cette thèse pour éviter les ambiguïtés, utilisant donc les expressions suivantes telles qu'elles ont été décrites précédemment :

- **Dessin géométrique** d'une part, pour désigner la trace sur la feuille de papier ou l'écran d'ordinateur, les réalités spatio-graphiques pour reprendre la dénomination de Laborde. Ce dessin géométrique peut selon le sujet et la situation être l'objet de la géométrie, j'utiliserai alors l'expression « dessin géométrique Objet » ou un représentant d'un objet géométrique théorique, auquel cas j'utiliserai l'expression « dessin géométrique Représentant ». Parfois, il est difficile de trancher entre ces deux aspects, dans d'autres cas, il n'y a aucune ambiguïté, c'est pourquoi je ne mets pas systématiquement en place deux expressions distinctes et que j'utiliserai parfois seulement l'expression « dessin géométrique », voire seulement « dessin » pour simplifier le langage, étant entendu que les dessins auxquels nous nous intéressons sont au moins des dessins géométriques de niveau 1 (cf. § 1.2, pages 30 et suivantes).
- **Objet géométrique théorique (OGT)** d'autre part, pour représenter l'objet théorique relevant d'une géométrie complètement axiomatisée ou non, lié ou non à un dessin.

Quant au mot **figure**, je l'utiliserai dans un sens proche de celui du paragraphe précédent. Je nommerai « figure plane » une partie du plan, mais considérée aussi bien sous son aspect dessin que sous son aspect OGT. Ceci correspond à la définition que l'on retrouve dans [Bouvier et al.. 1979, page 301] : *« figure dans un espace affine E : partie de E ».* Par exemple, le carré, le triangle, etc. sont des figures planes, mais aussi « un cercle de centre O et un carré de sommet O et dont deux autres sommets appartiennent au cercle », cette figure étant elle-même constituée de deux autres figures (le carré et le cercle).

Ce vocabulaire étant fixé, je vais maintenant étudier un élément central du cadre théorique dans lequel je me place pour mon travail : les différents paradigmes géométriques.

3. Les paradigmes géométriques

Le lecteur aura remarqué que pour définir dessin géométrique ou objet géométrique théorique, j'ai souvent été amenée à ne pas tenir compte seulement de la nature de ces objets, mais aussi des actions que l'on pouvait opérer sur eux. Le concept de paradigme géométrique va permettre de tenir compte de tous les aspects : nature des objets, actions licites sur ces objets, outils d'action sur ces objets.

Je reprendrai pour commencer une définition de paradigme de [Kuhn. 1977] citée par [Kuzniak. 2004, page 32] :

> *« Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet.*
>
> *Dans un deuxième sens, intéressant dans une perspective didactique d'enseignement, il caractérise les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à connaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de ce champ disciplinaire. »*

Pour moi, définir un paradigme va essentiellement consister à expliciter la nature des objets qui sont manipulés, ainsi que la nature des actions effectuées sur ces objets, *« la manière* *correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème »*, pour reprendre la citation précédente.

Quatre paradigmes géométriques sont proposés par Houdement et Kuzniak d'une part, Parzysz d'autre part : G0, G1, G2, G3. Pour Houdement-Kuzniak, le lecteur pourra utilement lire [Houdement & Kuzniak. 1999] ou [Houdement & Kuzniak. 2000] et pour Parzysz, la première et la plus complète présentation à ce jour a été publiée dans [Parzysz. 2001.2]. On pourra également lire [Parzysz. 2001.1]. J'ai fait le choix de citer des extraits un peu long de chacun des articles de référence cités précédemment, afin de pouvoir les analyser, et en faire une synthèse de ce que j'appellerai dans la suite G1 et G2.

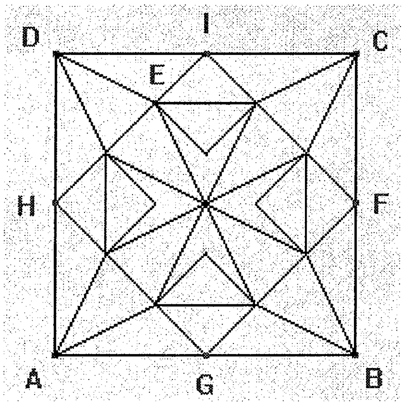
3.1. Les paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak

A la suite de [Gonseth. 1945-1955], Houdement-Kuzniak fondent leurs paradigmes sur intuition, expérience et déduction. Je vais donner ci-dessous des extraits de [Houdement & Kuzniak. 1999] sur chacun de ces points et donner au fur et à mesure quelques remarques et commentaires.

3.1.1. Intuition

> *« L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en termes d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive ...*
>
> *Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus, ... d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel. » [Houdement & Kuzniak. 1999, page 9]*

L'intuition est essentielle, car c'est elle qui va permettre à l'élève de « voir » ce qui était apparemment caché. Considérons par exemple le dessin géométrique ci-dessous[20] :

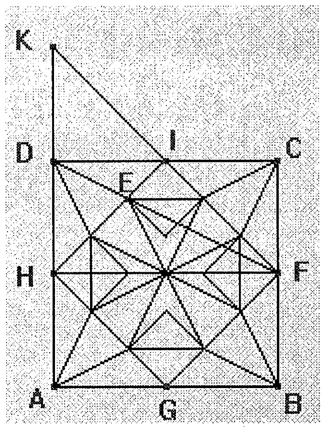


Je l'utilise souvent dans le cadre d'une initiation à l'utilisation de Cabri-Géomètre. Les élèves[21] disposent du dessin de cette figure (faite elle-même avec Cabri) sur une feuille de papier et ils doivent le reproduire avec Cabri-Géomètre de sorte que ABCD soit un carré de 10 cm de côté. Ils tracent le carré ABCD puis le carré FGHI[22], mais ensuite s'arrêtent devant la difficulté de placer des points comme le point E. Ceux qui continuent mesurent la distance IH et la divisent par 3[23] pour positionner le point E. Ils ont donc l'intuition que [IH] est partagé en 3, et effectuent des mesures en conséquence, mais ils ne repèrent pas l'alignement des points D, E et F. Ils n'ont pas **l'intuition de regarder ces trois points**, et ne perçoivent donc pas leur alignement. Des habitudes liées à la mesure sont en place, mais ne le sont pas concernant les alignements de points.

---

[20] d'après le manuel [Le Nouvel Objectif Calcul CM1.1995, p 38]
[21] cette expérience a été réalisée avec plusieurs groupes d'étudiants de licence, y compris de licence de mathématiques. Les comportements sont toujours identiques.
[22] Seuls les points A, B, C et D sont nommés sur leur exemplaire, les autres points ont été ici nommés pour faciliter les explications.
[23]

Ce qui est exact si on considère les hypothèses suivantes :
ABCD est un carré, I, F, G, H sont les milieux des côtés, E est à l'intersection de (IH) et de (DE).
On considère alors le point K tel que D soit le milieu de [HK]. Dans le triangle KHF, on montre alors que (IH) et (DE) sont des médianes, ce qui permet de conclure que E coupe le segment [IH] en vérifiant l'égalité : $IE = \frac{1}{3} IH$.



Contrairement à mes PE1, je postule que l'intuition est développable. Les PE1 se plaignent souvent de n'avoir aucune intuition, considérant le plus souvent que c'est une « qualité » que l'on a ou que l'on n'a pas, et sur laquelle on ne peut rien. Or, je considère comme Houdement-Kuzniak que « *l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences* », et je remplace même volontiers « peut évoluer » par « évolue », car les différentes expériences vont nécessairement avoir une influence sur l'intuition. Il suffit seulement que ces expériences aient lieu. Il faut ainsi proposer aux élèves des expériences variées, pas seulement liées à la mesure, pour développer une « éducation visuelle » qui nourrira l'intuition. C'est me semble-t-il l'objectif du verbe « percevoir » que l'on rencontre souvent dans les instructions officielles de géométrie à l'école, en cycle 2 : *« Percevoir un possible alignement de points ou d'objets », « Percevoir un angle droit »,* comme en cycle 3 : *« Percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie », « Reconnaître de manière perceptive une figure plane, en donner le nom ».* L'intuition permet de faire des expériences qui vont ensuite à leur tour nourrir l'intuition. Peu importe d'ailleurs qu'il y ait ou non une intuition avant toute expérience (est-il d'ailleurs possible de repérer une « première » expérience ?). L'essentiel est que cette intuition puisse être développée. Et ces expériences peuvent, doivent, être suggérées, proposées même par le maître, afin de développer cette intuition. Il est essentiel dans notre exemple que les élèves aient l'idée (l'intuition) que les points peuvent être alignés pour les percevoir alignés (ou non), pour ensuite utiliser les instruments adéquats et vérifier (ou infirmer) l'alignement. Cette compétence de perception est importante à développer à l'école, elle va nourrir l'intuition.

3.1.2. Expérience

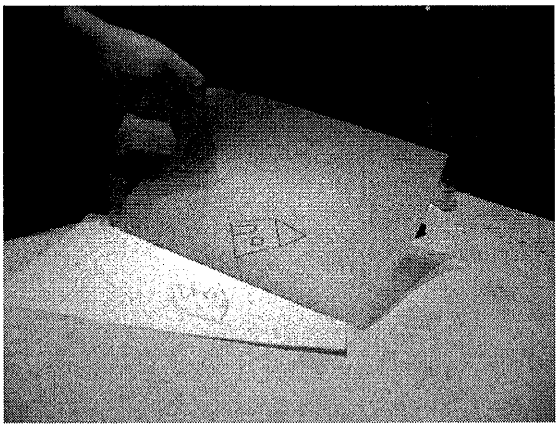
« L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.

Ainsi, dans un premier cas, faire une expérience en géométrie consistera à vérifier matériellement ce que l'on avance. Si le fait que deux points distincts déterminent une seule droite peut s'accepter intuitivement, la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat n'est pas une propriété intuitive (a priori), mais on peut le constater en rapprochant les gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut être *développée dès l'école primaire. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.*

Aux moyens traditionnels, s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels ...

Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, ... , elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement. » [Houdement & Kuzniak. 1999, page 10]

L'expérience peut certes être réalisée effectivement sur les objets physiques, mais elle peut aussi l'être mentalement, sur des objets virtuels[24]. On retrouve là un aspect du concept figural de Fischbein. Cette expérience virtuelle est naturellement présente quand on travaille sur l'objet théorique. Cependant, même quand on travaille sur un dessin géométrique, il est effectivement possible de mettre en œuvre des expériences virtuelles. Dans le travail autour de la symétrie en cycle 3 par exemple, l'élève manipule des objets physiques. La vérification de la présence d'un axe de symétrie se fait par exemple à l'aide du pliage. En fin de cycle 3, on peut attendre de l'élève qu'il effectue ce pliage mentalement, au moins dans des cas simples. Une autre procédure possible pour l'élève est d'utiliser une feuille de papier calque, fixée par un bord sur l'axe de symétrie, de sorte que celui-ci constitue un axe de rotation de la feuille de calque dans l'espace. De même, on espère qu'une telle manipulation va permettre à l'élève de se créer des images mentales qui par la suite pourront être seulement évoquées, et non matériellement réalisées.



[24] Des études ont été faites sur ces expériences mentales, qui montrent entre autres que ces expériences existent effectivement, comme celle de Shepard relatée par [Parzysz. 1989, pages 102-103] :

> *« Entre autres, Shepard a travaillé sur des dessins d'assemblages de cubes, dont il fallait déterminer s'ils étaient ou non identiques, à une rotation près. Il a montré que « la détermination de l'identité des formes (est) comme une sorte de rotation mentale dans l'espace à trois dimensions qui s'effectue avec une vitesse d'environ 60° par seconde ». (SHEPARD 1978) »*

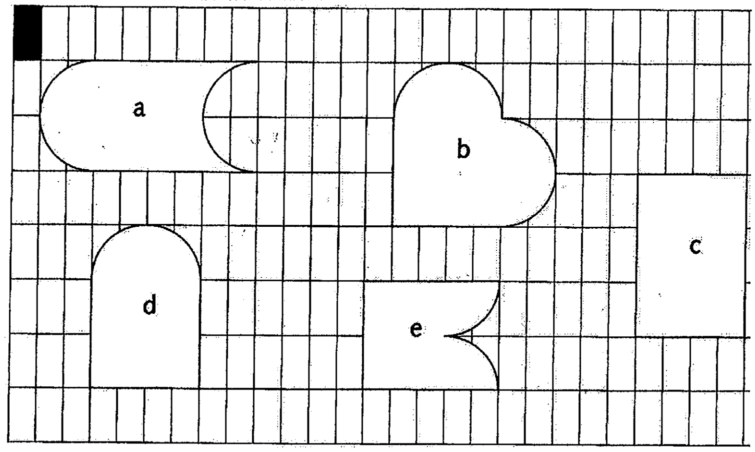
Notons que cette expérience, qu'elle soit physique ou mentale, constitue une grande partie des activités géométriques à l'école élémentaire, comme en témoigne notamment l'utilisation fréquente du verbe « vérifier » dans les compétences de mathématiques de cycle 2 ou 3 (cf. [Appl. Maths C2. 2002, pages 26 à 28 et 31 à 33]).

3.1.3. Déduction

« On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot déduction, mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble. Il peut dans certains cas recouper l'argumentation de R. Duval.

Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions ... » [Houdement & Kuzniak. 1999, pages 10-11]

Il faut distinguer déduction et démonstration. Le terme de déduction est pris dans un sens relativement large, distinct des règles strictes de la démonstration, en particulier au niveau de la rédaction. Cette déduction peut s'effectuer tout naturellement sur les OGT, y compris à l'école élémentaire, comme nous l'avons signalé précédemment avec un exercice de raisonnement sur un dessin à main levée (cf. § 1.4, pages 38 et suivantes). Mais elle peut aussi s'effectuer sur les dessins géométriques Objets. Considérons par exemple l'exercice suivant, extrait de [Cap Maths CM2. 2004, page 59] :

Quelles sont les surfaces qui ont la même aire ? Explique en faisant un schéma.	

Il s'agit bien d'un travail de déduction, qui repose sur une observation – perceptive – d'un dessin géométrique. Il est ainsi intéressant de noter que ce travail de déduction ne commence pas au collège avec « l'apprentissage de la démonstration », mais dès l'école élémentaire.

Ces trois concepts d'intuition, expérience, déduction se retrouvent pour moi dans les différents paradigmes géométriques. Par conséquent, je ferai le choix de les laisser au moins en partie de côté dans la suite au moment d'expliciter ma définition de ces paradigmes.

3.1.4. Définition de GI, GII, GIII

Houdement-Kuzniak définissent ensuite leurs paradigmes géométriques :

> *« Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles ... » [Houdement & Kuzniak. 1999, page 11]*

- *«La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité* (GI) *:*

> *La géométrie naturelle a pour source de validation le monde réel, le sensible. Elle comprend les trois aspects intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. Ce qui posera le problème de sa validité ...*
>
> *Il s'agit ici d'une preuve articulée sur le sensible et non sur la pure déduction logique et abstraite. En ce sens, on peut parler d'une « géométrie expérimentale » ...*
>
> *La construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. » [Houdement & Kuzniak. 2000, pages 97-98]*

- *« La géométrie axiomatique naturelle ou la géométrie comme schéma de la réalité* (GII) *:*

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects « non rigoureux » et les appels à l'intuition cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible ...

Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité » [Houdement & Kuzniak. 1999, pages 12-13]

« ses axiomes correspondent à une modélisation de l'espace local réel. » [Houdement & Kuzniak. 2000, page 98]

- *la géométrie axiomatique formaliste ou l'indépendance de la géométrie et de la réalité (GIII) :*

Cette fois, ... le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. » [Houdement & Kuzniak. 1999, pages 11-13]

Nous pouvons à nouveau faire quelques remarques :

- Un lien peut bien sûr être fait avec les objets que j'ai définis précédemment : dans GI, l'élève travaille sur *« des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments ».* Ces objets matériels sont dans le cas de la géométrie plane nos dessins géométriques Objets. Dans GII, le dessin n'est qu'un représentant de l'OGT, c'est sur l'OGT que l'on travaille.
- Pour Houdement-Kuzniak, l'objet géométrique de GII n'a de sens dans la théorie que parce qu'il est le modèle d'un objet réel. Très clairement, dans ce point de vue, l'objet premier est l'objet réel, l'objet théorique de GII étant un modèle de la réalité. C'est l'OGT objet idéal dont nous avons parlé au paragraphe 1.1. Le statut du dessin dans GII va en être compliqué : c'est le représentant d'un objet géométrique théorique qui est lui-même le modèle d'un objet réel.

3.1.5. Continuité ou rupture

Par ailleurs, Houdement-Kuzniak insistent ici sur l'aspect unificateur, l'évolution continue de la géométrie. Ce qui fait la continuité entre GI et GII, c'est ce lien avec la réalité, d'où le qualificatif de « naturelle » qui est utilisé pour les deux géométries, tandis que le lien entre

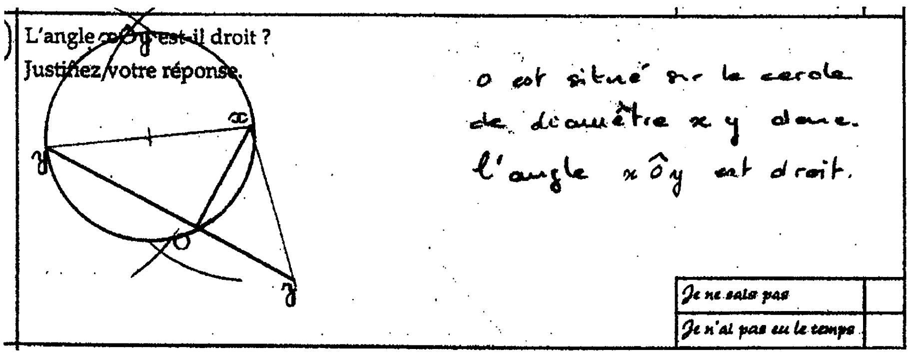
GII et GIII est l'aspect axiomatique. Au contraire, [Parzysz. 2001.2, pages 100-101] considère que :

> *« l'articulation entre G1*[25] *et G2 – de nature épistémique – est plus fondamentale que celle qui sépare G2 et G3... En effet, dans G1, les objets sont encore des éléments physiques idéalisant plus ou moins des situations de la « réalité » (maquette d'une pièce d'habitation, dessin d'un champ...), et la validation reste d'ordre perceptif (instrumenté ou non). Au contraire, dans G2 comme dans G3, les objets en jeu sont des éléments situés hors de la réalité (mais représentés par des objets physiques), la validation des affirmations étant d'ordre déductif : « l'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements » [Berthelot & Salin. 1992, p. 32]. La distinction de G2 par rapport à G1 et à G3 tient alors essentiellement à deux aspects :*
>
> *1° G2 est une modélisation de l'espace « physique » (c'est-à-dire de G1), alors que G3 ne fait plus référence à aucune « réalité » ;*
>
> *2° G2 est en quelque sorte une G3 incomplètement axiomatisée, ou plutôt une géométrie dont les « axiomes » (canoniques ou non) sont partiellement implicites (que ce soit de façon consciente ou non). Plus précisément, G2 s'appuie sur des raisonnements déductifs opérant à partir d'un certain nombre de faits considérés comme « évidents » ; en cela elle est analogue à G3 (version « euclidienne »). Grosso modo, à certains endroits, là où G3 comporterait un axiome, et éventuellement des définitions et des théorèmes qui en découlent, G2 se contente d'un « on voit que » (qui peut même être implicite). La perception est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et non plus –tout au moins en principe- à appuyer une argumentation (même si les « on voit que » contredisent de facto cette remarque). »*

Au contraire de Houdement-Kuzniak qui mettent en évidence l'aspect continuité entre les divers paradigmes, Parzysz insiste sur la rupture entre G1 et G2. S'il y a continuité d'un certain point de vue et rupture d'un autre, il me semble que la rupture est ici plus

[25] J'utilise GI, GII, GIII pour les paradigmes définis par Houdement-Kuzniak, G1, G2, G3 pour ceux définis par Parzysz et affinés par moi-même dans la suite. Ces paradigmes, même s'ils sont très proches, sont en effet légèrement différents comme j'essaie ici de le montrer, et il est donc naturel de garder à chacun sa spécificité, et donc sa notation.

fondamentale que la continuité. Le fait qu'il faille simultanément changer la nature des objets de travail et les types de validation crée en effet une véritable rupture. Celle-ci n'est en général pas maîtrisée par les PE1. Ils ont dans certains cas l'illusion de travailler dans G2 par le fait d'appliquer de nouvelles règles : ils ont, par les nombreuses activités effectuées au collège, « enregistré » qu'il « fallait » démontrer. Mais cette règle ne s'est pas accompagnée pour certains d'entre eux d'un réel changement de conception de l'objet géométrique, il n'y a pas eu construction d'un objet théorique, et il s'agit alors simplement pour eux d'une règle du contrat didactique : « il FAUT démontrer, en utilisant des théorèmes ! ». C'est comme si, pour eux, ce qui faisait la géométrie, c'était la déduction (on applique des théorèmes : si... alors...), sans tenir compte de la nature des prémisses[26]. On retrouve cela dans l'exemple suivant :



où on peut voir que l'étudiant ne se contente pas d'utiliser l'équerre, mais cherche à démontrer, à appliquer un théorème pour conclure, alors que seule la perception lui permettra d'affirmer que O est sur le cercle.

Cette rupture qui repose sur la nature des objets et des validations en jeu est occultée parce qu'elle est masquée par au moins deux phénomènes :

- les dessins d'une part
- le langage d'autre part

sont les mêmes dans G1 et G2, même si le statut des objets a théoriquement changé dans le passage d'un paradigme à l'autre. Nous reviendrons sur ce problème du langage au paragraphe 1.6.2 du chapitre 2 (cf. pages 84 et suivantes).

[26] Il serait intéressant de poursuivre ce travail par un questionnaire ou des entretiens avec les pe1 autour de la question : « qu'est-ce que pour vous la géométrie ? »

3.1.6. Synthèse de Houdement-Kuzniak

Houdement-Kuzniak nous proposent un tableau récapitulatif en conclusion. Voici une version ultérieure plus complète de ce tableau, extraite de [Kuzniak . 2001.2] :

	Géométrie naturelle I	*Géométrie axiomatique naturelle II*	*Géométrie axiomatique formaliste III*
Intuition	*Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience*	*Liée aux figures*	*Interne aux mathématiques*
Expérience	*Liée à l'espace mesurable*	*Schéma de la réalité*	*De type logique*
Déduction	*Proche du réel et liée à l'expérience par la vue*	*Démonstration basée sur des axiomes*	*Démonstration basée sur des axiomes*
Type d'espace	*Espace intuitif et physique*	*Espace physico-géométrique*	*Espace abstrait euclidien*
Statut du dessin	*Objet d'étude et de validation*	*Support du raisonnement et « figural concept »*	*Schéma d'un objet théorique, outil heuristique*
Aspect privilégié	*Evidence et construction*	*Propriétés et démonstrations*	*Démonstration et lien entre les objets*

3.2. Les paradigmes géométriques de Parzysz

Voici maintenant un extrait de [Parzysz. 2001, page 101], où Parzysz définit ses propres paradigmes géométriques :

« En suivant les distinctions faites ci-dessus, nous proposons un essai de synthèse des modèles précédents, comportant en particulier une articulation légèrement différente de celle proposée par Houdement-Kuzniak pour les raisons évoquées plus haut. Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d'une part la nature des objets en jeu (physique vs théorique), d'autre part les modes de validation (perceptif vs logico-déductif). Partant de la « réalité », ou encore du « concret » (G0), qui n'est pas géométrique, nous opposerons

d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes qui sont idéalisées pour constituer le « spatio-graphique » (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au « réel » étant facultative pour la première (mais pas pour la seconde) ; dans le dernier cas, nous parlerons de géométrie proto-axiomatique. La situation peut alors être schématisée par le diagramme ci-après :

	géométries non axiomatiques		*géométries axiomatiques*	
type de géométrie	**« géométrie » concrète (G0)**	**géométrie Spatio-graphique (G1)**	**géométrie Proto-axiomatique(G2)**	**géométrie axiomatique (G3)**
objets	physiques		théoriques	
validations	perceptives		déductives	

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les ruptures de contrat *qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément :*

- *passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...)*
- *passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points ; justification par le perçu*
- *passage de G2 à G3 : propriétés jugées « évidentes » ».*

A nouveau, quelques caractéristiques des différents paradigmes géométriques peuvent être mises en évidence, par comparaison avec le texte de Houdement-Kuzniak.

Tout d'abord, là où l'expérience nourrissait la déduction dans G1 pour Houdement-Kuzniak, ce sont les validations de type perceptif qui prennent le pas pour Parzysz. Dans les deux cas, il s'agit bien essentiellement d'agir matériellement sur les objets réels de G1. Cette action, qu'on l'appelle expérience ou validation de type perceptif, peut être variée : mesure, tracé, découpage, retournement, ...

Par ailleurs, dans G1, on peut valider par la perception avec ou sans instrument : il sera utile plus loin (cf. chapitre 3, § 3, pages 141 et suivantes) de faire le lien avec les instructions officielles de cycle 2 ou de cycle 3 où l'on retrouve les termes percevoir, vérifier et tracer.

Enfin on notera que les deux présentations s'appuient sur des éléments différents : intuition, expérience et déduction pour Houdement-Kuzniak, nature des objets et des types de validation en jeu chez Parzysz.

Chapitre 2

Chapitre 2 : Cadre théorique didactique et problématique

Il est temps maintenant de préciser mon point de vue sur ces paradigmes géométriques. C'est ce que je vais faire dans la première partie de ce chapitre, où je vais notamment définir les paradigmes géométriques G1 et G2 dans l'environnement papier-crayon, tels que je les utiliserai par la suite. Ce paragraphe sera également l'occasion de préciser le concept de « pseudo-paradigme » et de spécifier les paradigmes géométriques par rapport aux constructions et aux définitions géométriques. Des paradigmes géométriques particuliers, G1I et G2I, adaptés à l'environnement informatique lié au logiciel Cabri-Géomètre, seront explicités dans le paragraphe 2. Le cadre théorique étant alors défini, je présenterai ma problématique et ma méthodologie.

1. Définition des paradigmes géométriques retenus

1.1. Définition

Je reprends pour moi la présentation des paradigmes de Parzysz, en particulier le nom de ces géométries, en me centrant également sur la nature des objets manipulés et des validations effectuées, tout en intégrant notamment la nature de l'expérience. Le lecteur retrouvera donc ici de nombreuses expressions utilisées notamment dans [Parzysz. 2001.1] ou [Parzysz. 2001.2], parfois reformulées ou complétées. Je détaille peu G0 et G3 parce que le problème des PE1 va concerner essentiellement G1 et G2. Par ailleurs, je rappelle que je ne m'intéresse qu'à la géométrie plane, étudiée dans le micro-espace. Une extension de la présentation ci-dessous à d'autres situations serait à étudier.

- **G0, « géométrie » concrète**, est quasiment en dehors du champ mathématique, d'où les guillemets. Il s'agit de travailler sur des objets matériels, des situations concrètes. Toutes les caractéristiques des objets sont a priori susceptibles d'être prises en compte (fonction, couleur, orientation, taille, etc.). Notre dessin de niveau 0 est l'objet de travail.

- **G1, géométrique spatio-graphique,** est une géométrie qui est « épurée » par rapport à G0, en ce sens que seuls certaines caractéristiques, dites géométriques, des objets seront retenues, les autres étant considérées comme non pertinentes (par exemple, la couleur des traits). G1 est donc une géométrie où les objets sont certes toujours physiques, mais le regard posé sur eux les a déjà quelque peu abstraits et simplifiés par rapport au réel. Ces objets sont nos dessins géométriques de niveau 1 ou 2, considérés comme objets de la géométrie (dessins géométriques Objets). Ce sont les réalités spatio-graphiques définies par Laborde, d'où le nom de cette géométrie. Les techniques de validation sont de nature perceptive, qu'elles soient ou non instrumentées (gabarit, règle, règle graduée, équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, etc.). Les expériences effectuées sont avant tout réelles, physiques, mais elles peuvent aussi être mentales.
- **G2, géométrie proto-axiomatique,** met en jeu des objets d'une autre nature, non plus physiques mais théoriques. Il s'agit de nos objets géométriques théoriques (OGT), le dessin géométrique n'étant alors qu'un représentant de l'objet théorique (dessin géométrique Représentant). Ces objets théoriques peuvent être considérés comme des objets idéaux (au sens de Platon), des modèles de la réalité, ou comme des éléments d'une théorie géométrique comme la géométrie euclidienne. Ils peuvent être définis par une description discursive ou/et par un dessin, mais alors seules les informations codées sur le dessin peuvent être prises en compte. Ce codage peut d'ailleurs être considéré comme une description discursive particulière. Les validations ne sont plus de type perceptif, elles sont basées sur la théorie, via une argumentation de type hypothético-déductif. Les outils sont cette fois les règles de la logique et les théorèmes de la géométrie affine euclidienne. La règle d'or est : « on ne lit pas une propriété sur le dessin, on la démontre à partir des seules informations discursives (éventuellement codées) données par l'énoncé », même si comme nous l'avons vu précédemment, il y a des entorses à cette règle, explicitées ou non aux élèves (cf. chapitre 1, § 1.5, pages 43 et suivantes). On peut ainsi considérer G2 comme une géométrie dont une partie des axiomes restent (de façon volontaire ou non chez l'enseignant) implicites, d'où le qualificatif de « proto-axiomatique » pour G2. De même, quelques propriétés restent généralement non démontrées[27]. Les démonstrations de G2 s'appuient certes sur les

[27] Quand il s'agit par exemple en quatrième de démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes, on commence par considérer l'intersection de deux d'entre elles, sans démontrer qu'elles sont effectivement sécantes. On pourra consulter [Cinq sur Cinq 4ème. 1998, page 227], [Le nouveau Pythagore 4ème. 1998, page

dessins, mais ceux-ci ne sont plus en principe[28] utilisés que pour établir des conjectures ou contrôler des résultats, pas pour valider une propriété. Ils ont une fonction dans la recherche d'une réponse, pas dans la rédaction définitive de la solution. Par ailleurs, les objets théoriques étant virtuels, les expériences effectuées sur ces objets sont également virtuelles.

- **G3, géométrie axiomatique,** est une théorie complète de type axiomatique. Les objets sont théoriques, ils peuvent être déconnectés de la réalité. Les dessins peuvent être complètement absents, mais s'ils sont utilisés, ça n'est jamais pour valider. Les validations sont de type hypothético-déductif.

1.2. Contrôle de G1 par G2 et de G2 par G1

L' « expert » qui travaille dans G2 utilise également G1 : il fait de nombreux aller-retours entre G1 et G2. Mais à la différence du débutant, il sait à chaque instant s'il est dans G1 ou dans G2 et il est capable de se repositionner dans G2 au moment de rédiger sa solution.
Il utilise G1 pour plusieurs raisons :

- Illustrer la situation géométrique : en faire une image physique pour s'en faire une image mentale.
- Conjecturer : il fait des dessins sur lesquels il mesure, compare, trace, etc. pour conjecturer un résultat.
- Vérifier : si la conclusion d'un raisonnement géométrique le surprend, le retour au dessin et à des techniques de G1 peut lui permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat. Si une contradiction perceptive est relevée sur le dessin (dans G1), il peut rechercher dans G2 l'erreur de démonstration qui l'a produite. De manière générale, il peut vérifier sur le dessin (dans G1) ce qu'il a démontré dans G2. Ainsi, G1 contrôle G2.

Mais G2 contrôle également G1 : les connaissances théoriques peuvent en effet permettre de vérifier la précision d'un tracé. Considérons par exemple la tâche suivante, dans G1 : construire un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm. La connaissance de la réciproque du

---

153], [Décimale 4ème. 1998, page 165], [Triangle 4ème. 1998, page 190], [Nouveau Transmath 4ème. 1998, page 201], [Dimathème 4ème. 1998, page 167] pour s'en convaincre !

[28] à quelques exceptions près comme celle précédemment citée

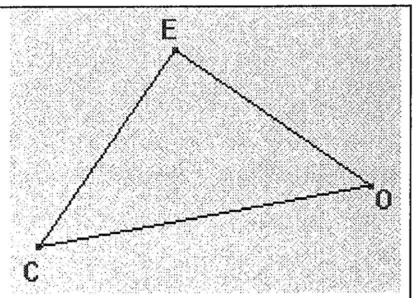
théorème de Pythagore permet d'affirmer que ce triangle est rectangle et peut ainsi permettre de vérifier que le tracé est correct.

1.3. Exemples pour illustrer

Afin d'illustrer ces paradigmes géométriques, utilisons-les pour analyser deux exercices, ou plus exactement leur résolution.

Exercice 1 : Quelle est la nature du triangle ECO ci-contre ?

Exercice 2 : Soit un triangle ABC tel que : AB = 3 cm, BC = 4 cm, AC = 5 cm. Quelle est la nature de ABC ?



Dans l'exercice 1, aucune information n'est donnée concernant le triangle ECO, ni dans le texte, ni sous forme codée sur le dessin. Dans le cadre G2, la question est ainsi sans réponse : sans hypothèse, la « machine » hypothético-déductive ne peut être mise en route. Dans le cadre G1, l'objet considéré est l'objet physique dessiné. Il est possible de prendre une règle pour **mesurer** la longueur des côtés et une équerre pour étudier l'angle en E. ECO peut alors être déclaré triangle rectangle isocèle. Les validations sont bien de type perceptif (mesures instrumentées à la règle ou à l'équerre).
On peut faire de même pour le triangle ABC de l'exercice 2 : le dessiner à partir des longueurs données, puis vérifier avec l'équerre qu'il possède un angle droit en B. On est alors dans le cadre G1. L'objet est physique, la validation perceptive. Mais ce qui est attendu d'un élève de quatrième au collège est d'une autre nature. La réciproque du théorème de Pythagore permet en effet de **démontrer**, à partir des informations fournies par l'énoncé, que le triangle est rectangle en B. Le triangle ABC n'est plus un objet physique, il est un OGT, et la validation est cette fois de type hypothético-déductif. On est alors dans le cadre G2.

Notons que si, dans certains cas, le texte n'indique pas clairement si l'on attend de l'élève qu'il se place dans G1 ou dans G2 (et nous nous sommes appuyés sur cette ambiguïté dans de nombreux items du questionnaire proposé aux étudiants), il est un certain nombre de cas où la règle du jeu est certes implicite, mais néanmoins « claire » pour celui qui a un peu l'habitude de ce type d'énoncé (lorsqu'un dessin est fourni). En effet :

« Dans un problème de géométrie classique, il est usuel que celui qui pose le problème annonce les hypothèses, indiquant ainsi la façon « légale » de lire la figure. Ce faisant, il se libère du dessin et pose implicitement qu'il existe une autre validation que la validation par les sens ; les hypothèses écrites font donc entrer dans le cadre de la géométrie II (ou III). Remarquons que, simultanément, cette écriture des hypothèses dégage du dessin les éléments au moins nécessaires à la construction de la réponse.

Par contre, avec le dessin comme seule hypothèse, on peut dire que le problème est posé dans la géométrie I. Peut alors être considéré comme hypothèse tout ce qui se « lit » sur la figure.

Ainsi la présence ou non d'hypothèses écrites, le choix des hypothèses place implicitement le problème dans un certain paradigme géométrique. »[Houdement-Kuzniak. 1999. p 16].

1.4. Décider entre G1 et G2

J'ai précédemment mis en évidence l'importance de la rupture qui existe entre G1 et G2. Il est donc essentiel de pouvoir décider si telle ou telle situation relève de G1 ou de G2. C'est ce que je viens de faire dans le paragraphe précédent, dans deux situations simples. Elles ont été choisies pour que la conclusion soit évidente. Je pourrais m'en tenir là et laisser croire qu'il sera ainsi toujours simple de décider si une production relève de G1 ou de G2.

Mais rappelons l'hypothèse de recherche que j'ai posée au chapitre 1, paragraphe 1.5:

HR1 : Face à un dessin géométrique, les Pe1 « naviguent » entre trois points de vue, sans en être conscients :

- dessin géométrique de niveau 2 objet géométrique (dessin N2 Objet)
- ou dessin géométrique de niveau 2 représentant un objet géométrique théorique (dessin N2 Représentant)
- ou encore objet théorique géométrique représenté par un dessin géométrique

Je reformulerai précisément cette hypothèse à partir des paradigmes G1 et G2 à la fin de ce chapitre mais on peut d'ores et déjà considérer que « naviguer » entre ces trois points de vue revient à « naviguer » entre G1 et G2. Si les paradigmes G1 et G2 sont clairement identifiés, si l'« expert » en géométrie sait exactement à chaque instant dans quel paradigme il se situe, l'étudiant lambda, lui, est dans une situation infiniment plus floue, « naviguant » entre G1 et G2 sans en être le plus souvent conscient.

Cette hypothèse suggère alors qu'il n'est pas toujours aussi simple de distinguer entre G1 et G2, en particulier lorsqu'on analyse les productions des PE1.

Dans ma définition des paradigmes G1 et G2, deux questions apparaissent clairement pour distinguer si l'on travaille dans G1 ou dans G2 :

- Quelle est la nature des objets en jeu ? En particulier, le dessin est-il l'**objet** de la géométrie – auquel cas, on est dans G1– ou un **représentant** d'un objet géométrique théorique – auquel cas on est dans G2 – ?
- Quelle est la nature des validations effectuées : perceptives – auquel cas, on est dans G1 – ou déductives – auquel cas on est dans G2 – ?

Une difficulté majeure se pose apparemment : que se passe-t-il quand la réponse à ces deux questions n'aboutit pas à la même conclusion ?

1.4.1. L'action détermine généralement la nature de l'objet géométrique

En fait, la réponse à la première question est généralement liée à la réponse à la deuxième. Il est en effet difficile, voire impossible, d'accéder directement à la conception que l'étudiant se fait du dessin géométrique. Une conception est un objet abstrait, invisible, inobservable directement. Seuls ses effets sont observables. Ce sont donc les actions que l'étudiant effectue sur le dessin qui nous informent sur ses conceptions. C'est en analysant les actions de l'étudiant sur le dessin que nous pouvons en déduire bien sûr d'une part la nature des validations effectuées (nature des actions), mais également le statut qu'il attribue au dessin géométrique (à tel moment de l'activité, mais pas forcément à un autre) : Objet ou Représentant.

Par exemple, si la validation à partir du dessin géométrique est de type perceptif et que l'étudiant conclut, c'est que le dessin est considéré comme objet de la géométrie. Si par contre il n'y a aucun élément pris en compte de manière perceptive, c'est-à-dire que toutes les déductions sont faites à partir d'hypothèses énoncées dans le sujet ou démontrées préalablement, sans aucun recours à des mesures, à des vérifications perceptives (instrumentées ou non), alors on considèrera en général que l'étudiant travaille dans G2 et que le dessin est pour lui un représentant d'un objet théorique. C'est ce que j'ai fait dans les « exemples pour illustrer ». Il s'agit bien d'une « considération », autrement dit d'une décision subjective, dans la mesure où on ne peut affirmer que c'est bien de cela dont il s'agit.

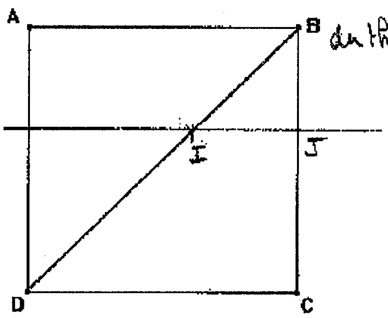
J'ai en effet montré au paragraphe 1.4 du chapitre 1 (cf. pages 38 et suivantes) que dans certaines situations, on ne peut savoir si l'élève travaille sur un dessin géométrique Objet ou Représentant. Si des considérations d'ordre perceptif interviennent, alors on peut sans ambiguïté conclure G1, mais dans le cas contraire, on n'a parfois rien qui permette d'être sûr.

1.4.2. Cas de plusieurs actions

Ceci suppose néanmoins qu'il n'y ait qu'une action qui soit effectuée, ou, s'il y en a plusieurs, qu'elles relèvent toutes du même paradigme. Or, ce n'est pas toujours le cas. Considérons le cas de Julie :

ABCD est un carré de côté 5 cm.
Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm.
Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?

(IJ) // (DC) car d'après la réciproque du théorème de Thalès si.



$\frac{BI}{BD} = \frac{BJ}{BC}$ alors (IJ) // (DC)

$\frac{2,8}{7} = 0,4$ / $\frac{2}{5} = 0,4$

Cette étudiante applique la réciproque du théorème de Thalès, elle travaille donc dans G2, mais les hypothèses qu'elle utilise ne sont pas toutes données par l'énoncé ou démontrées : $BD = 7\,\text{cm}$ ne peut qu'être le résultat d'une mesure (dans G1). La valeur exacte est en effet donnée par le théorème de Pythagore : $BD = 5 \times \sqrt{2}$, d'où : $BD \simeq 7,071\,\text{cm}$. Julie effectue donc deux actions :

- Mesurer la longueur BD, qui relève de G1
- Appliquer la réciproque du théorème de Thalès, qui relève de G2

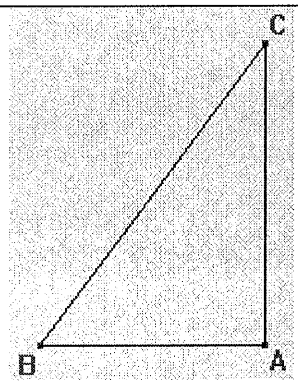
Elle travaille donc dans une géométrie qui tient à la fois de G1 et de G2. Néanmoins, le fait qu'elle effectue une mesure met en évidence sa conception de la nature du dessin géométrique sur lequel elle travaille : ce dessin est l'Objet sur lequel elle travaille. Par conséquent, on peut considérer qu'elle se situe avant tout dans G1, même si elle utilise en plus des théorèmes qui relèvent de G2.

Je donne ici plus de poids à l'une des actions (mesurer, qui relève de G1) qu'à l'autre (appliquer un théorème qui relève de G2) parce que la première nous informe mieux que la seconde sur la nature des objets manipulés. Comme je l'ai déjà indiqué, faire une mesure sur le dessin signifie nécessairement que le dessin est considéré (au moins implicitement) comme l'Objet géométrique de travail tandis qu'appliquer un théorème ne permet pas d'affirmer que le dessin est considéré comme Représentant d'un OGT.

1.4.3. Même dans G1, il faut déduire pour conclure

Par ailleurs, même dans des situations apparemment beaucoup plus simples, il y a souvent plusieurs actions. Considérons une situation où la validation est de type perceptif et où l'étudiant conclut. Elle devrait ne relever que de G1. Des déductions relevant de paradigmes différents peuvent cependant intervenir. Prenons deux exemples pour éclairer ce propos. Considérons la question suivante :

Le triangle ABC ci-contre est-il rectangle ?



Charles prend son équerre, vérifie que l'angle en A est droit et conclut que ABC est rectangle. Pierre prend sa règle graduée, mesure les côtés du triangle : 3 cm, 4 cm, 5 cm et conclut que le triangle ABC est rectangle.

Dans les deux cas, la prise d'informations sur la figure est de nature perceptive et l'élève conclut. Cependant, Pierre n'utilise pas que la mesure pour conclure, il utilise également la réciproque du théorème de Pythagore. Conformément à l'analyse qui a été faite précédemment pour Julie, je considère que Pierre se situe avant tout dans G1, parce qu'il mesure sur le dessin et considère donc celui-ci comme l'Objet géométrique sur lequel il travaille, tout en utilisant une technologie[29] de G2.

Cette interprétation consiste à repérer :

- L'action déterminante du point de vue de la nature des objets en jeu.
- Les autres actions.

---

[29] le langage ici utilisé est celui de Chevallard. Il sera détaillé un peu plus loin, chapitre 3, § 2.

Analysons maintenant la production de Charles. Comment conclut-il ? Il applique la propriété : ABC possède un angle droit donc il est rectangle. Cette déduction résulte de la simple application d'une définition, et est considérée comme relevant de G1. Il existe donc des propriétés qui relèvent de G1 (tout en relevant simultanément de G2) et d'autres qui relèvent seulement de G2. Un nouveau problème se présente donc : comment savoir si une propriété relève de G1 et de G2 (un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit relève aussi bien de G1 que de G2) ou seulement de G2 ?

1.4.4. La distinction définition / propriété n'est pas ici efficace

On aurait pu décider que si on applique seulement une définition (cas de Charles), on se situe dans G1, et que si on applique une propriété ou un théorème (cas de Pierre), on se situe dans G2. Mais les concepts de définition et de propriété sont relatifs à un choix d'organisation des connaissances. La médiatrice de A et B est entre autres :

- l'axe de symétrie de A et B
- la droite perpendiculaire au segment [AB] passant par son milieu
- l'ensemble des points équidistants de A et B
- la droite passant par deux points équidistants de A et B
- la droite coupant le plan en deux demi-plans contenant l'un les points qui sont plus proches de A que de B et l'autre les points qui sont plus proches de B que de A.

L'enseignant de sixième choisira l'une de ces propositions (généralement l'une des deux premières) comme définition et certaines autres comme propriétés. Ainsi, la distinction définition / propriété ne suffit pas pour distinguer les déductions qui relèvent de G1 et celles qui relèvent de G2. Cependant, au niveau de l'école élémentaire, ce problème sera relativement rare, et on saura en général repérer l'application d'une simple définition.

1.4.5. Comment savoir si une propriété relève de G1 ?

La question se pose néanmoins de nouveau : comment savoir si une propriété relève à la fois de G1 et de G2 ou seulement de G2 ? Prenons un autre exemple. Un rectangle ABCD est tracé précisément à la règle et à l'équerre et est proposé aux élèves. Le maître demande de vérifier si c'est un rectangle. Marie vérifie avec son équerre que trois angles sont droits et conclut qu'il s'agit bien d'un rectangle. Elle applique la propriété « un quadrilatère possédant trois angles droits est un rectangle ». Cette propriété est-elle une propriété de G1 ?

Je considèrerai dans la suite, de manière arbitraire, que, « grosso-modo », les propriétés de G1 sont celles de l'école élémentaire, les propriétés étudiées au collège relevant en général de G2.

Revenons alors à Marie. Se situe-t-elle entièrement dans G1 comme Charles? ou dans G1 et G2 comme Pierre ? A un moment donné elle utilise la perception, et se situe donc dans G1. Dans le cas présent, je décide de conclure seulement qu'elle se situe dans G1, acceptant ainsi le fait que la propriété utilisée relève de G1 et peut être utilisée à l'école[30]. Il y a là une décision arbitraire que je ne cherche pas à cacher.

Pour Pierre, j'ai pris l'interprétation « G1 et G2 », mais j'insiste à nouveau sur le fait qu'il travaille avant tout dans G1 car c'est surtout la nature des hypothèses utilisées dans la déduction qui est déterminante.

Ainsi, appliquer la réciproque du théorème de Pythagore sera du domaine G2 si les dimensions du triangle considéré ont été données par une information dans l'énoncé (description discursive définissant l'OGT), ou démontrées (dans G2) précédemment, mais cette même application relèvera de G1 et de G2 si les longueurs sont simplement mesurées sur le dessin.

1.4.6. Technologie de G2 mais technique de G1

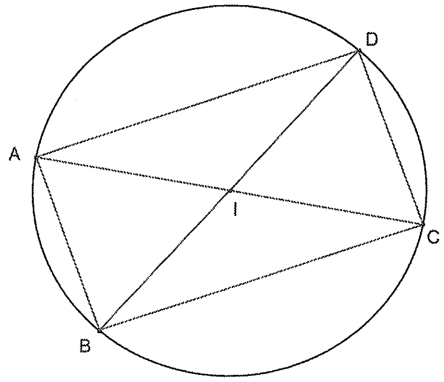
Mais l'utilisation d'une technologie de G2 peut être totalement implicite pour l'élève et ne relever que d'une technique de G1. Reprenons l'exemple précédent : un rectangle ABCD est tracé précisément à la règle et à l'équerre et proposé aux élèves. Le maître demande de vérifier si c'est un rectangle.

---

[30] Elle est parfaitement conforme aux instructions officielles de l'école :

> *« Les triangles et quadrilatères particuliers figurant au programme sont reconnus à partir de propriétés relatives aux longueurs des côtés, au parallélisme ou à la perpendicularité. » [Appl. Maths C3. 2002, page 32]*

David utilise une nouvelle procédure : il trace l'intersection des diagonales du quadrilatère, un cercle de centre cette intersection, et passant par un des sommets de ABCD. Il vérifie alors que les trois autres côtés sont sur le cercle et conclut qu'il s'agit bien d'un rectangle.



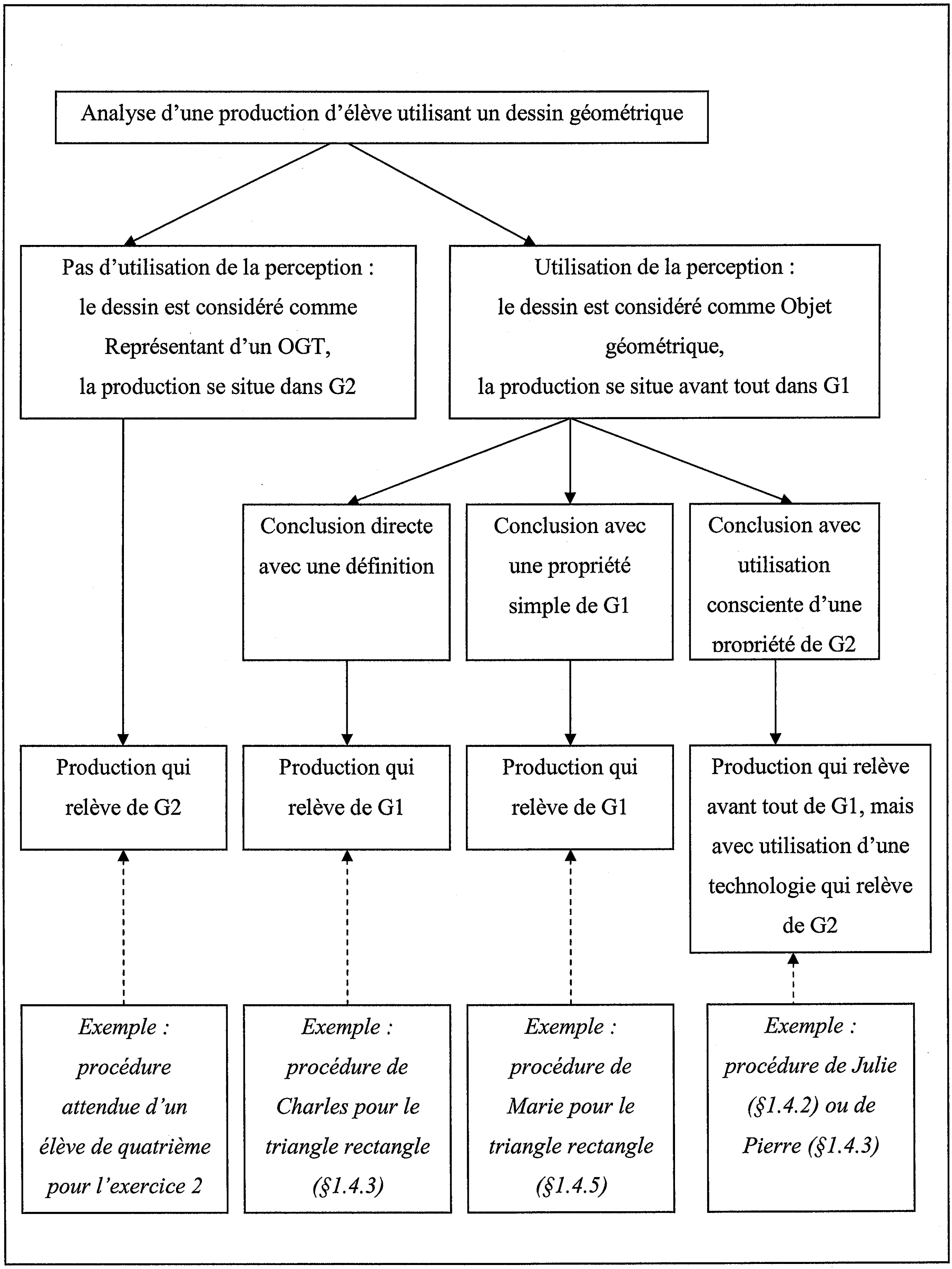
Des théorèmes de G2 permettent de justifier cette procédure. Mais pour affirmer que David se situe dans G1 (puisqu'il utilise la perception) et aussi dans G2, il faut s'assurer que David connaît ces théorèmes et a conscience de les utiliser ; il peut en effet appliquer simplement une technique sans connaître les propriétés qui la justifient, et se situer alors uniquement dans G2.

1.4.7. Synthèse, pour décider entre G1 et G2

Pour conclure, on peut résumer ainsi les différentes interprétations possibles :

- Lorsque l'étudiant n'utilise pas la perception, mais seulement les données de l'énoncé et des théorèmes de géométrie euclidienne, on conclura qu'il travaille dans G2 (même si on ne peut pas toujours affirmer que l'objet sur lequel il travaille est bien un OGT et non un dessin géométrique Objet)
- Lorsque l'étudiant utilise la perception et une déduction élémentaire consistant en l'application d'une définition, on conclura que l'élève se situe dans G1.
- Lorsque l'étudiant utilise la perception et des déductions élémentaires consistant en l'application de propriétés qui relèvent de l'école élémentaire, on conclura que l'étudiant se situe dans G1
- Lorsque l'étudiant utilise la perception et de manière consciente des déductions qui relèvent habituellement de l'enseignement du collège (telles que l'utilisation de théorèmes de géométrie tels que ceux de Pythagore, de Thalès, de la somme des angles dans un triangle, de l'angle inscrit et de l'angle au centre dans un cercle, etc.), alors on conclura que l'étudiant se situe avant tout dans G1, tout en utilisant une (ou des) technologie(s) relevant de G2.

On peut schématiser ces règles avec l'arborescence suivante :



1.5. Pseudo-paradigme

L'analyse de certaines productions d'étudiants a mis en évidence que parfois, ils ne travaillent pas vraiment dans G1 ni dans G2, mais dans « quelque chose » qui tient de G1 mais aussi de G2 (cas de Julie ou Pierre). Ce « quelque chose » n'est pas à proprement parler un paradigme, en particulier parce qu'il n'est pas cohérent ; il peut par exemple mélanger des actions perceptives (prendre des mesures) à d'autres de type hypothético-déductif (appliquer le théorème de Thalès) et conduire à des réponses différentes selon les élèves. Je nommerai « pseudo-paradigme » ce « quelque chose » qui ressemble aux paradigmes qui ont été définis, mais qui n'en est pas vraiment un. **Le but de ce travail de thèse est en partie d'expliciter les pseudo-paradigmes dans lesquels fonctionnent les PE1.**

Afin de mieux préciser encore les paradigmes G1 et G2, je vais m'intéresser à deux actions qui ont une importance toute particulière en géométrie : construire et définir.

1.6. Une action particulière : construire

Si l'on reprend le vocabulaire de l'école, la géométrie consiste à : *« comparer, reproduire, décrire, construire, représenter des objets géométriques (figures planes, solides) ou des assemblages d'objets. »* [Appl. Maths C3. 2002]. Parmi toutes ces actions, l'une d'entre elles va particulièrement nous intéresser : la construction. De quoi s'agit-il ? La réponse va dépendre du paradigme dans lequel on se situe. Précisons avant tout que nous prenons ici le mot construction au sens d'*action* de construire, et non pas comme le *résultat* de l'action.

1.6.1. Qu'est-ce qu'une construction, dans les paradigmes G1 et G2 ?

Dans le paradigme	G1	G2
Une construction est	la réalisation effective d'un objet de G1	l'élaboration d'une procédure d'obtention d'un objet de G2
Une construction se fait	avec des instruments	sous contraintes

Dans [Espace et géométrie au cycle 2, 2005], on peut lire :

*« **Construire** un objet, c'est le produire à partir d'un texte descriptif ou prescriptif, à partir d'un schéma éclairé ou non par du texte, des codages. »*

Dans G1, une construction est donc la production, la réalisation effective d'un objet physique. Dans le cadre de la géométrie plane, il s'agit ainsi d'un tracé sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur à l'aide d'instruments de dessin qui sont en général spécifiés. Pour ce qui est de l'environnement papier-crayon, les instruments habituellement utilisés, à l'école élémentaire comme dans l'enseignement secondaire sont bien sûr la règle, graduée ou non graduée, le compas, l'équerre et éventuellement le rapporteur (nous pouvons encore en ajouter d'autres, comme par exemple la règle à bords parallèles ou le « guide âne » pour tracer des parallèles, les réseaux pointés, le papier quadrillé, etc.). Pour l'environnement informatique, les « instruments » sont les objets que permet de tracer le logiciel utilisé, les primitives de base. Dans un cas comme dans l'autre, l'enseignant a la possibilité de limiter les instruments dont l'usage est autorisé ; ainsi, le cas le plus fréquent est l'association de la règle (non graduée) et du compas, issue de la tradition grecque[31]. La réponse à la consigne « Construire

---

[31] [Carrega. 1989, pages 4-6] expose *« les raisons qui ont conduit les mathématiciens grecs à privilégier dans leurs études la règle et le compas.*

1. *... Les courbes les plus simples qui interviennent en géométrie sont la droite et le cercle et les instruments les plus simples pour les construire sont la règle et le compas...*
2. *Il faut aussi évoquer au quatrième siècle avant J.C. l'influence de Platon (423-348) et de son école l'Académie.... Platon a ... peu d'estime pour les instruments de mesure ou de construction nécessairement imparfaits. Il fait toutefois une exception pour la règle et le compas qui sont les seuls, à ses yeux, à pouvoir respecter la symétrie des configurations. L'influence de Platon ... se retrouve chez Euclide qui dans ses Eléments ne s'écarte pas des prescriptions du philosophe.*
3. *[Chez Euclide,] ... la faiblesse de certaines définitions de base, comme celles de droite ou d'angle, nécessitait au cours d'une démonstration le secours d'une figure bien faite. ... Pour convaincre, une démonstration devait être accompagnée d'une figure claire effectuée à l'aide d'instruments simples connus et admis par tous.*
4. *... nous évoquons ici la recherche du statut de nombre. ... On peut ... penser, mais ceci n'est qu'une hypothèse, que les constructions à la règle et au compas ont été mises en avant pour servir de caution*

… » consiste, dans G1, à produire un tracé, un dessin géométrique. La réalisation de ce tracé nécessite bien sûr la mise en œuvre d'une suite de gestes, qui selon le cas peut –ou non– faire l'objet d'une description.

Dans G2, une construction consiste en une suite de propositions permettant de déterminer[32], sous certaines contraintes fixées, un objet de la théorie à partir d'autres objets, qui sont donnés. Les contraintes peuvent être de ne faire intervenir que des types d'objets de G2 déterminés (par exemple, des droites et/ou des cercles[33]), de ne pas avoir recours à certains types de mesures (distances, angles), etc. Le discours sera quasiment toujours accompagné d'un dessin (qui sera un représentant de l'objet théorique). On trouve cette définition dans le sujet d'algèbre et géométrie du CAPES externe 2005[34] (épreuve annulée) :

> *« Dans ce problème, on demande plusieurs fois de proposer une construction géométrique d'une figure ou d'un élément d'une figure. Ceci signifie que l'on demande une suite d'instructions permettant de réaliser de façon théorique cette figure ou cet élément à l'aide de la règle et du compas. On réalisera effectivement cette construction dans une figure[35]. »*

Compte-tenu de la nature de cette épreuve, on peut considérer qu'il s'agit là d'une définition d'une construction dans G2. L'aspect G2 est d'ailleurs exprimé par l'expression « de façon théorique » : c'est bien aux OGT qu'on s'intéresse d'abord, pas aux dessins. Ainsi, la règle et le compas dont il est question signifient qu'il s'agit de n'utiliser que des droites (ou des segments, ou des demi-droites) et des cercles (ou des arcs de cercle), en tant qu'objets de G2.

---

géométrique aux nouveaux nombres mis en évidence par le théorème de Pythagore. De plus, en s'interdisant d'autres types de construction on se préservait contre de nouvelles crises. »

[32] « Déterminer » signifie ici assurer l'existence et l'unicité de l'objet devant être obtenu ou, le cas échéant, et si la demande en est faite, indiquer le nombre d'objets répondant aux conditions qui peuvent être ainsi obtenus.

[33] L'exemple des constructions à la rège et au compas est classique. On peut ainsi lire dans [Bouvier & al., 1979, page 168] : « *Un problème de construction à la règle et au compas revient à déterminer une suite finie* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *de points du plan où chaque* M_i *pour* $i \geq 3$ *est l'intersection de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle obtenus à partir de* $M_1, M_2, \dots, M_{i-1}$ *par l'une des deux constructions élémentaires suivantes :*

- *tracer une droite passant par* M_j *et* M_k *avec* $j < k \leq i-1$ *;*
- *tracer un cercle de centre* M_j *et de rayon* M_hM_k *avec* $j, h, k \leq i-1$. »

On trouvera également dans [Carrega.1989, p. 14-15] une définition équivalente des points constructibles à la règle et au compas. Les grands problèmes de points constructibles ou non à la règle et au compas sont par ailleurs étudiés dans cet ouvrage.

[34] sujet disponible sur le net à l'adresse :
http://www.ilemaths.net/maths-fiche-telecharge.php?fiche=maths-capes-sujet-2005-A

[35] Si l'on considère qu'une construction est un objet de G2 et, comme c'est souvent le cas dans la communauté des mathématiciens, qu'une figure est un objet théorique, par opposition au dessin, l'expression « on réalisera effectivement cette construction dans une figure » ne dit pas vraiment que l'on attend une trace papier. Tout le monde cependant (sauf peut-être quelques surveillants !) l'interprète ainsi.

Néanmoins, un dessin géométrique représentant l'OGT est demandé. C'est là une particularité des exercices de constructions dans G2 : ils sont généralement accompagnés de la production effective d'un dessin représentant la construction. Ce dessin sera souvent lui-même appelé « construction ». Il y a ainsi souvent confusion entre l'objet de G2 et sa représentation physique.

1.6.2. Des actions différentes avec un langage commun

On pourrait par exemple poser, dans G2, le problème suivant : « Comment obtenir la médiatrice de deux points distincts A et B donnés en n'utilisant que des droites et des cercles ? ». Mais la formulation la plus fréquente de ce problème –elle est même quasi-exclusive– est du type : « Tracer la médiatrice de deux points distincts A et B donnés à la règle et au compas ». L'expression « à la règle et au compas » apparaît ainsi comme une métaphore de contrainte. En effet, si on travaille dans G2, on ne va pas effectivement utiliser une règle et un compas, mais définir des cercles et des droites qui doivent par des intersections successives, permettre de déterminer deux points sur la médiatrice. Le langage utilisé pour poser le problème dans G2 est directement emprunté à celui de G1.

Mais il n'y a pas que les contraintes (c'est-à-dire l'énoncé) qui sont exprimées dans G2 avec des métaphores issues du langage de G1 ; c'est également le cas des constructions elles-mêmes (c'est-à-dire de la solution). Explicitons cet aspect en reprenant le même exemple.

Considérons le problème énoncé précédemment. Voici deux formulations possibles de la construction de la médiatrice de A et B dans G2.

Formulation 1 :	*Justification*
Soit C_1 le cercle de centre A passant par B.	*C_1 existe et est parfaitement déterminé par son centre A et son rayon AB*
Soit C_2 le cercle de centre B passant par A.	*de même, C_2 existe et est parfaitement déterminé*
Soient I et J les intersections de C_1 et C_2	*La distance entre les deux centres est AB, la différence des rayons des cercles est nulle, la somme des rayons des cercles vaut 2AB. Or : $0 < \mathrm{AB} < 2\mathrm{AB}$, donc les cercles sont sécants en deux points distincts.*
(IJ) est la médiatrice de [AB]	*I et J sont à égale distance de A et de B, ils sont donc sur la*

	médiatrice de [AB]. *Or cette médiatrice est une droite.* *Donc (IJ) est la médiatrice de [AB]*

Cette liste d'assertions (colonne « formulation ») peut être considérée comme une construction dans G2. Elle peut (doit) être complétée par une justification (colonne « justification ») de chacun des items par des définitions, axiomes, théorèmes de la géométrie euclidienne. Cette formulation n'est évidemment pas unique, et de nombreuses autres sont également acceptables. Mais cependant la forme proposée ici n'est guère habituelle. La formulation suivante l'est beaucoup plus :

Formulation 2 :
Tracer un cercle de centre A passant par B
Tracer un cercle de centre B passant par A
Ces deux cercles se coupent en deux points distincts I et J
Tracer la droite (IJ), qui est la médiatrice de [AB].
La justification de la formulation 2 est identique à la précédente.
Le langage utilisé ici est celui de l'action, du geste physique, du mouvement. C'est celui que l'on retrouve dans [Bouvier & al., 1979, p 168] cité précédemment avec l'expression « tracer ... ». Ce langage est spontanément utilisé parce qu'il est le langage naturel de la construction effective dans G1. Utiliser le langage de l'action, c'est ainsi transporter, métaphoriquement, le problème de G2 dans G1. Là encore, de la même manière que l'expert qui travaille sur un dessin géométrique est conscient que ce n'est qu'une représentation de l'objet théorique, il est conscient que la métaphore se prolonge aux actions. Mais c'est loin d'être toujours le cas pour les élèves ; pour beaucoup d'entre eux, cette métaphore ne sera pas perçue comme telle et va se dresser en obstacle : ils vont se situer au niveau du tracé. En effet, de la même manière que, pour l'élève de l'école élémentaire (dans G1), le dessin géométrique n'est pas un dessin Représentant de l'OGT mais un dessin Objet, la liste d'actions ci-dessus, considérée dans G1, ne lui apparaît pas comme une métaphore (une action « virtuelle »), mais constitue une liste de gestes à effectuer physiquement.
J'ai étudié là une construction élémentaire (construction de la médiatrice), mais le langage utilisé dans un corrigé du sujet de CAPES précédemment cité est de même nature. La première question de construction de ce sujet est :

« Partie II : Construction d'une Π *-droite.*

Dans cette partie, C est un cercle de centre O et de rayon R, et Π *le disque ouvert limité par C et A et B sont deux points distincts de* Π. ...

2. On suppose que A et B ne sont pas situés sur un même diamètre et que OA = OB. Montrer dans ce cas l'existence et l'unicité d'un cercle Γ *qui passe par A et B et qui rencontre C en deux points diamétralement opposés. Proposer une construction géométrique de ce cercle. »*

Le corrigé[36] proposé par l'auteur[37] du sujet utilise à nouveau un langage de G1 :

« Pour construire géométriquement ce cercle, on trace la parallèle à (AB) qui passe par O, on appelle T1 et T2 les intersections de ce diamètre avec C puis on trace le cercle circonscrit au triangle ABT1 (son centre est à l'intersection des médiatrices de [AB] et de [AT1], par exemple). »

Prenons un autre exemple, extrait de [Carrega.1989, p 8-9], concernant la trisection d'un segment :

« Pour trisecter le segment AB, il suffit de considérer une droite quelconque D passant par A, de porter sur D 3 segments égaux AM_1, M_1M_2, M_2M_3, *de joindre* M_3 *à B et de mener par* M_1 *et* M_2 *les parallèles à* BM_3. *»*

A nouveau, le langage utilisé pour décrire la construction est un langage de l'action, proche de celui utilisé dans G1.

Par ailleurs, dans le tableau « formulation 1 » ci-dessus, j'ai énoncé une construction (formulation) puis je l'ai justifiée (justification). Cette justification fait appel aux définitions, propriétés, théorèmes de G2. Ainsi, G2 intervient pour justifier les constructions, que celles-ci soient considérées dans G1 ou dans G2. En effet, pour les PE1 en particulier, les mêmes propriétés, qui en général relèvent de G2, permettent de justifier les deux types de construction, même si, comme nous le verrons plus loin, d'autres théories s'intéressent aux constructions de G1. Mais celles-ci ne sont pas étudiées dans la scolarité obligatoire, et donc totalement indisponibles pour les PE1.

---

[36] corrigé disponible sur le net à l'adresse :
http://www.ilemaths.net/maths-fiche-telecharge.php?fiche=maths-capes-sujet-2005-A-correction
[37] Bruno Aebisher, professeur agrégé de mathématiques, si on se fie aux informations du site ci-dessus.

Ainsi, on a bien deux types de constructions,

- l'une dans G1, qui vise à produire un **dessin** Objet géométrique et *éventuellement* un texte décrivant les étapes d'obtention de ce dessin,
- l'autre dans G2, qui vise à produire un **texte** définissant un OGT et *éventuellement* un dessin Représentant cet OGT,

mais

- la consigne pour obtenir ces constructions est la même : « construire à la règle et au compas… »
- le langage utilisé dans ces deux textes est le même : « tracer … »
- les justifications des actions effectuées sont habituellement les mêmes
- le dessin produit est également le même,

ce qui entretient bien évidemment la confusion.

1.6.3. D'autres théories possibles

La géométrie euclidienne de G2 n'est pas, je l'ai dit, la seule théorie des constructions de G1. Le point de vue de la géométrie euclidienne de G2 est celui de la « constructibilité ». Il s'agit de travailler sur les OGT et de s'assurer, au moyen des règles hypothético-déductives de validation de G2, que les objets définis au fur et à mesure de la construction existent, sont définis de manière unique, et vérifient bien les propriétés annoncées.
D'autres points de vue sont possibles, qui s'intéressent directement aux réalités spatio-graphiques sur la feuille de papier, i.e. aux objets de G1. [Houdement & Kuzniak. 2002] présentent en effet d'autres travaux qui étudient ces constructions.
Prenons pour commencer les travaux de Lemoine[38]. Le premier article où Lemoine présente la géométrographie, sans encore à ce moment-là utiliser ce terme, est publié dans la seconde partie des comptes rendus de la 17ème session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, en 1888 (à Oran). Il y écrit :

« Une vérité mathématique, une proposition prise en soi, n'est ni simple ni compliquée ; elle est. Ce qui nous la fait paraître simple ou compliquée, c'est le chemin que notre esprit

[38] Certains textes de Lemoine sont disponibles en version numérisée sur le site http://gallica.bnf.fr/ (notamment les Comptes rendus de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, ou son ouvrage « Géométrographie ou Art des constructions géométriques »), ou encore sur http://www.numdam.org/ (notamment les Bulletins de la Société Mathématique de France)

a dû parcourir pour arriver à sa connaissance. ***Si le chemin est court, nous disons que la proposition est simple ; s'il est long, qu'elle est compliquée[39].***

Celui qui cherche de nouvelles propositions, c'est-à-dire qui cherche à énoncer des vérités mathématiques non encore mises en lumière, ne s'occupe guère, pendant la recherche, de la nature ni de la longueur du chemin qu'il parcourt, pourvu qu'il arrive ; plus tard, lui ou d'autres sauront aplanir la route et trouveront les raccourcis.

***Dans* l'exposition didactique de la science*, au contraire, la nature et la brièveté des routes suivies prennent une importance primordiale*,** *et,- puisqu'il n'y a pas évidemment à parler de la rigueur qui n'a pas de degrés, qui est ou qui n'est pas et sans laquelle une démonstration n'existe point,- les commentaires sur un ouvrage, l'examen d'une méthode, l'appréciation de la valeur d'un théorème se font avec un très petit nombre de mots : simple, bien ordonné, ingénieux, élégant ; je ne parle pas, bien entendu, des appréciations se rapportant au style : la clarté, la concision, l'exposition, etc.*

En allant au fond des choses, il semble que ces mots doivent même se réduire à deux : simple, ingénieux ; je pourrai presque dire à un seul : simple.

...

La mathématique étant par essence la science de la mesure et des rapports, il est tout naturel de chercher à évaluer tout ce qui, dans ce qui se rapporte à elle, en est susceptible.

Or, si le plus ou moins d'ingéniosité d'une démonstration est apprécié par une suite d'opérations complexes de l'esprit s'exerçant par des comparaisons avec les sujets qui lui sont familiers – et cela n'est pas mesurable ***- la simplicité d'une démonstration résulte, au contraire, du nombre fini et déterminé de syllogismes qui ont servi à l'établir*** *; aussi la considération de ce nombre doit pouvoir servir à une sorte de mesure ou d'évaluation de cette simplicité, c'est ce que nous allons chercher à démontrer. » [Lemoine. 1888, p75-76]*

Dans les quatre pages suivantes, Lemoine décrit une méthode pour comparer la « simplicité » d'une démonstration à partir d'exemples. A la fin de cette partie, il indique :

« Les généralités qui précèdent m'ont semblé indispensables pour faire comprendre clairement la portée de l'application, que je veux essayer, d'une idée semblable aux constructions géométriques. »

« La solution graphique d'un problème peut s'obtenir le plus souvent de plusieurs manières et, à moins de circonstances particulières, ***il faut évidemment choisir la plus***

[39] c'est moi qui mets en gras les passages que je veux ensuite commenter.

***simple**. Si ces constructions se réduisent au tracé de très peu de lignes, le choix entre elles est facile, puisque l'on voit sans difficultés celle qui en exige le moins ; mais il n'en est pas toujours ainsi, d'autant plus que les constructions, dont l'énoncé se fait en peu de mots, sont souvent fort complexes. Nous pensons donc qu'il y a intérêt à* mesurer *le degré de la simplicité réelle des constructions, **l'application pratique de cette recherche** se trouvant, d'ailleurs, dans le tracé des épures, dans les questions de statique graphique, etc. Nous ne croyons pas que cette* mesure *précise de la simplicité ait été essayée jusqu'ici, et la chose a lieu de surprendre à cause de sa facilité.*

*Dans ce qui suit, nous ne nous occupons pas de la définition de la ligne abstraite, du point, etc. ; ainsi, pour nous, **la ligne est le trait qui en est la représentation** et le point est l'intersection de deux lignes ou la petite trace laissée sur le papier par la pointe d'un compas ; toute ligne étant, d'ailleurs, la juxtaposition de points. »*

Cet extrait me suggère quelques commentaires :

- Les premiers travaux de Lemoine sur la géométrographie sont publiés dans les comptes rendus de L'Association Française pour l'Avancement des Sciences. On peut lire dans ses statuts :

  > *« Article 1er. L'association se propose exclusivement de favoriser par tous les moyens en son pouvoir le progrès et la diffusion des sciences au double point de vue du perfectionnement de la théorie pure et du développement des applications pratiques. » [AFAS. 1872, p 1]*

  On comprend alors l'intérêt que porte Lemoine à une « exposition didactique de la science ». Pour être présentable à d'autres, diffusable, une démonstration se doit d'être le plus simple possible.
- Lemoine propose alors une « mesure » de la simplicité des démonstrations.
- Il applique ensuite sa méthode pour « mesurer » la « simplicité » d'une construction.
- Les constructions étudiées sont le plus souvent des constructions à la règle et au compas. « Grosso-modo », une construction sera d'autant plus simple qu'il faudra moins de droites et de cercles pour la tracer[40]
- La validité des constructions n'est pas étudiée par Lemoine. Il analyse en effet des constructions qui sont validées par « la Géométrie », pour reprendre l'expression qu'il utilise dans son ouvrage sur la géométrographie de 1902. Il ne s'agit donc pas de

[40] On trouvera dans la suite de ce texte de Lemoine une première présentation des éléments pris effectivement en compte pour calculer cette simplicité. Cette partie du texte est reproduite en annexe 1.

travailler sur des constructions approchées, mais des constructions exactes du point de vue G2.

- Quelle est alors la nature des objets sur lesquels travaille Lemoine ? Celui-ci semble comme « écraser » G2 sur G1 : *« la ligne est le trait qui en est la représentation ».* Il « superpose » les deux objets (la droite et son représentant) pour n'en faire plus qu'un. Les constructions étudiées sont-elles alors dans G1 ou dans G2 ? Ces constructions, je l'ai dit, doivent être valides du point de vue mathématique, autrement dit du point de vue G2.
- Mais il suffit d'étudier les éléments pris en compte pour calculer le coefficient de simplicité, puis plus tard le coefficient d'exactitude (cf. [Lemoine. 1902, pages 16,17]) pour comprendre que la problématique majeure est néanmoins celle de la précision. Les opérations élémentaires dénombrées pour obtenir ces deux coefficients sont en effet :
    - *« Faire passer le bord de la règle par un point donné (opération* R_1*)*
    - *Tracer une ligne le long du bord de cette règle (opération* R_2*)*
    - *Mettre la pointe du compas en un point donné (opération* C_1*)*
    - *Mettre la pointe du compas en un point arbitraire d'une ligne donnée (opération* C_2*)*
    - *Tracer la circonférence (opération* C_3*) »[Lemoine. 1888, page 81]*

  Les objets (bords de la règle, pointe du compas) et les actions (faire passer le bord de la règle, mettre la pointe du compas) décrits ici sont de nature physique. Ce ne sont pas des éléments pris en considération dans G2. Par ailleurs, quelles seraient les « applications pratiques » si la problématique n'était avant tout celle de la précision, problématique qui a du sens dans le cadre G1, mais pas dans G2 ?

Dans un article ultérieur de 1892, publié dans le tome 20 du Bulletin de la Société Mathématique de France, Lemoine précise :

> *« Rappelons encore qu'il s'agit d'une simplicité théorique où les difficultés matérielles provenant des dimensions des données, de celle de la feuille d'épure, des instruments, des angles sous lesquels se coupent les droites, les cercles, etc. n'existent pas. »[Lemoine. 1892, page 134]*

Lemoine a bien ainsi conscience de ne pas prendre en compte tous les paramètres qui permettraient de « mesurer » la précision d'une construction. Si l'on considère par exemple la construction d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont donnés, on sait que le dessin sera plus précis si on commence par le grand côté. Le calcul de la simplicité n'en tiendra pas compte car le nombre d'opérations sera identique (cf. la « Construction VIII », dans [Lemoine. 1888. p 83]). Lemoine signale alors explicitement que, dans certains cas, il ne faudra pas choisir la construction géométrographique. Il écrit par exemple dans [Lemoine. 1888. page 94] (cf. annexe 1) :

« Ainsi, supposons que le résultat à atteindre puisse s'obtenir par plusieurs constructions, que j'appelle A, B, C, rangées dans leur ordre de simplicité graphique, lorsqu'on les effectue chacune indépendamment de l'épure que l'on exécute, A étant la plus simple :

Si plusieurs des opérations graphiques qu'il faudrait effectuer pour la construction C ont déjà leur résultat sur l'épure, celle-ci, quoique en principe plus complexe que A ou que B, peut devenir la plus simple.

*D'autres circonstances peuvent encore faire préférer B ou C à A : par exemple, les données sont telles que l'exécution de A conduirait à des tracés qui se trouveraient hors de l'épure, ou qui seraient **trop confus**, ou dans lesquels il y aurait des intersections de droites ou de cercles sous des angles très aigus et par conséquent, **mal déterminés**, tandis que les inconvénients seraient évités par l'emploi de B ou de C.*

*Nous pouvons ajouter, pour terminer, que l'exposé que nous venons de faire, montre clairement le point où est la difficulté d'obtenir l'exactitude dans les arts graphiques ; c'est qu'il faut, pour le moindre tracé, un grand nombre d'opérations élémentaires susceptibles chacune d'une **erreur** ; ainsi, par exemple, un problème aussi simple sue : mener les tangentes communes à deux cercles donnés, a pour simplicité 54, c'est-à-dire nécessite 54 opérations élémentaires, et, par conséquent, implique 54 erreurs ; inscrire un cercle dans un triangle, 30, etc. »*

Des tracés «trop confus », des angles « mal déterminés », des opérations susceptibles d' « erreur » : cet extrait montre le passage de la seule notion de simplicité à celle d'erreur, c'est-à-dire de précision. Lemoine suggère ainsi de ne pas appliquer aveuglément les constructions les plus simples, mais bien de rechercher les plus précises.

En 1902, dans son ouvrage « Géométrographie, ou Art des constructions géométriques », Lemoine écrit :

« La Géométrographie a un quadruple objet :

a. *Au moyen de certaines conventions, elle donne, pour une construction quelconque exécutée, un symbole qui est une sorte de mesure de sa simplicité et des chances de sa plus ou moins grande exactitude.*
b. *Elle conduit aux procédés pour effectuer, le plus simplement possible, une construction déterminée indiquée par la Géométrie.*
c. *Elle discute, quand il y a lieu, une construction dont le principe est donné, pour y substituer une construction plus simple qui peut arriver à différer tout à fait de la première indication.*
d. *Elle permet de comparer entre elles toutes les constructions que l'on connaît d'un même problème et de choisir parmi celles-là la plus simple que l'on appelle la construction géométrographique du problème, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé une plus simple, s'il y en a, qui devient alors la construction géométrographique de ce problème.*

La Géométrographie est d'essence toute spéculative, parce que les hypothèses qu'elle fait doivent s'écarter de la réalité pratique. Voici ces hypothèses : La Géométrographie suppose que la feuille du dessin est aussi grande qu'il est nécessaire à l'exécution intégrale de la construction ; elle suppose que les instruments dont on se sert : compas, règle (et équerre lorsque son usage est admis) sont aussi petits ou aussi grands que le demande le tracé ; elle suppose qu'un point est également bien déterminé quel que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent ; elle suppose l'existence matérielle du point et de la ligne. » [Lemoine. 1902, page 15]

Le second alinéa précise que les constructions sont validées par ailleurs, par la « Géométrie », comme je l'ai signalé ci-dessus. Avec le langage qui est le nôtre, on peut considérer qu'il s'agit d'étudier des constructions valides du point de vue G2.

Le premier alinéa, lui, met en évidence la problématique de la précision. Au coefficient de simplicité défini dans les premiers articles, il ajoute un coefficient d'exactitude. L'exactitude dont il est question n'est pas envisagée du point de vue de la logique mathématique ou de G2, mais de la précision du tracé.

Le dernier paragraphe repris ici marque les limites de la méthode du point de vue de la faisabilité matérielle. Un autre aspect matériel n'est pas pris en compte : l'épaisseur des traits de crayon.

Ainsi, on peut effectivement considérer la géométrographie de Lemoine comme une première théorie qui s'intéresse aux constructions qui relèvent de G1, et qui sont valides du point de vue de G2. Elle relève de la problématique de la précision, même si tous les aspects matériels de cette précision ne sont pas encore pris en compte.

La voie est alors ouverte et d'autres vont s'intéresser à ce problème. [Houdement & Kuzniak. 2002] présentent par exemple les travaux de Nitz, qui va prendre en compte certains des aspects physiques que Lemoine a laissés de côté :

> *« Ainsi, les figures ont une épaisseur qui est celle du trait de crayon ; une droite réelle est une petite bande droite déterminée par deux droites parallèles. De même, un point réel est une petit surface de forme approximativement circulaire (Punktkreise). Mais ce point peut aussi être un parallélogramme lorsqu'il est déterminé par l'intersection de deux droites réelles. Le cercle réel est défini de la même façon que la droite réelle »[Houdement & Kuzniak. 2002. p 24,25].*

Ces théories des constructions relèvent complètement du paradigme G1.

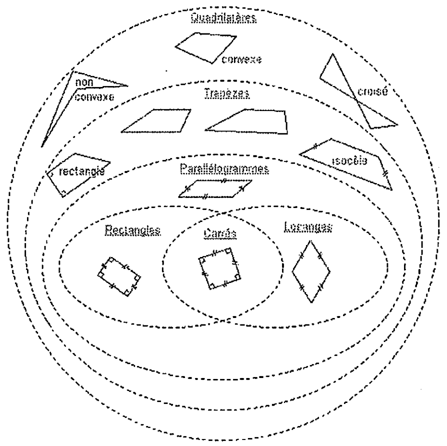
1.7. Définitions dans G1 et G2

Intéressons-nous maintenant à un autre objet : la définition.

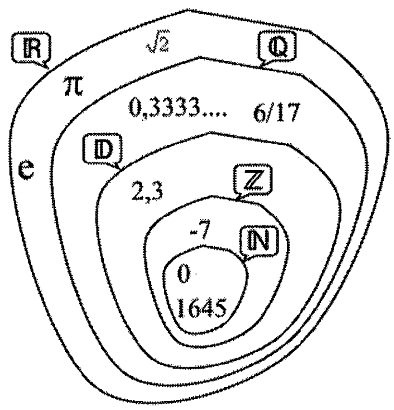
Dans le langage courant, le « ou » est plus souvent utilisé de manière exclusive qu'inclusive. C'est l'exemple habituel du « fromage ou dessert » de la carte du restaurant (cf. [DUCROT Oswald, 1973, page 98-100]). Cette exclusion dans les actions se retrouve également dans les propriétés des personnes ou des objets dans le langage naturel. Ce phénomène est particulièrement marquant chez les petits : « Tu n'es pas une dame, toi, tu es une maman !» me dit un jour ma fille. Ce mot d'enfant montre bien à quel point il est difficile pour les enfants de concevoir que quelque chose ou quelqu'un puisse être deux choses à la fois. Plus précisément, l'enfant cherche à catégoriser les objets ou les personnes, avec des catégories disjointes. Ainsi, dans la langue naturelle, les objets vont être définis par opposition. Il s'agit de repérer ce qui oppose un objet à un autre pour les différencier. Cette caractéristique va s'appliquer également aux objets mathématiques. En effet, dans le langage courant, un carré par exemple n'est pas reconnu comme étant aussi un rectangle. L'enfant va au contraire chercher à « opposer » le carré au rectangle. Un quadrilatère est carré ou rectangle, mais pas les deux à la fois. Les exemples peuvent être pris dans d'autres champs conceptuels des mathématiques : pour le non-mathématicien, un nombre est entier ou décimal mais pas les deux simultanément.

Ces exemples montrent un conflit entre le langage naturel et le langage mathématique, celui-ci fonctionnant généralement sur le mode de l'inclusion plutôt que sur celui de l'exclusion : le « ou » est par défaut inclusif en mathématiques. Les définitions mathématiques vont en effet se baser non pas sur l'opposition mais sur la caractérisation. Il s'agit de repérer les caractères communs aux objets.

Cette difficulté par exemple va poser problème aux élèves pour la compréhension de la classification des quadrilatères ou encore dans la présentation ensembliste classique des ensembles de nombres, telles qu'on peut les rencontrer dans les schémas suivants :



[41]



[42]

Mais même si ce phénomène intervient dans différents domaines des mathématiques, il est renforcé en géométrie par la dimension perceptive. Celle-ci intervient dans la conceptualisation des objets géométriques de G1. C'est d'abord par sa forme que l'enfant va reconnaître un carré, un rectangle, un triangle, un losange, etc.. Les attributs qui vont être pris en compte sont ceux qui permettent de le reconnaître facilement, notamment en le distinguant des autres, par opposition, par différentiation. On trouve ainsi, dans [Académie française. Huitième édition] :

> *« Losange : Parallélogramme dont les quatre côtés sont égaux, sans que les angles soient droits.* Deux des angles du losange sont aigus et deux sont obtus.
>
> *Trapèze : Quadrilatère dont deux côtés sont inégaux et parallèles »*

Ou encore, dans les éléments d'Euclide :

---

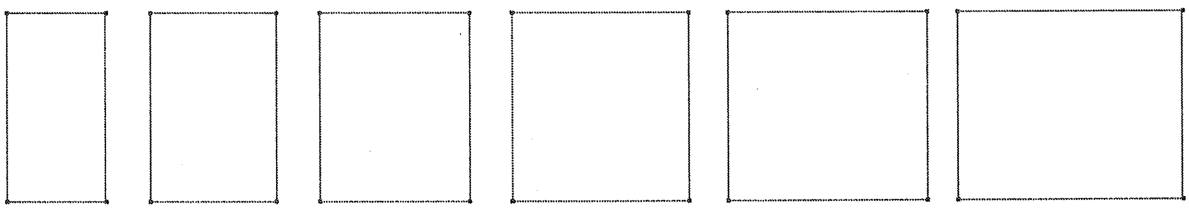
[41] disponible sur le net à l'adresse : http://mathocollege.free.fr/brevet/quad/quad.html

[42] disponible sur le net à l'adresse : http://xxi.ac-reims.fr/javamaths/Seconde/Nombres/lambert/nombres.htm

« Parmi les figures quadrilatères est un carré celle qui est à la fois équilatérale et rectangle ; est oblongue celle qui est rectangle mais non équilatérale ; un losange, celle qui est équilatérale mais non rectangle ; un rhomboïde, celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ; et que l'on appelle trapèzes les quadrilatères autres que ceux-là. » [Euclide. 1990. p. 164]

On peut considérer ces définitions comme inexactes, c'est évidemment le cas si on se place dans G2 avec le vocabulaire moderne, ou comme des définitions exactes de G1, si l'on tient compte avant tout de la dimension perceptive. Il faut alors accepter que les objets soient définis de manière différente dans les deux paradigmes. Le parallélogramme serait un trapèze particulier dans G2, ne serait pas un trapèze dans G1. Or le passage de G1 à G2 est déjà suffisamment compliqué. Il n'est pas utile de le compliquer encore. J'opterai donc pour une autre position : les définitions précédentes du losange ou du trapèze sont des définitions inexactes, qui relèvent de G1 (parce qu'elles s'expliquent par la perception).

Si la perception tend à mettre en évidence les différences, et explique en partie que dans G1, les élèves ont tendance (à tort rappelons-le) à considérer les définitions de manière plutôt exclusive, la déduction tend quant à elle à poser des définitions inclusives. Si l'on s'intéresse aux transformations continues que l'on peut faire sur un rectangle en faisant petit à petit augmenter sa largeur pour qu'elle se rapproche de sa longueur, il est plus aisé d'accepter que le carré est un rectangle particulier[43]. Mais il faut pour cela ne pas considérer un dessin de rectangle Objet mais au contraire Représentant, pour qu'on puisse accepter de changer de représentant. Il faut donc se situer dans G2.



Ainsi, les définitions sont en général inclusives dans G2, tandis que spontanément, elles seront (à tort) exclusives dans G1.

[43] tout comme le parallélogramme est un trapèze particulier ou le carré un losange particulier, etc.

1.8. Règle d'exhaustivité dans G1 et G2

Une loi du discours ajoute à la confusion, que Oswald Ducrot nomme la loi d'exhaustivité, que l'on pourrait aussi nommer « loi de l'information maximum ».

> *« Cette loi exige que le locuteur donne, sur le thème dont il parle, les renseignements les plus forts qu'il possède, et qui sont susceptibles d'intéresser le destinataire. Une formulation rigoureuse exigerait que soient définis précisément les notions de « thème » et de « force d'un renseignement ». Mais, à défaut de ces précisions, des exemples aideront à comprendre ce que nous voulons dire. On trouvera anormal qu'un enfant avoue avoir renversé son verre, alors qu'il l'a aussi cassé, ou qu'un général annonce avoir perdu un village alors qu'il a aussi perdu une ville. Par suite, le destinataire, supposant que le locuteur a respecté cette règle, aura tendance, si la réserve du locuteur ne peut pas être attribuée à une absence d'information, à interpréter toute affirmation restreinte comme l'affirmation d'une restriction (s'il ne dit que cela, alors qu'il sait ce qui s'est passé, c'est qu'il n'y a que cela). » [DUCROT Oswald, 1972, page 134]*

Reprenons en mathématiques l'exemple du carré et du rectangle et appliquons cette loi d'exhaustivité. Dans l'hypothèse où l'enfant aurait acquis cette notion d'inclusion, et compris qu'un carré est aussi un rectangle, considérons l'enseignant qui affirme que le quadrilatère ABCD est un rectangle. Si l'enseignant dit que c'est un rectangle, alors qu'il connaît la figure, c'est que ce n'est pas un carré, sinon il aurait dit que c'était un carré ! Cette interprétation de l'élève ne correspond certes pas au contrat didactique dans la classe de mathématiques : l'enseignant justement ne dit jamais tout ce qu'il sait de l'objet. En effet, l'objectif de la plupart des exercices, notamment de géométrie au collège, consiste à démontrer de nouvelles propriétés à partir de quelques-unes données initialement, alors que l'enseignant connaît en principe toutes les propriétés de l'objet dès le départ. Mais ce contrat de la classe de mathématiques, n'est justement pas intégré par tous les élèves qui peuvent alors à l'occasion faire fonctionner la loi d'exhaustivité et se trouver en décalage par rapport au maître.

Nous utiliserons cette règle d'exhaustivité pour interpréter certaines réponses d'étudiants. Nous pouvons également la mettre en lien avec les paradigmes G1 et G2.

Ce qui vient d'être dit sur la géométrie au collège correspond à G2 : les nouvelles connaissances s'obtiennent à partir des anciennes par déduction. L'élève qui entre dans cette démarche peut alors comprendre qu'un objet a de nombreuses propriétés, et qu'on ne peut jamais les donner toutes. A chaque exercice une partie seulement des informations est donnée. La règle d'exhaustivité ne s'applique pas dans G2.

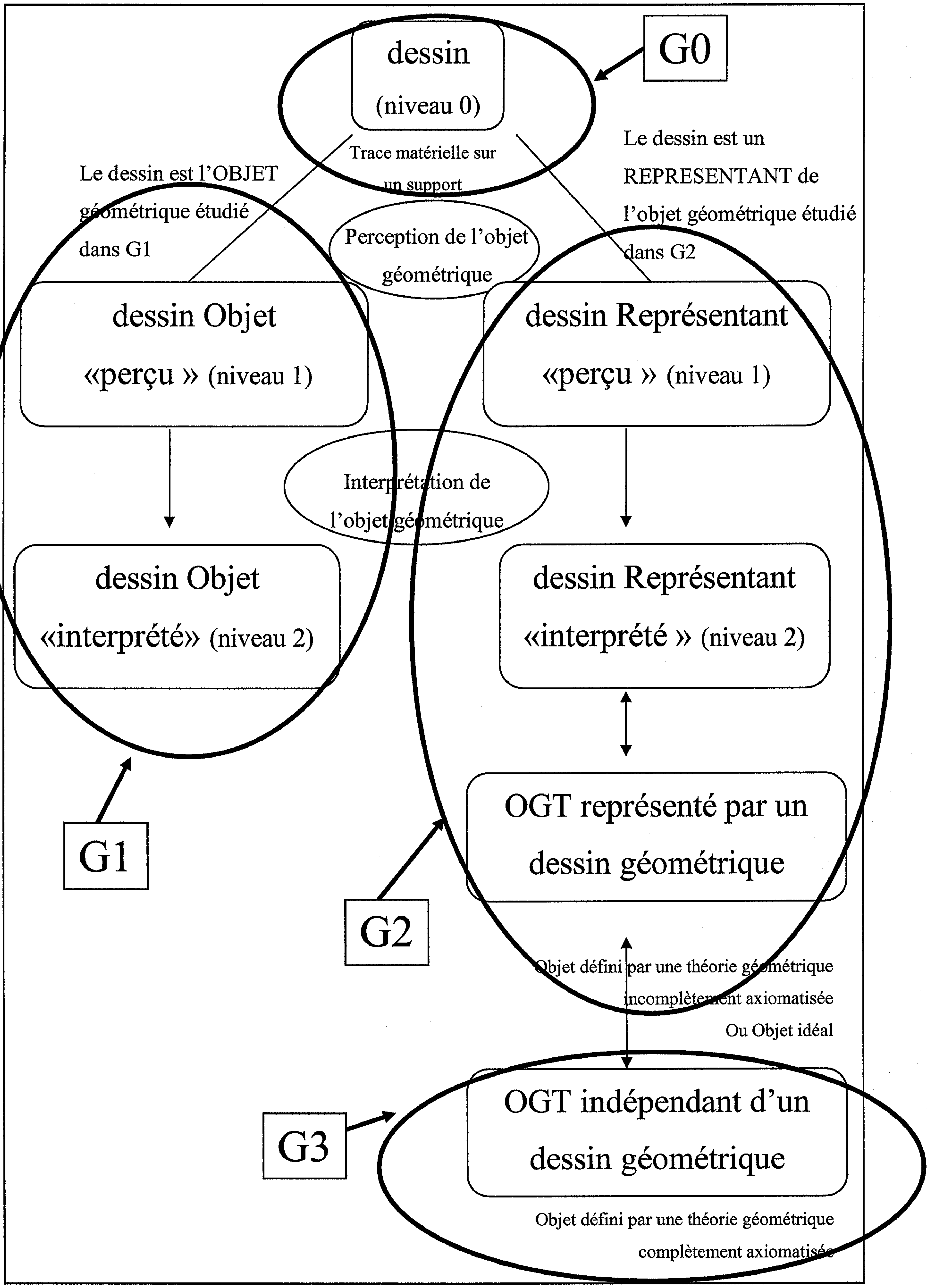
Au contraire, l'élève qui applique la règle d'exhaustivité relèverait plutôt d'un fonctionnement de type G1 : les objets sur lesquels il travaille sont réels, ils ne sont pas encore théoriques, et il applique alors plus volontiers une logique de la vie quotidienne, et donc la règle d'exhaustivité.

1.9. Eléments de synthèse autour des paradigmes G1 et G2

Le tableau suivant résume maintenant une partie des informations essentielles pour G1 et G2, dans l'environnement papier-crayon.

	Géométrie spatio-graphique G1	Géométrie proto-axiomatique G2
Statut du dessin	objet géométrique étudié	représentant d'un objet géométrique théorique
Nature de l'objet géométrique étudié	dessin (réalité spatio-graphique)	objet géométrique théorique défini par une formulation discursive
Type de validation	essentiellement perceptif	uniquement hypothético-déductif
Outils de validation	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, …	règles de la logique et théorèmes de la géométrie euclidienne
Nature des expériences	effectives (le plus souvent)	mentales, virtuelles
Constructions	réalisation effective (physique, matérielle) d'un tracé	algorithme d'obtention d'un objet sous contraintes fixées
Instruments de construction	règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, …	objets et théorèmes de la géométrie euclidienne
Définitions	basées sur la perception et l'exclusion, par opposition	basées sur les propriétés géométriques et l'inclusion, par caractérisation
Règle d'exhaustivité	parfois appliquée	non applicable

On peut maintenant reprendre le schéma construit précédemment (cf. chapitre 1, § 1.5, pages 43 et suivantes) et y insérer les différents paradigmes géométriques G0, G1, G2, G3.


dessin
(niveau 0)
Trace matérielle sur un support
G0
Le dessin est l'OBJET géométrique étudié dans G1
Le dessin est un REPRESENTANT de l'objet géométrique étudié dans G2
Perception de l'objet géométrique
dessin Objet «perçu » (niveau 1)
dessin Représentant «perçu » (niveau 1)
Interprétation de l'objet géométrique
dessin Objet «interprété» (niveau 2)
dessin Représentant «interprété » (niveau 2)
OGT représenté par un dessin géométrique
G1
G2
Objet défini par une théorie géométrique incomplètement axiomatisée
Ou Objet idéal
OGT indépendant d'un dessin géométrique
G3
Objet défini par une théorie géométrique complètement axiomatisée

2. Des paradigmes particuliers en environnement informatique

Les paradigmes géométriques qui viennent d'être présentés sont adaptés à l'environnement papier-crayon. Mais aujourd'hui, l'environnement informatique se fait de plus en plus présent partout, y compris dans l'enseignement de la géométrie. Les logiciels de géométrie dynamique ont fait leur entrée au collège depuis quelques années déjà, et commencent à entrer à l'école élémentaire. Les instructions officielles de l'école ouvrent d'ailleurs elles-mêmes cette porte :

> *« Comme cela a été évoqué précédemment, les moyens modernes de calcul (calculatrices et, dans une moindre mesure, tableurs) doivent devenir d'usage courant pour les élèves. Outre l'allègement de la charge de travail qu'ils permettent pour traiter des données tirées de « vraies situations », ils offrent l'occasion d'une approche plus expérimentale des mathématiques. Dans cet esprit, certains logiciels (comme les logiciels de géométrie dynamique) permettent de varier les points de vue sur un même concept. » [Appl. Maths C3. 2002, page 9]*
>
> *« Les logiciels de dessin assisté par ordinateur ou de géométrie dynamique pourront faire l'objet d'une première utilisation »[opus cit. page 30]*

Il est donc pertinent dans ce travail de thèse d'exploiter aussi bien l'environnement papier-crayon que l'environnement informatique. Mais l'environnement étant différent, les paradigmes géométriques doivent être adaptés, ce qui va être effectué maintenant. Le logiciel qui a été choisi est Cabri-géomètre.

Laborde et Capponi présentent ainsi l'environnement Cabri-géomètre :

> *« Deux caractéristiques importantes de cet environnement informatique résident dans la coexistence de primitives de dessin pur et de primitives géométriques et dans la manipulation directe du dessin. » [Laborde & Capponi. 1994, page 173]*

Explicitons ces caractéristiques du fonctionnement de l'environnement Cabri, avant de faire le lien avec les paradigmes géométriques.

2.1. Les caractéristiques de Cabri

L'utilisateur a à sa disposition des primitives de dessin pur et des primitives géométriques. Les premières correspondent aux tracés de points, droites, cercles, etc. sans propriété particulière, placés de manière perceptive par l'utilisateur au moyen de la souris. Les secondes correspondent au tracé des mêmes types d'objets, mais répondant cette fois à des propriétés géométriques particulières : point à l'intersection d'une droite et d'un cercle, point image d'un autre par une symétrie d'axe fixé, cercle passant par un point donné et de centre donné, etc.
Un des objectifs de Cabri est de favoriser l'apprentissage de la notion de « figure[44] ». Ce point de vue est développé dans [Laborde & Capponi, 1994], qui analyse Cabri *« en tant que constituant d'un milieu organisé pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique »*.
L'effet de la manipulation directe du dessin y est décrit :

> *« si l'on déplace à l'aide de la souris un des éléments de base du dessin, celui-ci se déforme en respectant les propriétés géométriques qui ont servi à son tracé et celles qui en découlent ; par suite, si un dessin a été réalisé à l'aide de primitives de dessin pur c'est-à-dire au jugé, il perd ses propriétés spatiales apparentes dans son état original lors du déplacement d'un des éléments. » [ibid., page 173-174]*

Au contraire, si un dessin a été réalisé à partir de primitives géométriques, il conserve ses propriétés lorsqu'on déplace ses éléments qui ont quelque degré de liberté. Ainsi par exemple, une droite d_2 qui a été construite perpendiculaire à une droite d_1 reste perpendiculaire à d_1 lorsqu'on déplace d_1.
Cette possibilité de manipulation directe du dessin, qui n'existe pas dans l'environnement papier-crayon (sauf à réitérer l'algorithme de construction du dessin), s'assortit d'une nouvelle règle du contrat didactique :

> *« le tracé à l'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet » [ibid., page 174]*

Cette règle du jeu est fondamentale dans l'utilisation de Cabri : c'est elle qui va ainsi amener l'élève à utiliser les primitives géométriques plutôt que les primitives de dessin pur, afin que les propriétés géométriques des objets soient conservées ; ces propriétés géométriques peuvent alors être explicitées par l'utilisateur.

---

[44] Le mot « figure » est ici employé au sens de « dessin représentant d'un OGT ».

« L'exigence de communiquer au logiciel un procédé géométrique de construction permet ainsi de caractériser l'objet géométrique (on retrouve la nécessité mentionnée plus haut de la description discursive de l'objet géométrique pour sa caractérisation). » [ibid., page 174]

2.2. Cabri et les paradigmes G1 / G2 : première approche

Du point de vue des paradigmes géométriques, on peut considérer que l'utilisation des primitives de dessin pur correspond au paradigme G1 : le dessin sur l'écran est l'objet géométrique étudié, les instruments de construction sont les primitives de dessin pur et surtout, la validation est perceptive.

L'utilisation des primitives géométriques oblige à une définition des objets de type discursif à partir de leurs propriétés géométriques (point à l'intersection d'une droite et d'un cercle par exemple). Cela n'est cependant pas suffisant pour en déduire que l'utilisation des primitives géométriques relève du paradigme G2. Il est en effet difficile a priori de savoir si pour l'utilisateur le tracé sur l'écran est l'objet géométrique étudié ou un représentant d'un OGT.

En particulier, les validations peuvent être de type perceptif : « je vois les droites perpendiculaires, donc elles sont perpendiculaires ». L'élève se situe alors dans le paradigme G1. L'utilisation de l'ordinateur favorise d'ailleurs ces validations perceptives de deux manières :

- la précision des tracés, ainsi que la possibilité d'agrandir le dessin, diminue le doute qui peut s'installer sur certains tracés effectués dans l'environnement papier-crayon. Pourquoi faudrait-il alors justifier une propriété qui ne fait aucun doute ?
- la confiance des élèves dans l'ordinateur diminue le besoin de justification : « si l'ordinateur me montre les droites perpendiculaires, c'est forcément qu'elles le sont ! ».

Les validations peuvent néanmoins être de type hypothético-déductif. Comme dans une situation papier-crayon, les élèves peuvent démontrer une propriété après l'avoir constatée perceptivement cette fois sur l'écran, considérant le dessin sur l'écran comme un représentant d'un OGT. Ils se situent alors dans le paradigme G2.

Mais d'autres validations peuvent intervenir, les Cabri-vérifications, qui vont nous amener, à la suite de Dahan ([Dahan. 2005, pages 105-106], à préciser des paradigmes G1 et G2 informatiques.

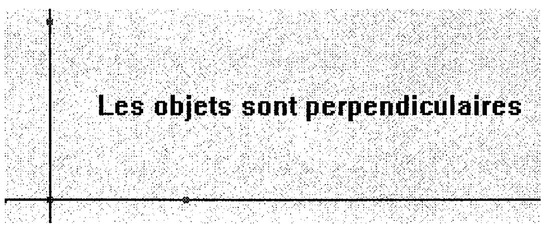
2.3. Une validation particulière : l'oracle, et les autres Cabri-vérifications

Il existe en effet une autre façon de valider certaines propriétés avec Cabri que la perception ou la démonstration : l'oracle. Dans la liste des outils disponibles dans Cabri, l'utilisateur dispose en effet de cinq fonctions d'interrogation :

- Trois points donnés sont-ils alignés ?
- Deux directions (droites, demi-droites, segments, axes, vecteurs ou cotés d'un polygone) sont-elles parallèles ?
- Deux directions (idem) sont-elles perpendiculaires ?
- Un point est-il équidistant de deux autres ?
- Un point appartient-il à un objet (cercle, segment ou droite notamment) ?

Cet oracle fonctionne bien sûr si les objets ont été définis à partir des primitives géométriques. Ainsi, si la médiatrice d'un segment [AB] a été construite en utilisant les outils « milieu » et « droite perpendiculaire », un point de cette médiatrice sera reconnu équidistant des points A et B. Mais il fonctionne également dans certaines situations construites avec les primitives de dessin pur.

- Trois points placés perceptivement horizontalement ou verticalement (en se repérant par exemple au bord de l'écran), ou même dans une direction à 45 ° de la verticale et de l'horizontale, peuvent être reconnus par Cabri comme alignés.
- Deux droites tracées perceptivement dans les directions verticales et horizontales, ou dans des directions à 45° de la verticale et de l'horizontale (la pixélisation de l'écran permet de repérer perceptivement ces directions) peuvent être reconnues perpendiculaires par Cabri.

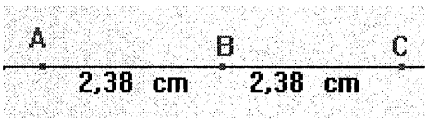


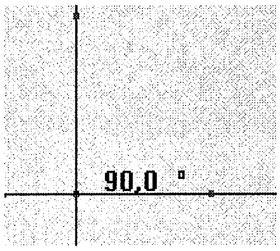
- De même pour des droites parallèles, dans les directions pré citées.
- Trois points situés perceptivement à égale distance avec le seul outil « point » peuvent être reconnus comme à égale distance par Cabri.

- Un point peut être reconnu par l'oracle comme appartenant à un objet alors même que l'appartenance du point à l'objet a été construite perceptivement[45].

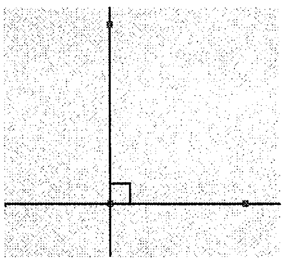
Certes, ces constatations[46] ne se vérifient pas si les droites utilisées sont dans des directions quelconques, mais les directions verticales et horizontales sont volontiers utilisées prioritairement par les élèves. Ainsi, les vérifications à l'aide de l'oracle peuvent aussi bien être issues d'un positionnement perceptif des points, et donc dans G1, que des propriétés des objets, issues des primitives géométriques. Dans ce dernier cas, on pourrait considérer que Cabri se situe dans G2, mais l'élève qui utilise cet oracle ne se situe pas dans G2 : ses validations ne sont pas de type hypothético-déductif, elles sont basées sur l'oracle de Cabri, l'élève admet la réponse de Cabri sans aucun raisonnement, aucune déduction. J'utiliserai dans la suite l'expression « Cabri-vérification » pour l'appel à l'oracle, ces Cabri-vérifications étant spécifiques de l'environnement Cabri.

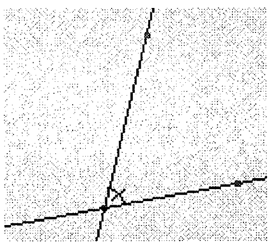
Ces Cabri-vérifications liées à l'oracle peuvent être complétées par des Cabri-vérifications issues des instruments de mesure de Cabri. Celui-ci permet en effet de mesurer notamment des distances ou des angles. La vérification d'un milieu peut alors s'effectuer en mesurant des distances ou la perpendicularité de deux droites (AB) et (AC) en mesurant l'angle $\widehat{BAC}$.





Un autre type de Cabri-vérification peut être exploité : Cabri permet par exemple de marquer un angle. Mais le symbole utilisé si l'angle est droit n'est pas le même que si l'angle ne l'est pas, comme le montrent les dessins ci-dessous.





---

[45] Le lecteur pourra, pour s'en convaincre, tester le scénario de construction suivant :
Tracer perceptivement deux droites respectivement verticale et horizontale d_1 et d_2. Placer un point A dans le plan et pas sur une des droites. Demander à l'oracle si le point A est sur une des droites, par exemple d_1. Déplacer d_1 jusqu'à ce que l'oracle dise que le point est sur la droite.

[46] Ces constatations ont été faites avec la version du logiciel utilisée par les élèves (Cabri-Géomètre II, version 1.0 MS Windows) ainsi qu'avec une version ultérieure (Cabri Géomètre II plus, version 1.2 Box - MS Windows)

Ce marquage peut alors servir à savoir si un angle est droit. C'est un autre type de Cabri-vérification. Remarquons que dans l'exemple ci-dessus à gauche, les droites ont été tracées horizontale et verticale de manière perceptive, et Cabri les reconnaît comme perpendiculaires. Toutes ces Cabri-vérifications peuvent donc s'appliquer sur des dessins construits avec des primitives de dessin pur comme avec des primitives géométriques, autrement dit dans un paradigme qui pourrait aussi bien relever de G1 que de G2. Il est par conséquent nécessaire de spécifier des paradigmes informatiques.

2.4. Les paradigmes G1 et G2 informatiques de Dahan

Dans sa thèse, Dahan développe, à partir des paradigmes géométriques G1 et G2 de Parzysz, les paradigmes G1 et G2 informatiques pour décrire les niveaux de géométrie avec Cabri-géomètre.

> *« Nous proposons de rester dans le cadre de la théorie anthropologique de Chevallard pour caractériser les niveaux de géométrie que nous qualifions de G1 informatique et G2 informatique*
>
> ***Techniques, technologie et théorie dans G1 informatique***
>
> *♦Les **techniques** utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments informatiques, ici Cabri avec ses outils de construction, ses outils de mesure (c'est une perception instrumentée par Cabri)... » [Dahan. 2005, page 105]*

Les objets de G1 informatique peuvent ainsi être créés aussi bien à partir des primitives de dessin pur que des primitives géométriques. Ces objets sont les dessins présents à l'écran, ensembles de pixels colorés.

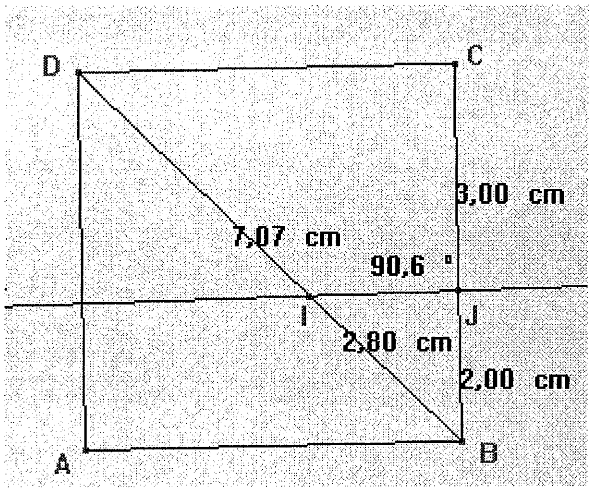
> *« ♦Les **technologies** (mode de validation) font également usage des instruments de Cabri, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit, par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions, par la constatation de différences de mesures « faibles » ou d'écart de mesure « faibles » » [ibid.]*

Les modes de validation de G1 informatique sont donc avant tout liés soit à la perception, instrumentée par Cabri, soit à des mesures, effectuées par Cabri, ne donnant pas des valeurs exactes mais qui seront néanmoins considérées par l'utilisateur comme acceptables. Prenons l'exemple nommé « carré et Thalès » dans le test papier que nous étudierons aux chapitres 3 et 4. ABCD est un carré de 5 cm de côté. J est un point de [BC] tel que JC = 3 cm et I un point de [BD] tel que $BI = 2,8$ cm. On veut savoir si (IJ) et (AB) sont des droites parallèles. Une première démarche possible est d'effectuer le dessin avec Cabri et de constater, perceptivement, que les droites sont parallèles. On pourra alors considérer qu'on se situe dans G1 informatique, même si la validation ne demande pas à Cabri d'effectuer de tracé ou de mesure supplémentaire, puisque le dessin a été construit avec Cabri et que la précision de celui-ci a suffi à l'utilisateur pour conclure.

Une seconde démarche consiste, après avoir effectué le dessin avec Cabri, à faire mesurer par exemple, à Cabri, la longueur du segment [BD]. On obtient :

$\frac{2,8}{7,07} \simeq 0,3960$ tandis que $\frac{2}{5} = 0,4$.

Certains étudiants considèrent alors que les droites sont « presque » parallèles, ou plus simplement qu'elles sont parallèles, comme nous le verrons ultérieurement dans l'analyse du test papier.



De la même manière, on peut aussi faire mesurer l'angle $\widehat{CJI}$ à Cabri. En travaillant à nouveau avec la précision par défaut de Cabri, on obtient 90,6°, ce qui peut permettre à certains d'obtenir la même conclusion. Dans ces deux cas, on pourra ainsi considérer que l'utilisateur se situe dans G1 informatique.

*« ♦Le **niveau théorique** est souvent présent sous la forme de conjectures faites dans G2 grâce à un travail inductif permis par les technologies précédemment mises en exergue et par des validations utilisant ces technologies : il consiste en réalité en une utilisation des technologies pour induire des résultats qui sont conjecturés dans G2 et dont la plausibilité est évaluée par les mesures faites par usage des technologies de G1 informatique, c'est-à-dire les outils de mesure et de calcul de Cabri mais pas les outils de test qui sont du niveau G2 informatique. »[ibid.]*

Ainsi, le niveau théorique est, comme pour G1 (non informatique), la géométrie euclidienne de G2 (comme nous le verrons. chapitre 3, § 2, pages 137 et suivantes).

« ♦Conclusion

<u>G1 informatique est G1</u> à cause des techniques associées aux instruments de Cabri qui généralisent celles de l'environnement papier-crayon (cercle à la place de compas, droite

à la place de la règle, report de mesure qui peut même reporter sur des demi-droites, vecteurs, triangles, polygones, cercles et toutes les transformations).

G1 informatique est informatique à cause de l'échantillon discret du plan sur lequel Cabri travaille (calcule) et surtout à cause des modes de validation qui, même s'ils reposent sur des constatations visuelles de superposition, sont plus performants que dans G1 ; la raison essentielle de cette plus grande performance réside à la fois dans la précision des tracés même dans des cas limites et la dynamicité qui autorise des conjectures beaucoup plus plausibles. »[ibid.]

Autrement dit, G1 informatique est G1 parce que ses objets sont de même nature que ceux de G1, physique, et qu'il repose sur la perception et une problématique de la précision, et informatique parce que la perception est améliorée par la grande précision, ainsi que par l'aspect dynamique des dessins effectués avec Cabri.

« Techniques, technologie et théorie dans G2 informatique

*♦Les **techniques** concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles, ...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises, ...), et l'usage de Cabri permet d'en obtenir des représentations compatibles avec leurs caractérisations théoriques (modèles sur l'écran). A la différence de G2, dans G2 informatique, on peut empiler des objets (superposer par exemple deux points qui seront considérés comme distincts bien qu'ayant les mêmes Cabri-coordonnées) »[ibid., page 106]*

Les objets de G2 informatique sont, comme ceux de G2, des Objets Géométriques Théoriques, dont un représentant est obtenu à l'écran à l'aide des primitives géométriques seulement, à l'exclusion des primitives de dessin pur, sauf peut-être pour les premiers éléments de la construction.

*« ♦Les **technologies** correspondantes consistent en la production par l'expérimentateur d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 ou G2 informatique rencontrés antérieurement. Elles s'appuient sur les outils de tests, « appartenance », « parallélisme »...qui travaillent à partir de calculs analytiques sur les points discrétisés de la page Cabri ; c'est le niveau déductif à la charge de Cabri qui caractérise en grande partie le qualificatif d'informatique que nous avons donné. »[ibid.]*

Comme dans G2, les validations de G2 informatique sont caractérisées par un raisonnement de type hypothético-déductif, mais à la différence de G2 où tous les résultats sont obtenus par démonstration à partir des données initiales, certains résultats peuvent ici être obtenus par les outils spécifiques permettant d'effectuer les Cabri-vérifications précédemment décrites. Ces Cabri-vérifications, dans G2 informatique, remplacent des étapes de démonstration dans G2. Dans la situation « Carré et Thalès » par exemple, les mesures effectuées permettent d'affirmer que $\frac{IB}{ID} \neq \frac{2}{5}$, ou encore que l'angle $\widehat{CJI}$ n'est pas droit, ce qui permet de conclure (par application de la contraposée du théorème de Thalès) que les droites (IJ) et (AB) ne sont pas parallèles ; de même l'oracle conclut que les droites (IB) et (AB) ne sont pas parallèles, ou encore que les droites (BC) et (IJ) ne sont pas perpendiculaires, ce qui permet d'aboutir à la même conclusion.

*« ♦Le **niveau théorique** est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 informatique (la géométrie affine euclidienne discrétisée à tous les points dont les coordonnées sont comprises entre –100 et +100 avec un pas de 10^{-9} dans ma version de Cabri sur mon ordinateur portable ; Cabri peut aussi utiliser des points à l'infini et des points construits avec des coordonnées supérieures à 100). Une technique très générale dans G2 informatique est la réalisation et l'étude de "figures" (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une Cabri-démonstration, c'est-à-dire à un retour à G2 informatique avec en particulier ses outils de test. ... » [ibid.]*

Ainsi, G2 informatique peut faire appel à G1 informatique pour lui faire jouer un rôle heuristique, c'est-à-dire pour effectuer une conjecture, de la même manière que l'expert qui se situe dans G2 peut faire appel à G1 pour nourrir son intuition.

« ♦Conclusion

G2 informatique est G2 à cause du niveau déductif présent chez l'expérimentateur et dans l'outil lui-même et

G2 informatique est informatique à cause de l'échantillon discret du plan sur lequel Cabri travaille (calcule), ce qui « démultiplie » la plausibilité des conjectures issues des mesures réalisées sur les objets de ce niveau par rapport à G1 : il ne s'agit en aucun cas d'un super G1 mais bien d'un niveau connexe à G2 en raison de la forte connexion des calculs réalisés par Cabri et de l'axiomatique qui est derrière les modèles manipulés (et plus spécialement pour un utilisateur averti). »[ibid.]

Ainsi, les objets de G1 et G2 informatiques se distinguent comme dans G1 et G2 par la nature des objets manipulés : les dessins obtenus à l'écran peuvent être les Objets sur lesquels on travaille (G1) ou des Représentants d'OGT (G2), l'objet de travail étant alors l'OGT. De même, les validations de G1 et G2 informatiques se distinguent par la prise en compte (G1) ou non (G2) d'un élément perceptif. Prenons un nouvel exemple pour préciser les deux types de validation. Considérons le tracé d'une droite (IK), dont on veut savoir si elle est ou non la médiatrice d'un segment [PR][47]. Plusieurs validations sont possibles :

- Vérifier uniquement perceptivement que (IK) est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu. La validation est perceptive. Cabri intervient ici dans la phase de construction initiale, mais pas dans celle de validation. On peut néanmoins considérer que l'on se situe dans G1 informatique, à cause du tracé initial, précis, qui permet de conclure plus facilement et plus sûrement qu'un tracé dans l'environnement papier-crayon.
- Tracer la médiatrice de [PR] et vérifier qu'elle se superpose à (IK). Le tracé de la médiatrice peut être obtenu à partir de l'outil médiatrice, mais aussi en traçant le milieu du segment puis la droite perpendiculaire passant par ce milieu. Cabri sert à tracer la médiatrice mais la validation est finalement perceptive : vérification visuelle de la superposition. On se situe également dans G1 informatique.
- Tracer deux cercles de centres P et R et de même rayon et vérifier perceptivement que les intersections des cercles se situent sur (IK). On se situe de la même manière dans G1 informatique.
- Utiliser l'oracle ou le marquage des angles pour vérifier que (IK) est perpendiculaire à [PR] puis la mesure de longueur pour vérifier que l'intersection de (IK) et de [PR] est exactement le milieu de [PR]. Cette fois, la perception visuelle n'intervient pas (si ce n'est pour donner l'intuition que (IK) est la médiatrice et suggérer les vérifications). Toutes les vérifications sont effectuées par Cabri. On se situe ici dans G2 informatique.
- Tracer deux cercles de centres P et R et de même rayon et vérifier à l'aide de l'oracle de Cabri que les intersections de ces cercles appartiennent à la droite (IK). On se situe de même ici dans G2 informatique.

[47] Nous retrouverons cette configuration à la fin du chapitre 6, dans la situation « PARC » proposée aux étudiants.

Les validations sont ainsi dans G1 informatique dès que la perception intervient, dans G2 informatique dès que toutes les vérifications sont effectuées par Cabri, c'est-à-dire lorsque toutes les vérifications sont des Cabri-vérifications, pour reprendre la terminologie précédente.

Il faut néanmoins se montrer vigilant sur les déductions de G2 informatique, qui ne sont pas de même nature que les déductions de G2. [Dahan. 2005, page 94] précise, au sujet d'une vérification d'alignement des points centre du cercle circonscrit, centre de gravité et orthocentre d'un triangle ABC :

> *« L'induction qui nous permet de passer d'une affirmation d'un environnement discret (le modèle de la géométrie plane que constitue Cabri) à la même affirmation dans le plan de la géométrie abstraite peut être considérée comme une déduction de G2 informatique car la probabilité que l'affirmation soit fausse est extrêmement faible : la raison tient à deux paramètres : le premier tient dans les calculs faits par Cabri pour mener à l'affichage des coordonnées qui se basent sur les spécifications de la figure et le second dans la grande quantité de données validantes. .. »*

Un peu plus loin, au sujet de la validation dans un problème d'orthogonalité, mais également pour d'autres problèmes, Dahan démontre la fiabilité des affirmations de Cabri :

> *« Conclusion : dans l'exemple donné pour lequel nous avons travaillé dans G2 informatique, nous avons pu constater une très grande fiabilité dans les inférences discursives de l'environnement Cabri jusqu'à une précision de l'ordre de* 10^{-5}. *» [ibid. page 99]*

Autrement dit, G2 informatique est caractérisé par le fait d'effectuer des validations fiables par rapport à G2. Ainsi, ces validations sont conformes aux résultats issus de G2, et obtenues par informatique, ce qui justifie le fait d'appeler le paradigme correspondant « G2 informatique ». Notons cependant que « fiable » ne signifie pas « infaillible », et que Cabri peut se tromper. Nous rencontrerons un problème sur ce point au chapitre 6, paragraphe 2.3.1 (cf. pages 313 et suivantes).

Par ailleurs, si le paradigme *« G2 informatique est G2 à cause du niveau déductif présent chez l'expérimentateur et dans l'outil lui-même »*, il faut être attentif à la nature de la déduction du point de vue de l'expérimentateur. Reprenons notre exemple de médiatrice. Utiliser l'oracle ou le marquage des angles pour vérifier que (IK) est perpendiculaire à [PR] puis la mesure de longueur pour vérifier que l'intersection de (IK) et de [PR] est le milieu de [PR] nécessite certes une part de déduction pour conclure qu'il s'agit d'une médiatrice, mais cette déduction ne constitue pas une démonstration dans G2 : les hypothèses, au lieu d'être lues sur le dessin, sont apportées par Cabri, mais ne résultent pas elles-mêmes d'une démonstration. Du point de vue cognitif, cette déduction est plus proche, pour l'expérimentateur, d'une vérification à l'équerre et à la règle graduée que d'une démonstration dans G2.

Une autre démarche de résolution de ce problème consiste à utiliser G1 et/ou G2 informatiques pour effectuer une conjecture, puis à se situer dans G2 (non informatique) pour effectuer une démonstration. G1 et G2 informatiques jouent alors le même rôle que G1 pour l'émergence de la conjecture, et le contrôle de G2. En effet, de la même manière que G1 et G2 se contrôlent l'un l'autre (cf. chapitre 2, § 1.2, page 71), G1 et G2 informatiques permettent de contrôler G2 : les dessins et validations effectués dans G1 ou G2 informatiques peuvent remettre en cause une démonstration erronée, de même que G2 peut permettre de s'assurer que les constructions et validations effectuées dans G1 ou G2 informatiques sont correctes.

De même, dans l'exemple « Carré et Thalès », une autre démarche possible est d'utiliser G1 et / ou G2 informatiques pour établir une conjecture, puis G2 pour démontrer le résultat. Cette démarche est d'ailleurs celle qui est attendue avec les étudiants, Cabri ne devant pas se substituer à la démonstration, mais lui être une aide. Ce qui nous intéressera dans la suite est de savoir si les étudiants se situent plus volontiers dans G1 informatique ou dans G2 informatique, et surtout si le passage par l'environnement Cabri permet ensuite de se situer dans G2 pour donner une solution au problème posé.

2.5. Eléments de synthèse autour des paradigmes G1I et G2I

A la suite de Dahan, je considèrerai dans la suite que Cabri propose un environnement qui n'est ni exactement G1, ni exactement G2. Il convient donc de le considérer comme un environnement spécifique, relevant de paradigmes spécifiques, nommés G1 et G2 informatiques, et notés, pour simplifier le discours, G1I et G2I dans la suite. Leurs caractéristiques peuvent être résumées comme suit :

	G1 informatique (G1I)	G2 informatique (G2I)
Statut du dessin	Objet géométrique étudié	Représentant d'un OGT
Nature de l'objet géométrique étudié	dessin (réalité spatio-graphique)	OGT défini par une formulation discursive
Type de validation	essentiellement perceptif	hypothético-déductif
Outils de validation	œil	Oracle et autres Cabri-vérifications
Nature des expériences	effectives (le plus souvent)	
Constructions	réalisation effective (physique, matérielle) d'un tracé	
Instruments de construction	primitives de dessin pur et primitives géométriques	primitives géométriques

A côté de ces paradigmes informatiques, le paradigme G2 pourra continuer à être exploité avec la démarche suivante :

- Effectuer un dessin avec Cabri pour effectuer une conjecture
- Valider cette conjecture dans G1I et / ou G2I
- Valider cette conjecture dans G2 par une démonstration ne faisant pas intervenir Cabri

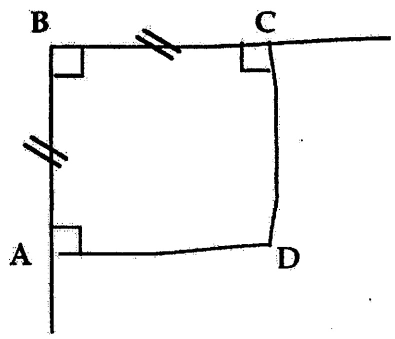
Cette démarche se situe fondamentalement dans G2, bien qu'elle exploite les paradigmes G1I et G2I comme elle l'aurait fait de G1 dans l'environnement papier-crayon, afin de mettre en place une conjecture.

Par ailleurs, nous avons pointé au chapitre 2, § 1.4 (cf. pages 73 et suivantes) qu'il est difficile de savoir, dans une situation donnée, si l'élève considère le dessin comme un Objet géométrique ou comme un Représentant d'un OGT, et que ce sont les actions effectuées sur les objets qui le plus souvent permettent de déterminer si l'élève se situe dans G1 ou dans G2. De la même manière, il est difficile de savoir comment l'élève considère le dessin présent sur l'écran de l'ordinateur, Objet géométrique ou Représentant d'un OGT. Même le fait d'effectuer des Cabri-vérifications ne suffit pas à assurer que le dessin est considéré comme Représentant d'un OGT. On peut effectuer la construction de la situation « carré et Thalès », par exemple, et mettre en œuvre uniquement des Cabri-vérifications, à l'exclusion de vérifications perceptives, tout en considérant le dessin comme l'Objet géométrique sur lequel on travaille, les Cabri-vérifications jouant alors le même rôle que les instruments traditionnels tels que l'équerre et la règle graduée par exemple. Néanmoins, et comme on l'a fait pour G1 et G2, lorsque toutes les validations sont des Cabri-vérifications, à l'exclusion de validations perceptives, on considèrera que l'utilisateur se situe dans G2I.

3. Ma problématique

J'ai dit en introduction que j'allais étudier la manière dont les PE1 considèrent les objets géométriques qu'ils utilisent. L'explicitation du cadre théorique qui a été faite permet de reformuler ce projet. Il s'agit en fait d'**étudier dans quels paradigmes géométriques se placent les PE1, G1 ou G2, voire G1I ou G2I, pour traiter un problème géométrique**. Reprenons les deux exemples cités en introduction, et analysons-les à la lumière de notre cadre théorique.

Isabelle :

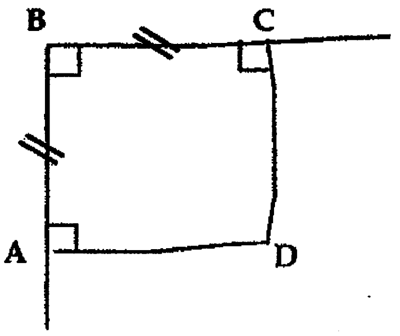


Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

non
AB = BC ≠ AD ≠ DC
AD et DC ne sont pas tracés à la règle.
pas d'angle droit aux sommets C et D.

Pour Isabelle, le dessin proposé est l'Objet géométrique sur lequel elle doit travailler. Cet objet est physique. Elle déduit peut-être certaines informations de l'énoncé (AB = BC) mais surtout, elle analyse le dessin de manière perceptive : elle ne tient pas compte du codage et observe le dessin pour affirmer que l'angle en C n'est pas droit. Son mode de validation est perceptif, peut-être instrumenté pour la remarque sur les angles mais ce n'est pas totalement sûr. Elle se situe dans le cadre G1.

Fabienne :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

oui

En effet, ABCD est un quadrilatère possédant 3 angles droits et ayant 2 côtés consécutifs de même longueur.

Fabienne au contraire considère le dessin proposé comme un Représentant d'un OGT. Elle prend en compte les informations codées sur le dessin, complétées par l'énoncé (quadrilatère ABCD). Elle déduit de ces informations la nature de ABCD en utilisant un théorème de géométrie (un quadrilatère possédant 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur est un carré). Sa validation est ainsi de type hypothético-déductif. Elle travaille dans G2.

Ce cadre théorique me permet ainsi d'analyser plus finement le travail d'Isabelle et Fabienne.

Je peux maintenant formuler plusieurs questions qui sont au cœur de mes préoccupations dans ce travail :

3.1. Les questions

P1[48] : Comment se comportent les PE1, en début de formation, du point de vue des paradigmes G1/G2 ?

On peut détailler cette question :

> **P1.1 : Les PE1 en début de formation travaillent-ils « spontanément » dans le cadre de la géométrie spatio-graphique (G1), ou dans celui de la géométrie proto-axiomatique (G2) ? En particulier dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les PE1 se situent-ils ? De manière**

48 La lettre Q n'a pas été utilisée pour éviter une éventuelle confusion ultérieure avec le questionnaire dans lesquelles les questions sont notées Q1, Q2, etc.

générale, peut-on expliciter le paradigme ou pseudo-paradigme dans lequel se situent les PE1 ?

P1.2 : Lorsqu'on propose plusieurs tâches de géométrie plane dans le micro-espace aux PE1 en début de formation, est-il possible de faire émerger des profils d'étudiants « tout G1 » ou « tout G2 » ou d'autres profils ? De manière plus large, y a-t-il un lien entre leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une situation donnée et leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une autre situation ?

P1.3 : Dans une tâche de construction de G1, les PE1 sont-ils capables de faire le lien entre la technique de G1 qu'ils ont utilisée et la technologie de G2 qui justifie cette technique ? Autrement dit, y a-t-il cohérence entre leurs déclarations (dans G2) et leurs procédures (dans G1) ?

P1.4 : Existe-t-il des situations qui favorisent plutôt un traitement dans G1, ou dans G2 ? Et si oui, lesquelles ?

P2 : Quelle est l'influence de l'environnement (papier-crayon ou informatique) sur le positionnement « spontané » des PE1 dans les paradigmes G1 ou G2 (ou dans un pseudo-paradigme) ? Quel rôle jouent G1I et G2I ?

Il s'agit en particulier de savoir dans l'environnement informatique si les étudiants vont se situer dans G1I, proche de G1, ou dans G2I, proche comme nous l'avons montré de G2 du point de vue des résultats mais proche de G1 du point de vue cognitif. Vont-ils ensuite rester dans G1I ou G2I, ou vont-ils passer à G2 pour terminer le travail ?

P3 : Peut-on proposer un dispositif de formation qui permette aux PE1 d'une part de prendre conscience des paradigmes G1 et G2 et d'autre part d'être capables de se situer de manière consciente et efficace dans G1 ou G2 selon les besoins ?

3.2. Les hypothèses de recherche

Ces questions sous-tendent quelques hypothèses de recherche, parfois déjà formulées, qu'il est utile maintenant de rassembler, et de reformuler le cas échéant :
HR1 (cf. chapitre 1, § 1.5) : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.

HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.

Cette thèse a pour objectif d'apporter des éléments de réponse aux questions présentées et de tester les hypothèses de recherche.

3.3. Une hypothèse de travail

Par ailleurs, une hypothèse de travail ne sera, elle, pas remise en cause et peut être rapidement justifiée :
T : Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2, ainsi qu'un minimum de connaissances dans G2.
Dans son travail, l'enseignant sera en effet amené à :

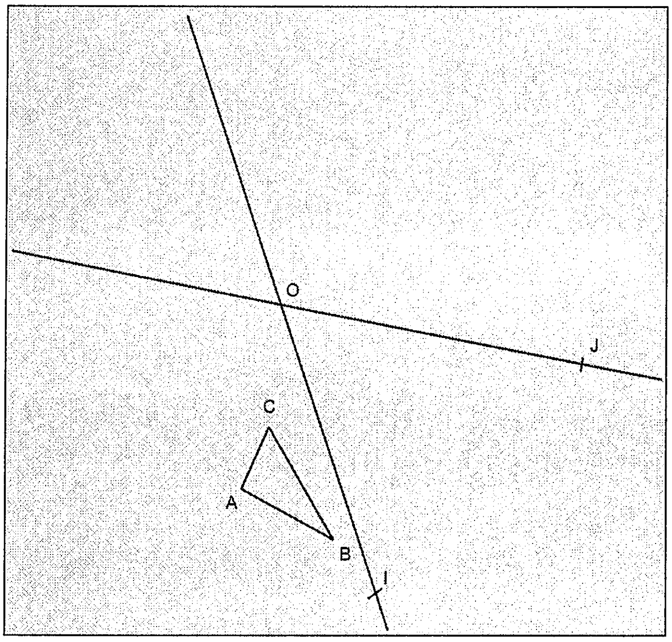
- choisir, voire construire, des situations d'enseignement en géométrie. Or, comme nous l'avons montré en 3.6 au chapitre 1 puis en 4.1 au chapitre 2, la géométrie de l'école élémentaire relève avant tout de G1, mais l'injonction institutionnelle de raisonner sur des dessins à main levée permet d'entrevoir une initiation au travail dans G2. Pour que les enseignants soient en mesure de choisir des situations pertinentes qui permettront aux élèves d'esquisser ce passage de G1 à G2, il est évidemment nécessaire qu'ils aient eux-mêmes bien identifié chacun des cadres G1 et G2, qu'ils soient en particulier capables à tout moment de savoir où eux-mêmes se situent et où l'élève se situe.

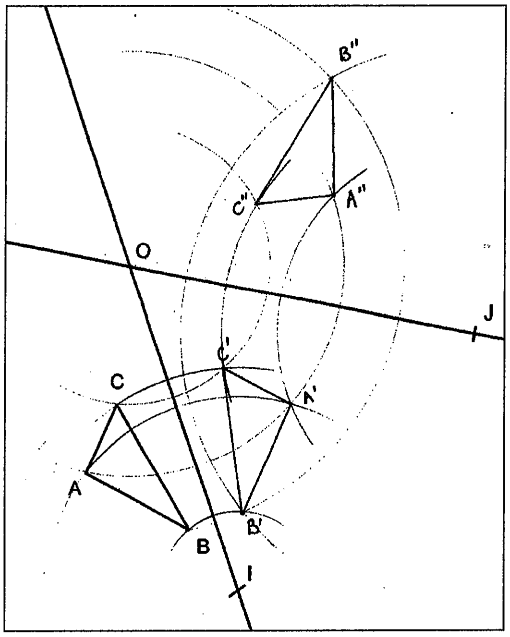
- distinguer les constructions exactes des constructions approchées pour valider les procédures de construction des élèves
- distinguer le général du contingent, c'est-à-dire des situations particulières dans les productions des élèves
- analyser les instructions officielles et les difficultés des élèves. Certains objets de géométrie existent dans G2 mais pas dans G1 (nous y reviendrons chapitre 3, § 1.1, page 129). La droite par exemple est un objet familier pour les PE1, et il est important qu'ils comprennent d'une part pourquoi cet objet n'apparaît pas en cycle 2 mais seulement en cycle 3, et pourquoi sa manipulation est difficile pour les enfants en cycle 3. D'autres exemples de difficultés des élèves relevant de la distinction G1/G2 pourraient être cités.

Par ailleurs, dans le cadre du concours de professeur des écoles, les sujets de mathématiques proposés font souvent intervenir à la fois G1 et G2, comme l'ont déjà fort bien démontré Houdement et Kuzniak, et il est nécessaire que les étudiants repèrent les différents paradigmes en jeu pour pouvoir donner la réponse attendue à chaque question (on pourra à ce sujet se reporter à [Houdement & Kuzniak. 2000]).

La session du concours de recrutement de professeur des écoles de mai 2006 nous propose un nouvel exemple d'exercice de géométrie plane[49] où l'étudiant doit successivement se situer dans des paradigmes différents. Le dessin proposé est reproduit en réduction ci-dessous (à gauche), ainsi qu'une production possible d'étudiant (à droite). Le lecteur trouvera l'exercice complet en annexe 2.

[49] dans le sujet du groupement d'académies de Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice et Toulouse, exercice 2.





Analysons l'énoncé proposé.

Texte de l'énoncé	Commentaires et analyse
1) Pour cette question, tracer sur la copie une figure ressemblant à celle de l'annexe 2. *Il ne s'agit pas de reproduire exactement cette figure mais d'en respecter la forme et la disposition.*	Le dessin proposé n'est accompagné d'aucun texte : il s'agit donc de prendre des informations sur le dessin directement, donc de se situer dans G1. Par exemple, O, I et J sont trois points non alignés, A, B et C sont trois autres points, non alignés entre eux ni avec les précédents, et situés dans la même portion de plan délimitée par les droites (OI) et (OJ).[50] On peut même penser que « respecter la forme et la disposition » suppose de prendre des indications approchées concernant les angles et les mesures.[51]

[50] L'interprétation est ici faite en termes de points, autrement dit d'unités figurales de dimension 0, ce qui est propre au discours mathématique. Il est probable, si l'on se réfère à [Duval. 1995] qu'elle sera faite par les étudiants en termes de deux droites sécantes (OI) et (OJ) et d'un triangle ABC, c'est-à-dire d'unités figurales de dimensions 1 ou 2. En effet : *« dans le registre des figures, il y a la prédominance perceptive des unités de dimension 2 sur celles de dimension inférieure. Dans le registre du discours en langue naturelle où sont définis les objets représentés par la figure, il y a prédominance des objets représentés par des unités figurales de dimension 1 ou 0. (...) D'autre part, le traitement de la situation mathématique représentée par la figure (par application de définitions ou de théorèmes) requiert que l'on se restreigne aux unités figurales de dimension 0 ou 1 alors que la perception focalise automatiquement sur les unités figurales de dimension 2. »[Opus cit. pages 178-179]*

[51] On notera la consigne ici inhabituelle en géométrie, en particulier du point de vue de la disposition. En fait, il faudrait que l'étudiant effectue un « décryptage » de la consigne qui lui est probablement inaccessible : le

Construire à la règle et au compas les symétriques A', B' et C' des points A, B et C par rapport à la droite (OI) ***en laissant apparents les traits de construction.*** *Construire à la règle et au compas les symétriques A'', B'' et C'' des points A', B' et C' par rapport à la droite (OJ)* ***en laissant apparents les traits de construction.***	La construction « à la règle et au compas », accompagnée des « traits de construction » est une tâche qui reste ambiguë, et qui peut être considérée comme relevant de G1 aussi bien que de G2, comme je l'ai montré au § 1.6.2 (cf. pages 84 et suivantes).
2) À partir de l'observation de la figure obtenue, donner un argument montrant qu'il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme les trois points A, B et C en A'', B'' et C''.	Là encore, il s'agit de prendre des informations perceptives sur le dessin, ce qui situe le début de la tâche dans G1. On peut par exemple remarquer que les droites (AA''), (BB'') et (CC'') ne sont pas parallèles[52]. Il faut ensuite en déduire la réponse à la question, et donc par exemple démontrer que si (AA''), (BB'') et (CC'') ne sont pas parallèles, alors les points A'', B'' et C'' ne peuvent être les images respectives des points A, B et C par une symétrie axiale. Il s'agit cette fois d'effectuer une démonstration, que l'on peut considérer dans G2.
3) Montrer que l'angle $\widehat{BOB''}$ *vaut le double de l'angle* $\widehat{IOJ}$.	Il s'agit là explicitement d'une tâche de démonstration, caractéristique du paradigme G2[53].

triangle ABC est positionné de telle sorte que le triangle A'B'C' soit tout entier dans le secteur angulaire délimité par les demi-droites [O, I) et [O, J), sans couper ces demi-droites, et que le triangle A''B''C'' soit dans le secteur angulaire « suivant ». Or, il suffit de changer très légèrement les distances ou les angles pour que ces contraintes ne soient plus respectées et que le dessin, tout en permettant théoriquement d'effectuer les mêmes conjectures, devienne concrètement difficile à exploiter.

[52] Il y a bien sûr d'autres démarches possibles, comme par exemple tracer les médiatrices de [AA''] et de [BB''] et vérifier qu'elles ne sont pas confondues. Mais si on peut éventuellement conjecturer le non parallélisme des droites (AA'') et (BB'') sans les tracer, il est plus difficile de conjecturer que les deux médiatrices de [AA''] et de [BB''] sont distinctes sans les tracer. Or, on sait que les étudiants vont difficilement prendre l'initiative d'effectuer des tracés non demandés ni même suggérés.

[53] Puisque B' est l'image de B par la symétrie axiale d'axe (OI), $\widehat{BOI} = \widehat{IOB'}$. De même, on obtient $\widehat{B'OJ} = \widehat{JOB''}$. Or, la relation de Chasles sur les angles permet d'écrire :
$\widehat{BOB''} = \widehat{BOI} + \widehat{IOB'} + \widehat{B'OJ} + \widehat{JOB''}$, d'où : $\widehat{BOB''} = 2\,\widehat{IOB'} + 2\,\widehat{B'OJ}$, i.e. : $\widehat{BOB''} = 2\,\widehat{IOJ}$.

4) Quelle est la transformation du plan qui transforme le triangle ABC en A''B''C'' ? Justifier la réponse.	Il s'agit à nouveau d'une tâche de démonstration dans G2[54].

Cet exemple illustre la démarche habituelle de l'expert en géométrie, avec de nombreux allers-retours entre G1 et G2, que nous pouvons dans le cas présent schématiser ainsi :

[54] Par un raisonnement analogue, on obtient $A\hat{O}A'' = 2\ I\hat{O}J$ et $C\hat{O}C'' = 2\ I\hat{O}J$. Ainsi, $B\hat{O}B'' = A\hat{O}A'' = C\hat{O}C''$. La transformation qui transforme le triangle ABC en A''B''C'' est donc la rotation de centre O et d'angle $2\ I\hat{O}J$.

Question n°	G1	G2
1	**Observer** puis reproduire le dessin proposé	Associer[55] une figure de G2 possédant les éléments jugés pertinents (forme, position, direction, …).
1	Construire à la règle et au compas les deux triangles symétriques respectivement de ABC puis de A'B'C'.	Utiliser une technologie de G2 ((OI) médiatrice de [AA']) pour effectuer une tâche de G1 (tracer le symétrique)
2	Repérer que les droites (AA''), (BB'') et (CC'') ne sont pas parallèles	
		Déduire qu'il n'y a pas de symétrie axiale pour transformer ABC en A''B''C''
3	**Observer** et repérer les angles et les relations entre eux	Utiliser la relation de Chasles pour démontrer l'égalité demandée.
4	**Observer** le dessin et repérer la rotation	Utiliser une définition de la rotation pour en démontrer l'existence.

Les deux dernières étapes du travail dans G2 suffisent du point de vue mathématique à effectuer la démonstration attendue, mais les passages dans G1, suggérés par l'énoncé, permettent de nourrir et de guider l'intuition afin de construire cette démonstration.

[55] Cette association est sous-entendue dans chaque itération du mot « **observer** ». On peut en effet supposer que « observer » signifie à chaque fois « repérer les éléments pertinents dans G1 pour en faire des propriétés dans G2 »

Cet exemple illustre l'obligation qu'a l'étudiant de travailler alternativement dans G1 et dans G2, sans que cela soit réellement explicite. Seuls quelques indices, qui doivent être décodés par l'étudiant, lui permettent de déterminer dans quel paradigme il doit se situer : « tracer », « observation » doivent inciter à se situer dans G1, « construire » doit inciter à utiliser une technologie appartenant à G2 pour effectuer un tracé dans G1, de même que « argument » doit inciter à utiliser une technologie de G2 sur des prémisses de G1, tandis que pour finir « montrer » doit inciter à se situer dans G2[56].
Cet exemple illustre également le niveau de connaissances et de compétences attendues en géométrie plane du candidat.

Tous ces arguments nous permettent de justifier qu'il est essentiel que le futur professeur des écoles puisse s'approprier cette distinction entre les paradigmes G1 et G2, et qu'il soit lui-même capable de résoudre quelques problèmes simples dans G2.

4. Méthodologie

4.1. Trois dispositifs dans le travail

Mon travail de thèse s'organise autour de trois dispositifs :

- Une étude statistique, dont la pertinence est liée à l'effectif étudié : un premier test passé par 878 étudiants, puis d'autres avec des effectifs plus restreints portent à plus de 1000 le nombre de productions étudiées. Les outils d'analyses sont multiples : tris à plat, tris croisés, analyses factorielles en composantes multiples et analyses implicatives. Ces outils, y compris l'analyse implicative, sont classiques pour les didacticiens des mathématiques. Je ferai néanmoins une très rapide présentation de l'analyse implicative un peu plus loin pour en présenter les principes généraux. L'ensemble des études sur les différents questionnaires fera l'objet des chapitres 4 et 5.
- Une étude de cas, non plus dans un environnement papier-crayon, mais dans un environnement informatique, en l'occurrence Cabri-géomètre II. Elle se compose,

[56] Il serait intéressant de disposer des copies des étudiants ayant composé sur ce sujet pour étudier dans quel paradigme ils se situent à chacune des questions.

outre d'une initiation au logiciel pour les étudiants, d'une analyse du test précédemment étudié, dans une version adaptée à l'environnement informatique, ainsi que d'une situation de résolution de problème. Elle sera décrite et analysée dans le chapitre 6.

- Une ingénierie didactique, mise en œuvre sur une promotion de 120 étudiants. L'analyse de cette ingénierie repose notamment sur celle des productions des étudiants dans quatre des phases du dispositif de formation. Cette ingénierie et les résultats de l'analyse des productions des étudiants sera l'objet du chapitre 7.

4.2. Analyse implicative

Il ne s'agit pas ici de développer ce qu'est l'analyse implicative, mais juste d'en préciser le principe de fonctionnement. Le lecteur intéressé trouvera dans la bibliographie quelques ouvrages sur ce sujet, en particulier [GRAS. 1996] ou plus récemment [GRAS. 2005, pages 9-33].

L'analyse implicative est une méthode d'analyse statistique développée initialement par Régis Gras ([Gras1996], [Gras & Bailleul 2000]) qui permet d'avoir un regard dissymétrique sur les données.

« Dans le cas binaire, la situation générique est la suivante. On croise une population E (des individus, par exemples des élèves, ou des objets) et un ensemble de variables (par exemple des items d'un questionnaire ou bien des attributs). Du fait de l'observation exceptionnelle dans les situations réelles de l'implication stricte de la variable a sur la variable b, situation où tout individu qui vérifierait a vérifierait également b, on veut donner un sens statistique à une implication non stricte : a $\Rightarrow$ b. Dans ce cas, certains individus peuvent vérifier a et non pas b. ».

« L'idée directrice consiste :

- *à se donner un critère permettant d'évaluer numériquement l'écart à la valeur vraie (égale à 1 pour l'implication stricte) de l'ensemble des circonstances dans lesquelles l'implication (l'inclusion) est contredite par les faits observés ;*
- *de propager cette étude binaire à toutes les paires de variables ;*

- *puis à organiser les variables en un réseau, un graphe non symétrique, pondéré et transitif, pour être précis, donnant une image structurée de V. Ce graphe représente l'ensemble des quasi-théorèmes empiriques du type a $\Rightarrow$ b et la structure obtenue pourra être interprétée comme conjecture empirique d'une théorie. En voici la mathématisation retenue que nous présentons en évitant un formalisme excessif.*

Soit X et Y deux parties quelconques de E, choisies aléatoirement et indépendamment (absence de lien a priori entres ces deux parties) et de mêmes cardinaux respectifs que A et B. Soit $\overline{Y}$ et $\overline{B}$ les complémentaires respectifs de Y et de B dans E.

Axiome 1 :

a $\Rightarrow$ b est admissible au niveau de confiance 1- α si et seulement si

Proba [card (X $\cap$ $\overline{Y}$) $\leq$ card (A $\cap$ $\overline{B}$)] $\leq \alpha$

Intuitivement et qualitativement, ceci signifie que l'implication a $\Rightarrow$ b sera admissible à l'issue d'une expérience si le nombre d'individus de E la contredisant dans l'expérience est invraisemblablement petit par rapport au nombre d'individus attendu sous une hypothèse d'absence de lien. » [Gras. 199, pages 27 à 29].

A l'aide de cet indice de « quasi-implication statistique », on peut ainsi obtenir un graphe implicatif, qui met en évidence toutes les variables reliées par une « quasi-implication » à un niveau donné. Le logiciel qui permet de mettre en œuvre cette analyse et que j'ai utilisé est CHIC[57], dans la version 1.4 puis dans les versions 3.3, 3.4 puis 3.5 présentant quelques améliorations, notamment dans la facilité de construction des graphes implicatifs.

J'ai cependant souvent gardé les graphes effectués sous la version 1.4 car elle permet de respecter les occurrences du graphe. Concrètement, cela signifie que sur la gauche du graphique apparaît un axe gradué de 1 à 0 du bas vers le haut. Cette ordonnée correspond pour chaque variable à sa fréquence d'apparition. Les modalités de fort effectif se trouvent vers le bas du graphe, celles qui sont en haut du graphique, au-dessus de la ligne correspondant à 0,1 par exemple, ont une fréquence inférieure à 0,1. Elles sont donc peu importantes et même si elles apparaissent sur le graphe, les informations que l'on peut en déduire sont de moindre importance.

[57] Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive., logiciel disponible à l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques). Voir : http://www.ardm.asso.fr/CHIC.html pour une présentation générale du logiciel, bibliographie complète, etc.

Quand l'effectif de la population est important, 878 en particulier pour l'analyse du test initial, l'analyse utilisée est l'analyse entropique, plus stricte que la théorie classique, avec la loi de Poisson, elle aussi plus exigeante que la loi binomiale.
Une difficulté technique m'a parfois empêchée d'utiliser la fonction « copier » prévue sous CHIC et m'a obligée à utiliser des images d'écran retaillées, ce qui explique la forme des graphes implicatifs obtenus.

Chapitre 3

Chapitre 3 : Les paradigmes géométriques face aux concepts didactiques, aux instructions officielles et aux contenus mathématiques

Les paradigmes géométriques sur lesquels je vais travailler dans toute la suite étant définis, il est intéressant, avant de les exploiter dans ma recherche, de les positionner

- d'une part par rapport à d'autres éléments de didactique des mathématiques, en particulier le concept de cadres et changement de cadres développé par Douady ainsi que les organisations praxéologiques proposées par Chevallard. Ce sera l'objet des deux premiers paragraphes de ce chapitre.
- d'autre part par rapport aux instructions officielles de l'école et du collège, ce sera l'objet du troisième paragraphe.

Par ailleurs, ce travail de thèse sur les paradigmes géométriques ne peut s'effectuer, nous l'avons dit, sans le support de contenus mathématiques. Ceux-ci seront divers mais l'un d'entre eux sera particulièrement exploité : la médiatrice. Il est donc intéressant de faire le point sur la manière dont elle est présentée dans les manuels actuels de sixième, classe où elle est introduite, notamment bien sûr du point de vue des paradigmes géométriques.

1. Paradigmes géométriques, cadre géométrique et changement de cadres

1.1. G1 et G2 sont-ils des cadres ?

Le concept de cadre a été introduit par Douady dans sa thèse [Douady. 1984] puis plus largement présenté à toute la communauté didactique dans [Douady. 1986] :

« Disons qu'un cadre est constitué des ***objets***[58] *d'une branche des mathématiques, des* ***relations*** *entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images*

[58] c'est moi qui mets en gras certains éléments sur lesquels je reviens ensuite, dans cet extrait comme dans les suivants.

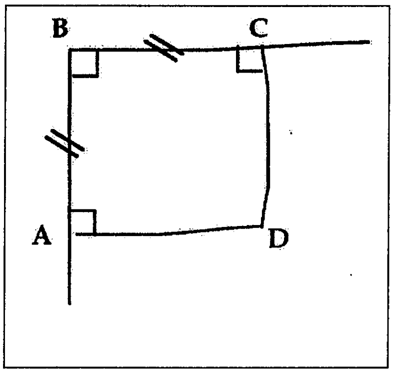
mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outils des objets du cadre. ***Deux cadres peuvent*** *comporter les mêmes objets et* ***différer*** *par les images mentales et la* ***problématique développée****. Par ailleurs, la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des* ***conflits*** *entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite à renouveler les images ou les faire évoluer. » [Douady. 1986, pages 10 et 11].*

- Les **objets** de G1 et de G2 (segments, triangles, cercles, ...) portent les mêmes noms, mais ces noms renvoient à des objets différents comme je l'ai vu précédemment : objets matériels dans G1, abstraits dans G2. Certains objets d'ailleurs n'existent que dans G2 : les droites par exemple ne sont pas des objets de G1 (un objet matériel ne saurait être illimité) mais seulement des objets de G2[59].
- Les **relations** sont les mêmes (parallélisme, inclusion, ...) mais les correspondances entre objets et relations de G1 et G2 sont loin d'être parfaites : deux segments de G1 peuvent être considérés dans G1 comme parallèles compte tenu de la précision utilisée pour vérifier ce parallélisme alors qu'ils peuvent être considérés comme des représentants d'objets théoriques de G2 qui ne sont pas parallèles[60].
- La **problématique** de chacun des paradigmes G1 et G2 surtout est fondamentalement différente : problématique de la précision des tracés dans G1, problématique de la conformité aux règles de la théorie dans G2.
- Par ailleurs, les **conflits** entre ce que l'on voit dans G1, et ce que l'on sait dans G2 sont nombreux ; ils sont l'objet de nombreux exercices proposés aux élèves pour les inviter à passer de G1 à G2 au collège notamment. C'est ce qui se passe sur l'exemple présenté en introduction (ci-dessous) où le dessin proposé est un carré du point de vue G2 mais ne ressemble pas à un carré du point de vue G1.

---

[59] on peut ainsi comprendre pourquoi ce terme n'apparaît pas en cycle 2, mais seulement en cycle 3, et encore avec une restriction. En effet, le document d'application des programmes de mathématiques de cycle 3 précise que le mot « droite » est pour l'enfant à ce niveau synonyme de « ligne droite ». On peut supposer que « ligne droite » renvoie alors au tracé, à la « réalité spatio-graphique », limitée, de G1, tandis que « droite » renvoie à l'objet théorique, illimité, de G2.

[60] Considérons l'exercice suivant :
« Construisez un carré ABCD de côté 5 cm.
Placez le point I de [BD] tel que BI = 1,7 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3,8 cm.
Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ? »
La valeur de BI pour laquelle il y a effectivement parallélisme est $1,2\times\sqrt{2}$ cm dont une valeur approchée est 1,6971 cm. L'écart avec la valeur proposée est de moins de 0,03 mm, indécelable perceptivement à l'œil nu sur une construction. Dans G1, les droites sont parallèles ; dans G2, elles ne le sont pas !



Balacheff reformule ainsi, en présentant le travail de Douady :

« L'idée de cadre, qu'elle propose, est celle d'un domaine des mathématiques qui soit assez bien ***identifié*** *par ses* ***objets****, les relations qu'ils entretiennent et les types de représentation et de* ***traitement qu'ils mobilisent****. »[Balacheff. 2002, page 3]*

- G1 et G2 ont tout particulièrement été **différenciées par la nature des objets** sur lesquels on travaille
- et par la nature des **traitements** effectués : les validations par exemple sont basées sur la perception dans G1, sur la démonstration dans G2.

Rogalski propose une autre formulation intéressante :

« « En gros », on dit qu'on travaille dans un cadre donné si on étudie un problème dont les données, les énoncés, les outils premiers d'études, se situent dans ***une théorie principale assez bien définie****, plus ou moins vaste, ayant souvent un rapport avec un certain champ conceptuel (au sens de Vergnaud). Un cadre apparaît ainsi comme un domaine de travail. Il peut y avoir entre les différents cadres des relations d'emboîtement, ou des intersections non vides, avec* ***des frontières nécessairement un peu floues****. Il s'agit surtout de points de repère,* ***utiles pour analyser les problèmes****, pour classer, pour décrire des relations, pour situer des objets mathématiques précis, donc utiles aussi pour chercher et pour enseigner, et en particulier pour prévoir des changements de cadre. »[Rogalski. 2002, pages 13-14].*

- Pour G2, la théorie principale est clairement identifiée : c'est la géométrie euclidienne. Pour G1 par contre, la théorie est moins explicite, on peut choisir notamment entre géométrographie et géométrie euclidienne. Je reviendrai sur ce point en étudiant dans la suite les liens entre tâches, techniques, technologies et théories.
- Les frontières entre G1 et G2, malgré tout l'effort d'explicitation qui a été fait, restent toujours un peu floues. Si les validations de type hypothético-déductif sont la caractéristique de G2, des raisonnements, des déductions peuvent être effectuées sur

des objets de G1. Il devient ainsi parfois difficile de savoir si la résolution d'un problème relève de G1 ou de G2. Par ailleurs, il reste des situations dont on ne sait pas bien si elles relèvent de G1 ou de G2. J'ai par exemple affirmé que la droite n'était pas un objet de G1. Pourtant, les élèves de cycle 3 vont utiliser cet objet, ou du moins un objet qui porte ce nom. Pour certains d'entre eux, il sera en fait synonyme de segment, ils n'arrivent pas à prendre en compte l'aspect illimité. Ils manipulent donc un objet de G1, il y a erreur sur le vocabulaire. Cette situation est sans ambiguïté. Mais d'autres saisissent que la droite continue au-delà du trait qu'ils ont tracé. Travaillent-ils pour autant dans G2 ? Ce qui est en fait flou, ce ne sont pas tout à fait les paradigmes G1 et G2 en eux-mêmes, mais plutôt les pseudo-paradigmes dans lesquels travaillent les élèves à un moment donné, dans une situation donnée, pseudo-paradigmes qui le plus souvent tiennent à la fois de G1 et de G2, comme je l'ai montré (cf. chapitre 2, § 1.4, 1.5, pages 73 et suivantes).

- Ces paradigmes sont utiles pour analyser des problèmes, je l'ai montré au chapitre 2, paragraphe 1.3 (cf. pages 72 et suivantes).

Ainsi, les paradigmes géométriques que nous avons définis, et tout particulièrement G1 et G2, peuvent être considérés comme des cadres géométriques particuliers.

Pour conforter cette affirmation, reprenons un extrait de [Balacheff. 2002, page 3] :

« La notion de cadre est façonnée pour dessiner les contours d'un domaine des mathématiques en des termes qui seront pertinents pour analyser l'activité de l'élève et ses connaissances (ou plutôt ses conceptions, comme il est souvent fait référence dans le mémoire de thèse[61]) ».

Cet extrait renforce une de mes hypothèses de recherche (cf. chapitre 2, § 3.2) :

> **HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.**

L'aspect des cadres qui a ici été envisagé est l'aspect mathématique, mais complétons avec cet extrait de [Douady. 1992, page 136] :

« En fait, la référence naïve aux images mentales est seulement l'indice que le chercheur[62] fait partie du cadre et qu'un transfert en didactique de cette notion demande d'y inclure l'acteur : maître, élève ou chercheur. Cela conduit à envisager la notion de cadre selon au

---

[61] Celui de Régine Douady

[62] Douady part du travail du mathématicien pour définir la notion de cadre

moins trois dimensions : une dimension mathématique, une dimension socioculturelle, une dimension individuelle chacune indexée par le temps. On peut parler ainsi d'états d'un cadre, dans un environnement donné, pour quelqu'un, à un moment donné. Les trois dimensions concernent la description des états à un moment donné, ces états évoluant avec le temps. »

Citons un exemple du point de vue socioculturel, exemple que nous avons déjà étudié au chapitre 2, paragraphe 1.7 (cf. pages 93 et suivantes). En mathématiques, notamment parce que cela simplifie beaucoup d'énoncés de définitions et de théorèmes, les ensembles d'objets fonctionnent le plus souvent par inclusion : c'est le cas des ensembles de nombres ou des quadrilatères par exemple. Pour le mathématicien, un carré est un rectangle. Ce sera le cas bien sûr dans G2. Par contre, dans le langage courant, les ensembles d'objets s'excluent généralement les uns les autres. Le « ou » est très souvent exclusif. Ainsi, pour l'enfant, il est difficile d'accepter que le carré soit aussi un rectangle. On voit là comment l'aspect socioculturel peut être pris en compte dans les paradigmes géométriques, et tout particulièrement dans G0 (où les objets sont ceux de la réalité), et dans G1.

Pour préciser la dimension individuelle, reportons-nous à [Douady. 2002, pages 136-137] :

« *La dimension individuelle intervient dans le fait que la constitution d'une culture est certes le fruit d'une éducation sociale, et l'école y prend sa part. Mais c'est plutôt le fruit d'une interaction entre l'individu et l'environnement social. Il en résulte que dans une société, et nous englobons la société scolaire, les individus tout en disposant d'un large champ de références communes, se construisent des représentations personnelles des expériences vécues, y compris des expériences cognitives. Ceci conduit à un enrichissement diversifié du cadre dans toutes ses dimensions, à une diversité dans ses modalités de mise en œuvre selon les individus.* »

1.2. Paradigmes et changements de cadres.

Les cadres présentent un intérêt particulier dans les changements de cadres :

« La notion de cadres a été introduite par R. Douady surtout pour prendre en compte des changements de cadre qui sont des moyens de résoudre des problèmes et de produire des connaissances nouvelles. » [Perrin-Glorian. 2002, page 63]

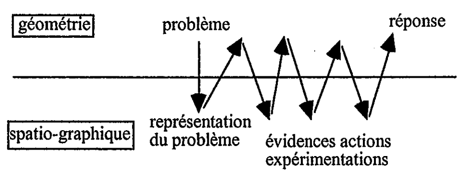
Qu'en est-il de nos paradigmes ?

L'élève qui travaille dans G1 peut très bien y rester, mais l'expert qui travaille dans G2 va souvent utiliser aussi G1 : il va utiliser des dessins pour faire des conjectures, contrôler des propriétés, envisager des démarches de démonstrations, déterminer des sous-figures pertinentes, etc., avant de revenir dans G2. Ainsi les changements de cadres vont bien être « *des moyens de résoudre des problèmes et de produire des connaissances nouvelles* ».

Mais ces changements de cadres entre G1 et G2 ont plusieurs particularités par rapport aux changements de cadres tels que Douady les fait fonctionner :

- Les changements de cadres sont souvent pilotés et donc explicités par l'enseignant, alors qu'en géométrie on voudrait que ce soit l'élève qui en ait l'initiative.
- Les changements de cadres entre G1 et G2 sont nombreux dans une même résolution de problème, comme l'expliquent [Laborde & Capponi. 1995] :

  « L'élaboration d'une solution à un problème de géométrie est faite d'une succession d'allers et retours entre théorie et spatio-graphique selon le schéma suivant :

  Ces allers et retours constituent ce que nous appelons dans la suite un jeu de relais entre géométrique et spatio-graphique. »

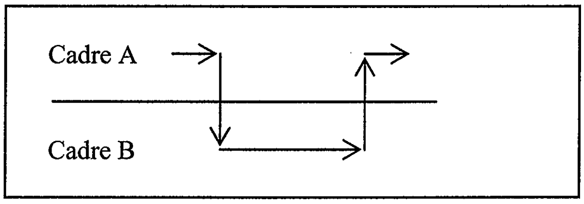
- Nous pouvons considérer ces « *jeux de relais entre géométrique et spatio-graphique* » comme des mini-jeux de cadres entre G1 (spatio-graphique) et G2 (théorie). Le fait que ces changements de paradigme entre G1 et G2 soient nombreux « brouille » les pistes pour les élèves, d'autant plus que les supports de travail (dessins, énoncés) sont les mêmes. C'est une des difficultés des élèves en géométrie.

- L'utilisation la plus habituelle des cadres[63] est de commencer à résoudre un problème dans un cadre A, de passer dans un cadre B pour avancer la résolution du problème (parce que les objets y sont plus familiers, les techniques plus faciles à mettre en œuvre, les théorèmes mieux connus, etc.) pour conclure dans le cadre A, dans lequel était posé le problème. Le problème est alors résolu, il n'est pas nécessaire de chercher un chemin qui soit tout entier dans le cadre A. Par contre, quand l'expert effectue ses « jeux de relais » entre G1 et G2, c'est pour rechercher des idées. Mais pour rédiger finalement correctement la solution du problème, on attend de lui qu'il propose un chemin qui reste autant que possible[64] dans G2. Autrement dit, G1 joue le rôle d'un cadre auxiliaire transitoire, comme un échafaudage nécessaire à la construction mais qui doit s'effacer quand l'édifice est terminé. Les schémas suivants montrent cette différence de comportement des changements de cadres habituels et des « jeux de relais » entre G1 et G2, dans la recherche d'un problème d'une part, puis dans la présentation de la solution pour l'« expert ». Le cas du « non-expert » est également schématisé, mais il s'agit pour le moment d'une hypothèse sur le fonctionnement des PE1 par exemple.

[63] Pour une étude détaillée de « *Comment fonctionnent les changements de cadre, ou de registre, ou de point de vue ? Pour quelles raisons va-t-on ailleurs chercher quelque chose, et quoi ?* », le lecteur pourra lire [Rogalski. 2002. p 19-26].

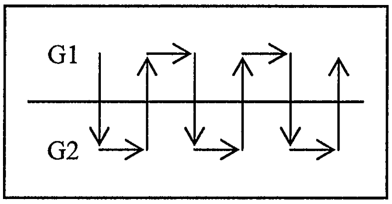
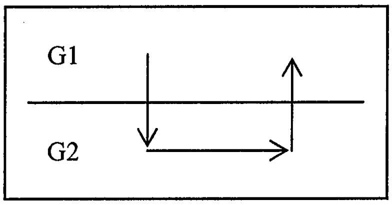
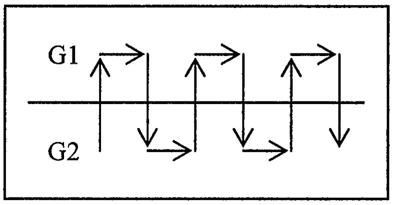
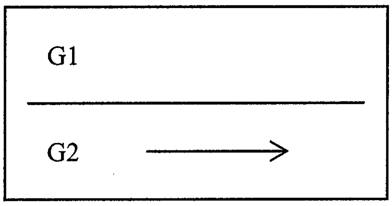
[64] Nous avons déjà montré que dans une démonstration de G2, le recours à des éléments figuraux est inévitable même si bien sûr on essaie de le limiter au maximum.

Fonctionnement habituel des changements de cadre

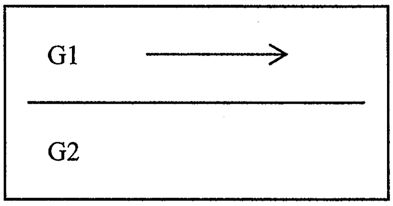
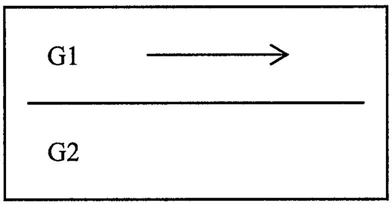
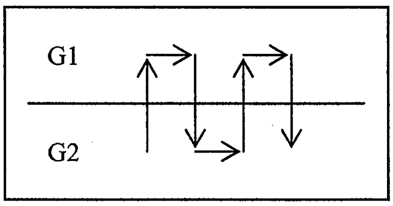
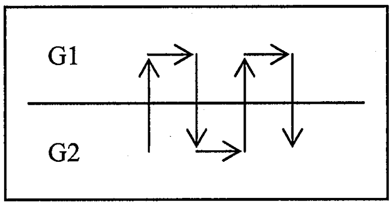


Fonctionnement des « jeux de relais » entre G1 et G2

Cas de l'« expert »

	En situation de recherche	En situation de restitution
Le problème est posé dans G1		
Le problème est posé dans G2		

Cas du « non-expert »

	En situation de recherche	En situation de restitution
Le problème est posé dans G1		
Le problème est posé dans G2		

2. Les paradigmes géométriques et les organisations praxéologiques de Chevallard

Rappelons brièvement la définition de l'expression « praxéologie », à l'aide d'un extrait de [Chevallard. 1997] :

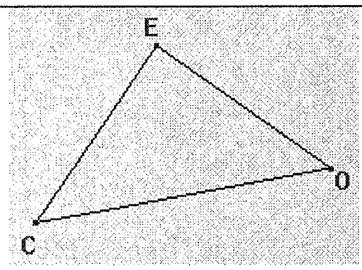
« En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents types de tâches T, accomplis au moyen d'une certaine manière de faire, ou technique, τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un savoir-faire. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un environnement technologico-théorique [θ/Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d'une technologie, θ, « discours » rationnel (logos) censé justifier et rendre intelligible la technique (tekhnê), et à son tour justifié et éclairé par une théorie, Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/τ/θ/Θ], constitue alors une organisation praxéologique ou praxéologie, dénomination qui a le mérite de rappeler la structure bifide d'une telle organisation, avec sa partie pratico-technique [T/τ] (savoir-faire), de l'ordre de la praxis, et sa partie technologico-théorique [θ/Θ] (savoir), de l'ordre du logos. » [Chevallard. 1997, pages 37-38]

Je propose d'analyser dans ce qui suit, à titre d'exemples, deux types de tâches différentes, tâches proposées par ailleurs aux PE1 (cf. chapitres 3 et 4), en faisant le lien entre les paradigmes géométriques que nous avons définis et l'organisation praxéologique mathématique proposée par Chevallard.

2.1. Type de tâche : donner la nature d'un triangle

Reprenons les exemples étudiés précédemment en 1.3.

Exercice 1 : Quelle est la nature du triangle ECO ci-contre ?



Exercice 2 : Soit un triangle ABC tel que :
AB = 3 cm, BC = 4 cm, AC = 5 cm.
Quelle est la nature de ABC ?

Le type de tâche T est : « déterminer la nature d'un triangle », cette nature pouvant être : rectangle, isocèle, équilatéral par exemple. Cette tâche peut être considérée dans G1 ou dans G2, elle va pouvoir se résoudre également dans G1 ou dans G2, ce qui va correspondre du point de vue des praxéologies à des techniques différentes, de même qu'à des technologies et théories différentes, comme le montre le tableau ci-dessous :

dans G1	**dans G2**
Tâches	
$\mathbf{T_1}$: déterminer la nature des triangles ECO et ABC, les dessins des triangles ECO et ABC étant considérés comme des Objets géométriques.	$\mathbf{T_2}$: déterminer la nature des triangles ECO et ABC, les dessins des triangles ECO et ABC étant considérés comme des Représentants d'OGT.
Exemples de techniques possibles	
τ_1 : pour ECO : utiliser la règle graduée et l'équerre pour faire des mesures de longueurs et des comparaisons d'angles ; pour ABC : utiliser la règle graduée et le compas pour construire le triangle puis l'équerre pour comparer les angles. On reste dans G1.	τ_2 : utiliser des théorèmes de géométrie euclidienne pour conclure. Avec cette technique, on peut conclure pour le triangle ABC, on ne peut rien faire pour le triangle ECO, qui n'est pas décrit de manière discursive. On reste dans G2.
Technologies.	
θ_1 : définitions des divers types de triangles. On reste dans G1, dans laquelle les définitions existent (formellement, ce sont les mêmes que dans G2, même si la nature des objets en jeu – physique, théorique- est différente).	θ_2 : définitions des divers types de triangles et réciproque du théorème de Pythagore : géométrie euclidienne. On reste dans G2.
Théories	
Θ_1 : géométrie euclidienne dans G2 ou géométrographie	Θ_2 : géométrie dans G3

J'attire l'attention du lecteur sur le fait qu'ici, une des tâches ne peut être résolue dans G2, faute d'informations adéquates dans l'énoncé.

Rappelons par ailleurs, d'une part que la géométrographie repose sur G2 dans le choix des constructions, celles-ci devant être validées par G2 et d'autre part qu'il y a d'autres théories qui s'intéressent à la précision des tracés de G1. C'est pour simplifier que je ne fais référence qu'à la géométrographie.

2.2. Type de tâche : construire une médiatrice

Intéressons-nous maintenant à un autre type de tâche T : « Construire la médiatrice de deux points M et N donnés ». Conformément à ce que j'ai décrit au chapitre 2, paragraphe 1.6 (cf. pages 81 et suivantes), cette tâche peut être proposée dans G1 ou dans G2. Dans les deux cas, de nombreuses techniques sont disponibles. Pour les décrire, je détaillerai d'abord quelques éléments de techniques possibles :

dans G1	**dans G2**
Tâches	
T : construire (i.e. tracer) aux instruments la médiatrice de M et N	**T'** : construire la médiatrice de M et N, i.e. donner une suite d'instructions permettant de réaliser de façon théorique cette figure
Techniques élémentaires	
τ_m : déterminer le **mi**lieu I de [MN] à la règle graduée τ_p : tracer à l'équerre la **p**erpendiculaire à [MN] passant par I τ_A : placer au compas un point **A** situé à égale distance des points M et N τ_B : placer au compas un point **B** situé à égale distance des points M et N	τ'_m : considérer I le milieu de [MN] τ'_p : considérer la perpendiculaire à [MN] passant par I τ'_A : considérer deux cercles sécants de même rayon. Soit A une intersection de ces cercles τ'_B : considérer deux cercles sécants de même rayon. Soit B une intersection de ces cercles
Exemples de techniques possibles (composées à partir des techniques élémentaires)	
Les techniques possibles sont alors : τ_1 : τ_m et τ_p τ_2 : τ_A et τ_B , en utilisant pour A et B la même distance τ_3 : τ_A et τ_B , en utilisant pour A et B des distances différentes τ_4 : τ_m et τ_A τ_5 : τ_p et τ_A Ces techniques sont a priori validées par la perception : c'est la perception qui permet d'affirmer que les distances sont égales, les angles droits. On est dans G1.	Les techniques possibles sont alors : τ'_1 : τ'_m et τ'_p τ'_2 : τ'_A et τ'_B , en utilisant pour A et B le même rayon τ'_3 : τ'_A et τ'_B , en utilisant pour A et B des rayons différents τ'_4 : τ'_m et τ'_A τ'_5 : τ'_p et τ'_A Ces points, droites, cercles sont des objets géométriques théoriques, donc dans G2.

<table>
<tr><th colspan="2">Technologies.</th></tr>
<tr><td colspan="2">Les technologies correspondantes sont autant de formulations des propriétés caractéristiques de la médiatrice d'un segment :
θ_1 : la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu
θ_2 : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment. Elle est déterminée par deux points quelconques à égale distance des extrémités du segment.
θ_3 et θ_4 : idem θ_2
θ_5 : la médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire au segment passant par un point à égale distance des extrémités du segment (cette formulation est peu habituelle !)
Ces propriétés sont des propriétés de la géométrie euclidienne. L'une d'entre elles étant choisie a priori comme définition de la médiatrice, les autres peuvent s'obtenir par application des règles de déduction. Toutes ces technologies peuvent être considérées comme relevant de G2.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Théories</th></tr>
<tr><td>$\mathbf{\Theta}$: géométrie euclidienne dans G2 ou géométrographie</td><td>$\mathbf{\Theta}$' : géométrie dans G3</td></tr>
</table>

Il s'agit donc d'une tâche qui est proposée dans G1 ou dans G2 selon la lecture que l'on en fait, pour laquelle les techniques correspondantes sont dans G1 ou G2, mais dont les technologies sont dans G2. Quant à la théorie, on peut à nouveau considérer qu'il s'agit de G2 ou de G3.

Notons cependant que le langage utilisé (construire) appelle avant tout un dessin, surtout pour le non-expert, et pousse ainsi plus spontanément vers G1 que vers G2.

2.3. Une praxéologie emprunte à divers paradigmes

Ainsi, ces exemples montrent qu'une praxéologie emprunte à divers paradigmes. Cela peut notamment être relié au point de vue selon lequel G1 s'intéresse à des objets physiques du monde réel, même s'ils sont partiellement abstraits (au sens de « enlever de ») pour en éliminer les caractéristiques non géométriques, tandis que G2 est une modélisation de cet espace réel. Ainsi G2 se présente tout naturellement le plus souvent comme l'espace des technologies auquel se réfèrent les techniques de G1.

3. Les paradigmes géométriques dans les instructions officielles de l'école et du collège

Il y a de nombreuses manières de s'intéresser à la géométrie enseignée à l'école et au collège du point de vue G1/G2. [Houdement-Kuzniak. 2000] l'étudient à partir des manuels scolaires. Je fais le choix ici de le faire à partir des instructions officielles, programme de 2002 et documents d'application de mathématiques pour l'école, programme et documents d'accompagnement également pour le collège. Il ne s'agit donc pas d'étudier précisément ce qui se passe effectivement dans la classe, mais de repérer les orientations données par les textes officiels.

Il est par ailleurs tout naturel, quand on s'intéresse à la géométrie destinée aux futurs professeurs des écoles, de s'intéresser à deux types de programmes scolaires de géométrie. D'une part, ceux de l'école élémentaire qui seront la référence pour leur travail d'enseignant, d'autre part ceux du collège qui, *grosso modo,* sont ceux sur lesquels ils vont être évalués dans la première partie de l'épreuve de leur concours de recrutement.

3.1. Les instructions de l'école

Dans le cycle 1, cycle des apprentissages premiers, la géométrie plane est quasiment, à juste titre, absente. Il s'agit essentiellement pour l'enfant d'apprendre à se repérer dans l'espace : *«repérer des objets ou des déplacements dans l'espace par rapport à soi » [Prog. école. 2002]*[65], à découvrir le monde qui l'entoure : *« décrire et représenter simplement l'environnement proche (classe, école, quartier...) »*. Or, ce monde n'est pas un monde en dimension 2, mais en dimension 3. Les objets que l'enfant manipule sont essentiellement des objets réels de l'espace. *« Bien que la désignation de certaines formes soit introduite à cette occasion (en particulier : carré, triangle, rectangle, rond), l'objectif principal n'est pas l'apprentissage d'un vocabulaire mathématique. »*. L'objectif est plutôt de repérer des propriétés des objets, pour pouvoir plus tard garder parmi ces propriétés celles qui sont géométriques. C'est donc uniquement G0 qui est en jeu en cycle 1.

---

[65] extrait des programmes du 14 février 2002, pour cet extrait et les suivants

En cycle 2, cycle des apprentissages fondamentaux, le travail de repérage dans l'espace continue. Il s'agit d'un travail dans le méso-espace qui est encore dans le cadre G0 : *« situer un objet, une personne par rapport à soi ou par rapport à une autre personne ou à un autre objet »*. Vient ensuite un travail de passage de G0 à G1 : *« situer des objets d'un espace réel sur une maquette ou un plan, et inversement situer dans l'espace réel des objets placés sur une maquette ou un plan »*, si l'on considère d'une part les objets réels dans G0 et d'autre part le plan ou la maquette comme un objet de G1. G1 apparaît ainsi au cycle 2 comme un espace de représentation des objets de G0.

Une grande partie des activités de géométrie plane est dans G1 ; les verbes clés sont : percevoir, vérifier, reproduire : *« distinguer ces figures (triangle, carré, rectangle, cercle), de manière perceptive »*, *« vérifier si une figure est un carré ou un rectangle en ayant recours aux propriétés (longueurs des côtés et angles droits) et en utilisant les instruments »*, *« reproduire ou compléter une figure sur papier quadrillé »*.

Certains auteurs distinguent à ce propos une géométrie perceptive d'une part et une géométrie instrumentée d'autre part. Par exemple :

> *« Pour être bref, on peut schématiquement décrire en trois temps dans l'appréhension des objets mathématiques par les élèves.*
> *a- Le temps de la géométrie "perceptive" : un carré est un carré parce que je le reconnais globalement comme tel (début de l'école primaire).*
> *b- Le temps de la géométrie "instrumentée" : un objet est un carré parce qu'à l'aide d'instruments adaptés (compas, équerre, règle), je peux vérifier certaines propriétés (fin de l'école primaire).*
> *c- Le temps de la géométrie déductive : un carré est un carré parce que, en fonction d'informations déduites, je peux en énoncer certaines propriétés (collège). »[Charnay. 1998, page 45]*

Les techniques correspondant à « percevoir » (à vue, sans instrument) ou à « vérifier » (avec instrument mais toujours avec la vue) sont certes différentes, mais l'objet sur lequel l'enfant travaille est le même, c'est toujours notre objet physique de G1. L'instrument est essentiellement là afin d'augmenter la précision. C'est pourquoi je rassemble ces deux aspects (perceptif et instrumenté) dans G1.

En cycle 3, le lien entre G0 et G1 se poursuit : *« utiliser un plan ou une carte pour situer un objet, anticiper ou réaliser un déplacement »*, mais il s'agit essentiellement de travailler dans G1. Les verbes clés sont presque les mêmes : percevoir *« percevoir qu'une figure possède un ou plusieurs axes de symétrie ... »*, vérifier *« ... et le vérifier en utilisant différentes* *techniques (pliage, papier calque, miroir) »*, tracer *« Tracer, à main levée, une droite perpendiculaire ou parallèle à une droite donnée. Tracer à l'aide de l'équerre la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné (sur la droite ou hors de la droite). »*[66]. La perception est fortement privilégiée, que ce soit dans la reconnaissance d'objets ou dans le tracé. Quand il s'agit de *« vérifier l'existence d'une figure simple dans une figure complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments »*, les commentaires du document d'application précisent : *« L'identification d'une figure peut être faite : -globalement (« à l'œil, il me semble que c'est un carré ») ; -par un repérage perceptif de propriétés : parallélisme, présence d'angles droits, égalité de longueurs de segments. Le recours aux instruments vient valider les hypothèses faites sur des propriétés supposées. »*. Les validations sont donc bien perceptives, instrumentées ou non : le travail est donc dans G1. Le recours aux instruments vient après l'explicitation des propriétés, et on peut comprendre qu'il s'agit donc de percevoir une figure, d'énumérer ses propriétés puis de les vérifier aux instruments pour valider la perception. Tout se passe alors dans G1. Une porte reste néanmoins ouverte me semble-t-il dans l'introduction du même chapitre dans le document d'application [Appl. Maths C3. 2002] où l'on peut lire : *« L'objectif principal est de permettre aux élèves de se familiariser avec les objets du plan et de l'espace et de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés »*. Ose-t-on lire ici une connaissance liée à G2 ?

Si l'on continue la lecture de [Appl. Maths C3. 2002] , on peut lire :

> *« L'argumentation à propos des outils utilisés, des propriétés mobilisées et des résultats obtenus constitue une part importante du travail des élèves. Dans cette perspective, quelques raisonnements peuvent être conduits, en particulier sur des figures dessinées à main levée. »*

Cet extrait montre me semble-t-il une volonté institutionnelle de ne pas attendre le collège pour commencer à mettre en place une géométrie de type G2. Conduire un raisonnement sur une figure à main levée – je dirai, avec les termes précédemment développés, « dessin géométrique à main levée »- nécessite bien qu'on la considère comme un représentant d'un OGT, parce que dans ces situations, la perception va souvent se trouver en contradiction avec la théorie (ou du moins son embryon). Autrement dit, cela nécessite que l'on travaille sur un

---

[66] [Appl. Maths C3. 2002. pages 31,32]

objet théorique, en mettant en place des validations de type hypothético-déductif. Et, s'il ne s'agit pas d'entrer dès le cycle 3 dans un enseignement de la démonstration, qui serait hors de propos, il s'agit bien **d'initier la démarche** qui consiste à passer des objets physiques aux objets théoriques et des validations de type perceptif à des validations de type hypothético-déductif, donc de G1 à G2 pour reprendre nos dénominations.
Cependant, le cycle 3 de l'école est fortement ancré dans G1.

3.2. Les instructions du collège

Le difficile passage de G1 à G2 sera plutôt le travail du collège :

« En sixième, ...la distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction. » [Articulation école collège. 2004]

même si de nombreuses activités sont encore dans G1 en sixième:

« tracer et reproduire sur papier blanc les figures suivantes : triangle, triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, rectangle, losange, carré, cercle. »[Prog. 6. 1995].

En troisième, l'essentiel des activités est dans G2. Mais certaines sont formulées dans un langage qui peut faire penser à G1 :

« Construire un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier connaissant son centre et un sommet. » [Prog. 3. 1999]

Comme je l'ai analysé en explicitant ce qu'est une construction dans G1 et dans G2 au chapitre 2, paragraphe 1.6 (cf. pages 81 et suivantes), le verbe « construire » peut aussi bien renvoyer à une tâche dans G1 que dans G2 (la tâche de construction est dans G1 si seul le dessin compte ; elle est dans G2 si l'essentiel est l'algorithme qui permet d'obtenir le dessin, ainsi que la justification de cet algorithme). Or, on peut lire dans le programme de troisième :

« Construire l'image par une rotation donnée d'un point, d'un cercle, d'une droite, d'un segment et d'une demi-droite »

et dans la colonne commentaire :

« les activités porteront d'abord sur un travail expérimental permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures à partir desquelles seront dégagées des propriétés d'une rotation (conservation des longueurs, des alignements, des angles, des aires). Ces propriétés pourront être utilisées dans la résolution d'exercices simples de construction. »

ou encore dans cette même colonne à propos des polygones réguliers :

« Les activités sur les polygones réguliers, et notamment leur tracé à partir d'un côté, porteront sur le triangle équilatéral, le carré, l'hexagone et éventuellement l'octogone. Certains d'entre elles pourront conduire à utiliser la propriété de l'angle inscrit. »

Ces commentaires mettent en évidence que, même si on demande effectivement le tracé, ce qui est recherché est l'**utilisation de propriétés** pour justifier l'algorithme de construction. Ainsi, pour cette activité, la partie intéressante du travail est la recherche d'une technologie dans G2 qui permette d'élaborer une technique dans G1 ou dans G2. Autrement dit, que la tâche soit envisagée initialement dans G1 (ce peut être le point de vue de l'élève : il faut produire un dessin) ou dans G2 (point de vue de l'enseignant), sa résolution nécessite une recherche de technologie dans G2.

En conclusion, G0 est essentiellement travaillée en cycle 1, G1 en cycles 2 et 3 de l'école élémentaire, G2 se met en place au collège[67].

Cette conclusion confirme le travail de [Houdement Kuzniak . 2000] qui concluent (rappelons qu'ils n'ont travaillé que sur le cycle 3 dans cet article):

« La géométrie de l'école, reflétée par les manuels, est une géométrie naturelle (géométrie I) où le mode de validation est le sensible. »

4. La médiatrice dans les manuels

Ce travail de thèse autour des paradigmes G1 et G2 nécessite de manipuler des objets géométriques. L'un d'eux sera beaucoup exploité, il s'agit de la médiatrice. Elle est introduite et étudiée au collège, en classe de sixième, souvent en lien avec la symétrie axiale. Il apparaît donc pertinent d'effectuer une analyse de ces manuels pour étudier la manière dont cette médiatrice est présentée, tant du point de vue de la définition, que des propriétés ou des procédures de construction proposées aux élèves.

Une analyse a été effectuée avec les nouveaux manuels de sixième, tous sortis à la rentrée 2005. Les manuels suivants ont été étudiés, par ordre alphabétique d'éditeur :

[67] on remarquera que si divers éléments des textes officiels nous permettent ici de conclure que, *grosso modo*, G1 est le paradigme de l'école et G2 celui du collège, rien dans les textes ne nous explique **pourquoi il faut** effectuer ce changement de paradigme.

1. Collection Prisme. Editions Belin
2. Collection MB. Editions Bordas
3. Editions Bréal
4. Editions Delagrave
5. Collection Dimathème. Editions Didier
6. Collection Diabolo. Editions Hachette Education.
7. Collection Repère. Editions Hachette Education
8. Collection Multi-Math. Editions Hatier
9. Collection Triangle. Editions Hatier
10. Editions Magnard
11. Collection Domino. Editions Nathan
12. Collection Transmath. Editions Nathan

Du point de vue des Instructions Officielles de la clase de sixième, on peut lire dans [Prog. 6. 2004, page 13] :

> *« Médiatrice d'un segment : Connaître et utiliser la définition de la médiatrice ainsi que la caractérisation de ses points par la propriété d'équidistance. »*

On peut en déduire que la définition envisagée est celle à partir de milieu et perpendiculaire. C'est bien sûr un élément à vérifier. De même, il est intéressant d'analyser la propriété d'équidistance des points : est-elle présentée comme une caractérisation des points de la médiatrice (comme indiqué dans le B. O.) ou de la médiatrice elle-même ? Deux autres aspects seront examinés : les procédures de tracé d'une médiatrice, ainsi que les justifications proposées pour ces tracés. Cela permettra par la suite d'analyser les productions d'étudiants dans une tâche de construction de médiatrice et de justification de cette construction.

Le lecteur trouvera ci-dessous un tableau récapitulatif des informations repérées dans ces manuels. Pour faciliter la lecture de ce paragraphe, ce tableau est également reproduit en annexe 3.

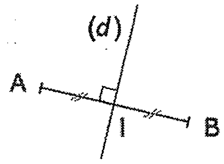
Manuel :	1 : Prisme	2 : MB	3 : Bréal	4 : Delagrave	5 : Dimathème	6 : Diabolo	7 : Repère	8 : Multi-Math	9 : Triangle	10 : Magnard	11 : Domino	12 : Transmath
La médiatrice est définie dans un chapitre avant la symétrie	X	X		X	X				X	X	X	X
La médiatrice est définie dans un chapitre autour de la symétrie			X			X	X	X				
La médiatrice est définie comme la droite perpendiculaire à un segment passant par son milieu	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Propriété : Si un point appartient à la médiatrice, alors il est situé à la même distance des extrémités de ce segment	X	X	X	X		X	X			X		X
Propriété : Si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.	X	X	X	X		X	X			X	X	X
Propriété : la médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de ce segment.					X			X	X			
La construction de la médiatrice à la règle graduée et à l'équerre est explicitement présentée	X				X				X	X	X	
La construction de la médiatrice au compas, avec deux intersections de cercles ou d'arcs de cercles de même rayon est explicitement présentée		X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
La construction de la médiatrice au compas, avec deux intersections de cercles ou d'arcs de cercles de rayons différents est explicitement présentée	X			X								
La construction à la règle et au compas décrit la construction de points équidistants	X			X			X					
La construction à la règle et au compas décrit la construction de cercles		X		X	X							
La construction à la règle et au compas décrit la construction d'arcs de cercles			X					X	X	X	X	X
Un lien est effectué entre la construction de la médiatrice à la règle et au compas et la propriété d'équidistance	X	X		X			X					

4.1. Définition et propriétés de la médiatrice dans les manuels

Dans tous ces manuels, perpendiculaire et milieu servent, conformément au programme, à définir la médiatrice :

Définition

La **médiatrice d'un segment** est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui coupe ce segment en son milieu.
(*d*) est la médiatrice du segment [AB].

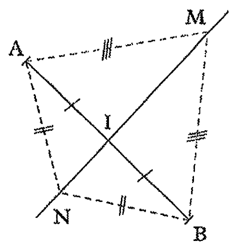


[Prisme. 6ème. 2005, page 141]

tandis que l'équidistance est une propriété. Cette équidistance peut être abordée comme caractéristique de la médiatrice comme le montre l'exemple ci-contre. C'est le cas dans 3 manuels sur les 12. Il s'agit alors de considérer la médiatrice comme un ensemble de points vérifiant une propriété particulière. Cette propriété pourrait être considérée comme une autre définition de la médiatrice, mais ce n'est pas le cas dans ces manuels. Cette définition a cependant été rencontrée dans un ouvrage un peu plus ancien [Pythagore. 6ème. 1996, page 135].

Propriété

La médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de ce segment.

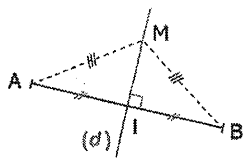


[Dimathème. 6ème. 2005, page 171]

L'équidistance est plus souvent abordée comme propriété des points de la médiatrice. C'est le cas dans 9 manuels sur les 12, comme dans l'exemple ci-contre ([Prisme. 6ème. 2005, page 141]).

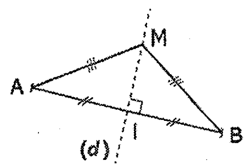
Propriété

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors il est situé à la même distance des extrémités de ce segment.
Le point M appartient à la médiatrice (*d*) du segment [AB], donc : MA = MB.



Propriété

Si un point est situé à la même distance des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.
MA = MB, donc : le point M appartient à la médiatrice (*d*) du segment [AB].



Il ne s'agit plus d'une propriété de la médiatrice, mais d'une propriété des points de la médiatrice, ce qui semble plus conforme au programme qui parle de *« caractérisation de ses points par la propriété d'équidistance »* et non de caractérisation de la médiatrice elle-même. Cette propriété peut être formulée sous forme d'une équivalence :

M appartient à la médiatrice de [AB] $\Leftrightarrow$ MA = MB

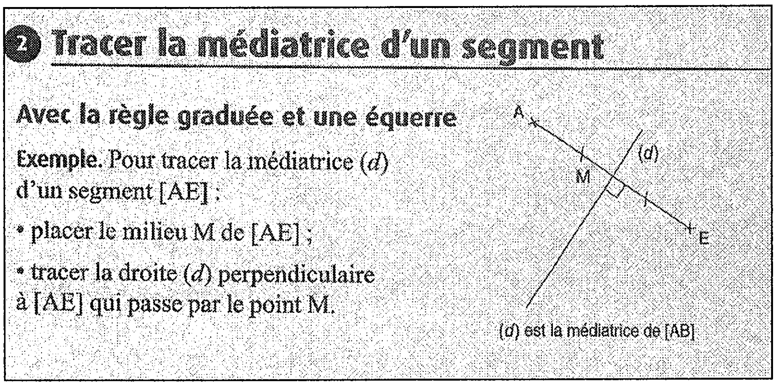
Elle est explicitée pour les élèves en décomposant l'implication et sa réciproque (sauf dans le manuel 11 qui ne présente que la réciproque, juste avant de proposer la construction à la règle et au compas).

Du point de vue des paradigmes géométriques, dans ces parties de définition ou de propriétés, aucun indice particulier n'empêche ni n'oblige l'élève à se situer dans G1 ou dans G2.

4.2. Procédures de construction de la médiatrice dans les manuels

Certains manuels explicitent la construction de la médiatrice à la règle graduée et à l'équerre. C'est le cas de 5 manuels sur 12 seulement.

Les autres proposent un dessin de la médiatrice à côté de la définition, sans expliciter la procédure correspondante. Ceux qui présentent la construction le font de manière très succincte, comme dans l'exemple ci-contre :



2 Tracer la médiatrice d'un segment

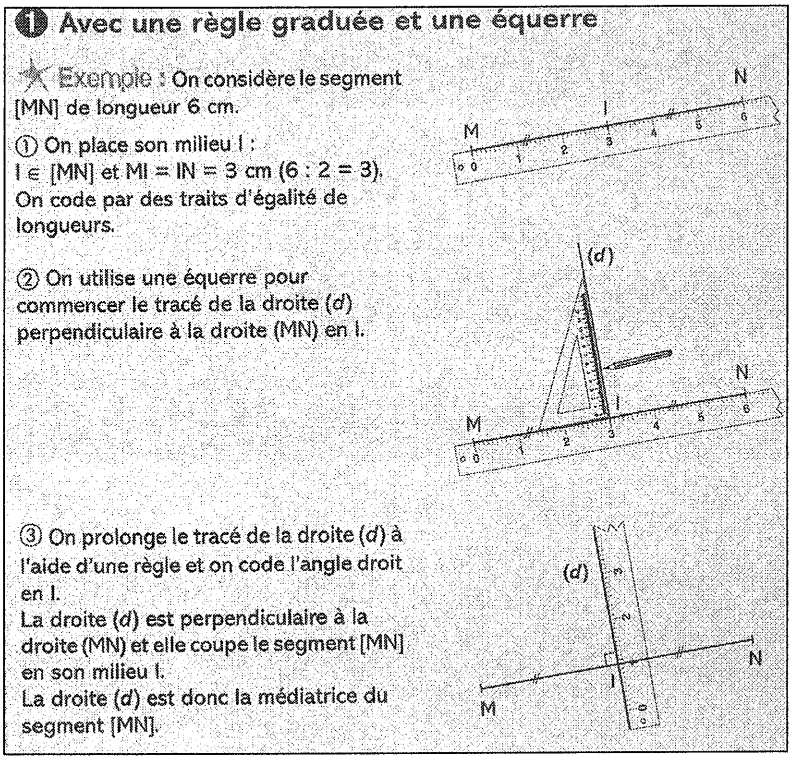
Avec la règle graduée et une équerre

Exemple. Pour tracer la médiatrice (*d*) d'un segment [AE] :

- placer le milieu M de [AE] ;
- tracer la droite (*d*) perpendiculaire à [AE] qui passe par le point M.

[Triangle. $6^{ème}$. 2005, page 142]

ou au contraire avec de nombreux détails sur la manière technique d'effectuer le tracé, comme le montre l'extrait ci-contre de [Prisme. 6ème. 2005, page 142] :



1 Avec une règle graduée et une équerre

Exemple : On considère le segment [MN] de longueur 6 cm.

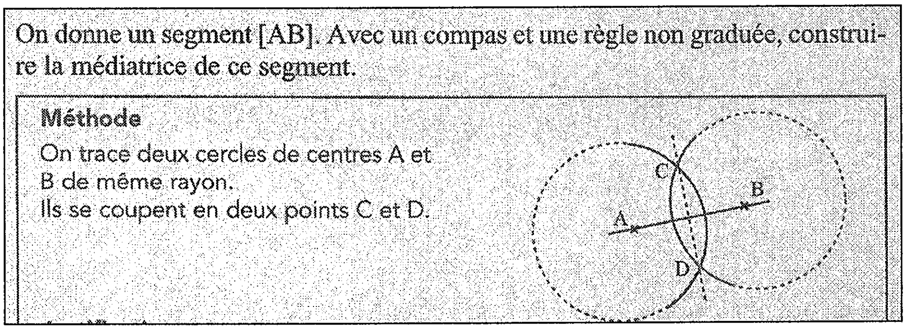
① On place son milieu I :
I ∈ [MN] et MI = IN = 3 cm (6 : 2 = 3).
On code par des traits d'égalité de longueurs.

② On utilise une équerre pour commencer le tracé de la droite (*d*) perpendiculaire à la droite (MN) en I.

③ On prolonge le tracé de la droite (*d*) à l'aide d'une règle et on code l'angle droit en I.
La droite (*d*) est perpendiculaire à la droite (MN) et elle coupe le segment [MN] en son milieu I.
La droite (*d*) est donc la médiatrice du segment [MN].

Tous présentent explicitement une méthode pour construire la médiatrice à la règle non graduée et au compas (sauf le manuel 6 qui présente une méthode pour construire le symétrique d'un point, mais qui revient à la construction de la médiatrice à la règle et au compas).

Certains manuels explicitent et visualisent les **cercles** à tracer, comme dans l'exemple ci-contre.
C'est le cas de 3 manuels sur 12.

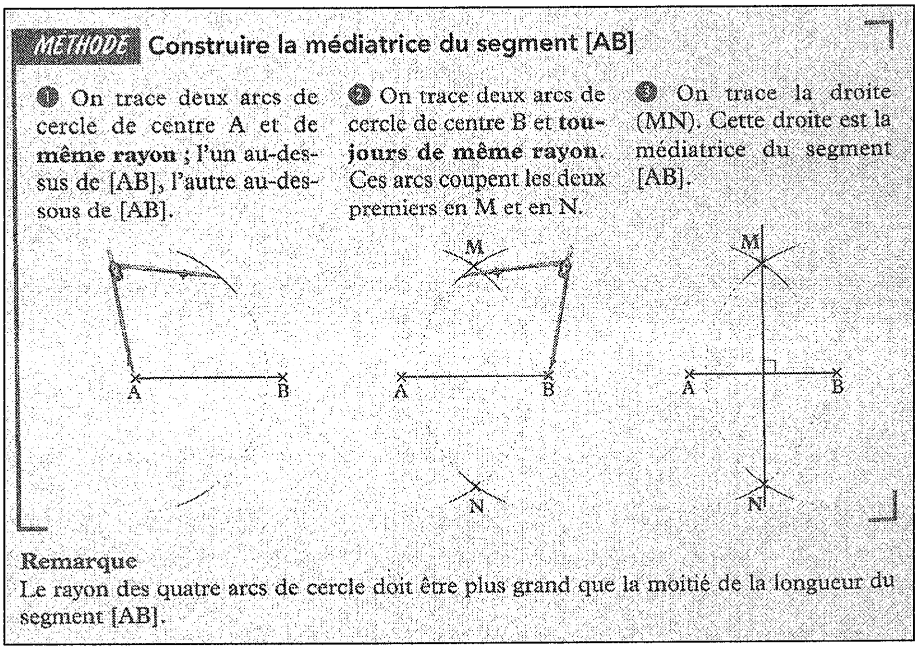


On donne un segment [AB]. Avec un compas et une règle non graduée, construire la médiatrice de ce segment.

Méthode
On trace deux cercles de centres A et B de même rayon.
Ils se coupent en deux points C et D.

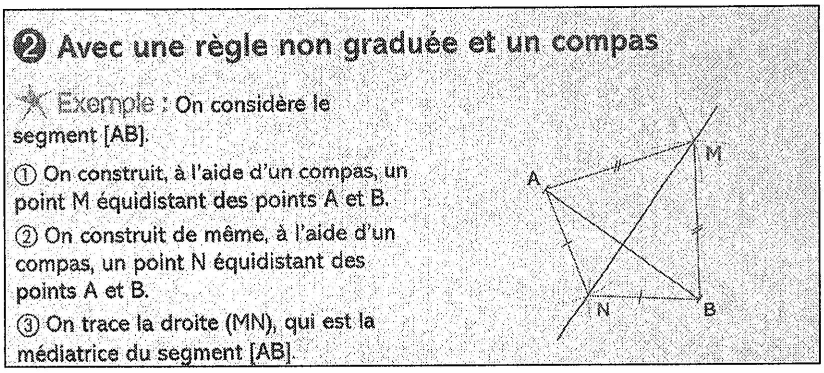
[MB6. 6ème. 2005, page 173]

D'autres explicitent et visualisent les **arcs de cercles**. C'est le cas par exemple de [Bréal. 6ème. 2005, page 210] (ci-contre). Ce type de présentation est le plus fréquent : 6 manuels sur 12.



Dans cet exemple, la description de la procédure pose d'ailleurs un problème : le concept de « au-dessus » et « au-dessous » n'est pas une caractéristique des objets géométriques et posera problème lorsque le segment [AB] sera vertical.

Mais cette présentation peut aussi être faite en explicitant le fait que l'on trace des **points équidistants des extrémités du segment**, comme dans l'exemple ci-contre ([Prisme. 6ème. 2005, page 142]).



C'est le cas de 3 manuels sur 12 : 1 - [Prisme. 6ème.2005], 4 - [Delagrave. 6ème. 2005] et 7 - [Repère. 6ème. 2005]. Cette présentation met l'accent sur la propriété des points obtenus plus que sur la manière de les obtenir, même si le compas est néanmoins cité (n'oublions pas qu'il s'agit de manuels de sixième). Toutes ces constructions sont en sixième envisagées dans G1 : aucun élément ne permet de mettre le dessin en distance de l'objet géométrique pour le considérer comme Représentant de l'OGT. Néanmoins, ce dernier type de présentation permet plus facilement par la suite le passage à G2 que la présentation du manuel précédent, qui détaille la technique à appliquer (connaissance procédurale) plus que l'objet géométrique à construire (connaissance déclarative).

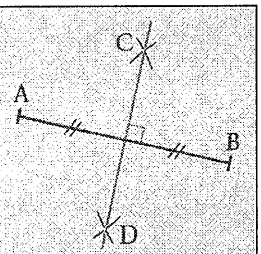
Notons par ailleurs que [Prisme. 6ème. 2005, page 142] est le seul à proposer une configuration de type « cerf-volant convexe » non losange. Un autre manuel ([Delagrave. 6ème. 2005, page 161]) propose une construction standard puis une construction avec deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment pour les situations *« où on ne peut faire autrement pour des raisons pratiques »*. Dans tous les autres cas, les cercles tracés ont tous le même rayon. Dans les manuels étudiés ici, par contre, ce rayon des cercles n'est jamais sur le schéma proposé égal à la longueur du segment dont on veut construire la médiatrice.

4.3. Justification des procédures de construction

Les trois manuels qui proposent une procédure de construction en explicitant le fait que l'on place des points équidistants des extrémités du segment justifient ainsi, au moins en partie, la procédure de construction, même si cette justification est parfois très rapide, comme c'est le cas dans [Repère. 6ème. 2005, page 190] :

Construction d'une médiatrice en utilisant un compas

Pour construire la médiatrice d'un segment [AB] :
→ on utilise un compas pour construire deux points C et D situés à égale distance des points A et B ;
→ on trace la droite reliant ces deux points C et D.



La droite (CD) est la médiatrice du segment [AB].

Dans [Delagrave. 6ème. 2005, page 160], dans la partie « Comment démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment ? », la justification est explicite. Il propose en effet une première méthode de construction de la médiatrice basée sur la perpendicularité et le milieu, et une seconde en ces termes :

> *« Méthode 2 : Pour démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment, il suffit de montrer qu'elle passe par deux points (distincts) équidistants des extrémités du segment ».*

juste avant d'expliciter la procédure de construction, exprimée en termes de tracé de points équidistants des extrémités du segment.

Parmi les neuf manuels ne parlant pas de points équidistants dans la procédure de construction de la médiatrice à la règle et au compas, un seul, [MB6. 6ème. 2005, page 173], justifie en détail la construction juste après avoir explicité la méthode :

Justification
Les rayons des cercles sont égaux : CA = CB et DA = DB.
On sait que : *les points C et D sont équidistants des points A et B.*
Or : *si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il appartient à la médiatrice de ce segment.*
Donc : *les points C et D appartiennent à la médiatrice du segment [AB].*
Or : *deux points définissent une seule droite.*
Donc : *la droite (CD) est la médiatrice du segment [AB].*

Ces deux derniers manuels (4 : [Delagrave. 2005] et 2 : [MB6. 2005]) sont les deux seuls qui explicitent que deux points équidistants suffisent à définir la médiatrice, même si le premier ne le justifie pas. Les autres utilisent évidemment cette propriété pour élaborer la construction de la médiatrice à la règle et au compas, mais de manière totalement implicite pour la plupart, partiellement implicite pour les deux autres qui n'explicitent pas que deux points suffisent mais qui explicitent qu'il s'agit de tracer deux points équidistants des extrémités du segment (1 :[Prisme. 2005, page 142] et 7 : [Repère. 2005, page 190]). Autrement dit, seuls ces quatre manuels font le lien entre la technique proposée et la technologie correspondante. Dans les huit autres manuels, l'élève est invité à mémoriser une technique de tracé dans G1, sans tenir compte de la technologie correspondante de G2. Le passage de G1 à G2 sera donc rendu difficile par la suite.

Par ailleurs, la propriété : « si M et N sont deux points équidistants des extrémités du segment [AB], alors (MN) est la médiatrice de [AB] » est également très rarement explicitée dans les manuels. Elle est pourtant très souvent utilisée, que ce soit comme on l'a vu implicitement dans la construction standard de la médiatrice, ou plus tard pour démontrer qu'une droite est la médiatrice d'un segment. Elle peut certes être explicitée par l'enseignant à l'oral. Dans [Bordas. Livre du professeur. 6ème. 1996. page 121], une indication est en effet donnée à ce sujet :

> *« Les élèves découvrent ici que des points équidistants des extrémités d'un segment se trouvent sur la médiatrice de ce segment. Comme deux points suffisent pour tracer une droite, on peut ainsi dégager une construction de la médiatrice d'un segment à l'aide du compas. »*

Cependant, cette remarque n'est jamais explicitée aussi clairement dans les manuels de l'élève, ni probablement dans le cahier de l'élève.

4.4. En conclusion sur la médiatrice dans les manuels

Les manuels définissent la médiatrice à partir de milieu et perpendiculaire, l'équidistance étant alors une propriété caractéristique.

Cette équidistance est présentée sous la forme « la médiatrice de [AB] est l'ensemble de tous les points à égale distance de A et de B » dans un quart des manuels étudiés ; dans tous les autres cas, il s'agit d'une propriété des points de la médiatrice, propriété qui se présente sous forme d'une implication et de sa réciproque :

$$\text{M appartient à la médiatrice de } [AB] \Rightarrow \text{M est à égale distance de A et de B}$$

$$\text{M est à égale distance de A et de B} \Rightarrow \text{M appartient à la médiatrice de } [AB]$$

Les manuels prennent rarement en charge l'explicitation du lien entre la procédure de construction de la médiatrice à la règle et au compas et la propriété d'équidistance (un quart des cas). Autrement dit, ils proposent une technique de construction de la médiatrice (de G1), mais ne donnent pas la technologie correspondante (de G2). Ils explicitent encore plus rarement le fait que deux points équidistants des extrémités d'un segment permettent de définir la médiatrice de ce segment.

Chapitre 4

Chapitre 4 : Présentation du questionnaire, des grilles d'analyse et des hypothèses fines de recherche

Un premier questionnaire a été proposé à plus de 850 étudiants de première année d'IUFM ou de CFP[68] au début de leur formation pour devenir professeurs des écoles, dans le but de faire émerger leur rapport aux paradigmes géométriques G1 et G2. Je vais dans une première partie présenter ses différents items, ainsi que le codage utilisé initialement par le groupe de formateurs qui a préparé ce questionnaire puis encodé les réponses. A cette étape, je ne détaillerai pas les hypothèses de recherche sous-jacentes car ce sont celles de l'équipe de recherche initiale, et je n'en dispose pas d'une trace écrite. Il est certes possible de les reconstituer (au moins en partie) d'après le codage choisi mais je préfère détailler ces hypothèses lors de la troisième partie de ce chapitre, en même temps que j'expliciterai le codage que j'ai finalement mis en place pour effectuer mes analyses ultérieures. Avant cela, je montrerai dans une deuxième partie comment les premières analyses m'ont fait choisir de recoder entièrement les productions des étudiants avant de poursuivre l'étude en mettant en évidence les problèmes rencontrés et les conséquences pour la suite de l'organisation du travail. Dans une quatrième partie, je présenterai les questionnaires suivants ainsi que les grilles de codages et les hypothèses de recherche correspondantes. L'analyse des résultats sera effectuée dans le Chapitre 5 : Présentation des résultats.

1. Présentation du questionnaire et de la grille d'analyse initiale

Ce questionnaire a été élaboré par quelques formateurs de l'IUFM de Lorraine[69], dans le cadre d'une recherche dirigée par B. Parzysz. Une première analyse des résultats a été publiée dans [Nicolas-Lorrain. 2000]. La question de départ est formulée ainsi :

[68] Centre de Formation Pédagogique, équivalent des IUFM pour la formation des enseignants du premier degré, dans l'enseignement catholique. Je suis formatrice au CFP d'Avrillé, dans la banlieue d'Angers.

[69] Je tiens à remercier chaleureusement ici les collègues de l'IUFM de Loraine, qui ont construit ce questionnaire, l'ont fait passer à leurs étudiants et m'ont fourni leurs résultats, ainsi que ceux de l'équipe du GreDiM de l'IUFM d'Orléans-Tours qui ont fait passer cette version puis la suivante, et m'ont permis de participer à leur recherche. Pour l'équipe de Lorraine : Anne-Claire DALSTEIN, Jacqueline EURIAT, Isabelle LAURENÇOT, Pol LE GALL, Brigitte NICOLAS-LORRAIN, Catherine PAQUIN, Bernard VARIN ; et pour

« Les étudiants de l'IUFM sont dans leur grande majorité d'origine non scientifique. Lorsque, avec leurs formateurs, ils font ensemble de la géométrie, travaillent-ils sur les mêmes objets ? » [opus cit., page 165]

Cette question est évidemment au cœur de ma problématique. Je l'ai reformulée à la fin du chapitre précédent à la lumière du cadre théorique que j'ai explicité : « Comment se comportent les PE1, en début de formation, du point de vue des paradigmes G1/G2 ? »

L'objectif de ce questionnaire peut être détaillé. Il s'agit

- d'analyser les **arguments utilisés dans l'identification de figures géométriques** simples. Ces arguments peuvent être de type perceptif, et donc dans G1, ou hypothético-déductif, donc dans G2.
- de faire un état des lieux des procédures utilisées par des futurs professeurs des écoles, en début de formation, dans des tracés simples de géométrie plane, notamment en ce qui concerne la médiatrice d'un segment et d'**analyser les arguments utilisés pour justifier ces constructions**. C'est un moyen d'accéder aux paradigmes géométriques dans lesquels se situent les étudiants. Il s'agit notamment de repérer les étudiants capables d'expliciter la technologie de G2 qu'ils appliquent pour effectuer un tracé dans G1, et ceux qui ne le sont pas

Du point de vue des paradigmes G1/G2, il s'agit d'étudier le rapport à la géométrie des PE1 avant leur formation pour pouvoir élaborer une formation adaptée, en mettant si possible en évidence des « profils d'étudiants ».

Le questionnaire comporte 9 items que nous allons rapidement présenter, en même temps que le codage utilisé antérieurement à ma recherche[70].

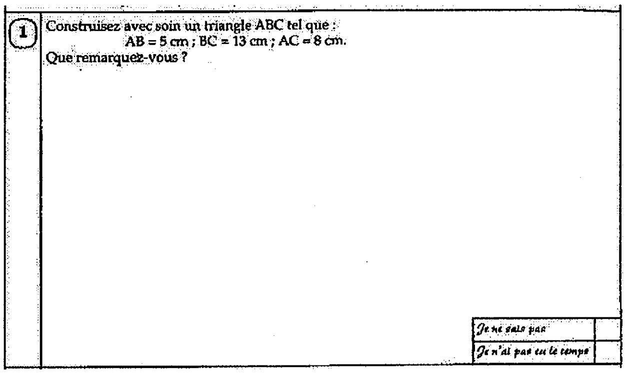
---

celle d'Orléans-Tours : Ghislaine CAILLETTE, André GAGNEUX, Jean-Philippe GEORGET, Joëlle JAN-GAGNEUX, Claude LANDRÉ, Jean-Claude LEBRETON, Laurence MAGENDIE, Edith RENON, Jean TOROMANOFF, Patrick WIERUSZEWSKI ainsi que Claudine RAPPENEAU, conseillère pédagogique.

[70] Le lecteur trouvera le test initial en annexe 4 et sa première grille de codage en annexe 5.

1.1. Item 1

L'item 1 demande la construction d'un triangle :



Grille d'analyse initiale

<u>QUESTION 1 : tracer le triangle</u>

<u>Q</u>.1. P : Procédures de construction

A : tracés au compas : cercles sécants, triangle
B : tracés au compas : cercles tangents, triangle aplati
C : tracés au compas : cercles extérieurs, pas de triangle
D : tracés à la règle : ceux qui savent a priori
E : tracés à la règle : ceux qui tâtonnent
F : autres

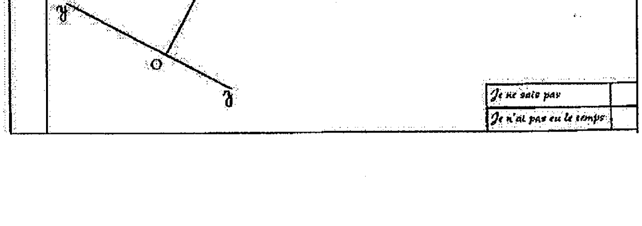
<u>Q</u>.1. C : Commentaires

1 : aucun
2 : en accord avec le dessin
3 : en désaccord avec le dessin
4 : divers
α : référence à l'inégalité triangulaire

Les dimensions de ce triangle sont évidemment choisies de sorte qu'il y ait problème : le triangle est « aplati ». Cette situation classique a déjà été analysée, notamment dans [Arsac. 1989]. Le codage s'intéresse aux procédures utilisées, puis aux commentaires effectués. En particulier, on repère les références à l'inégalité triangulaire, ou plus précisément ici à l'égalité 13 = 8 + 5 qui implique que B appartient à $[AC]$, dans l'espoir de pouvoir les relier aux procédures utilisées.

1.2. Item 2

L'item 2 demande la nature d'un angle, et la justification de la réponse :



Grille d'analyse initiale

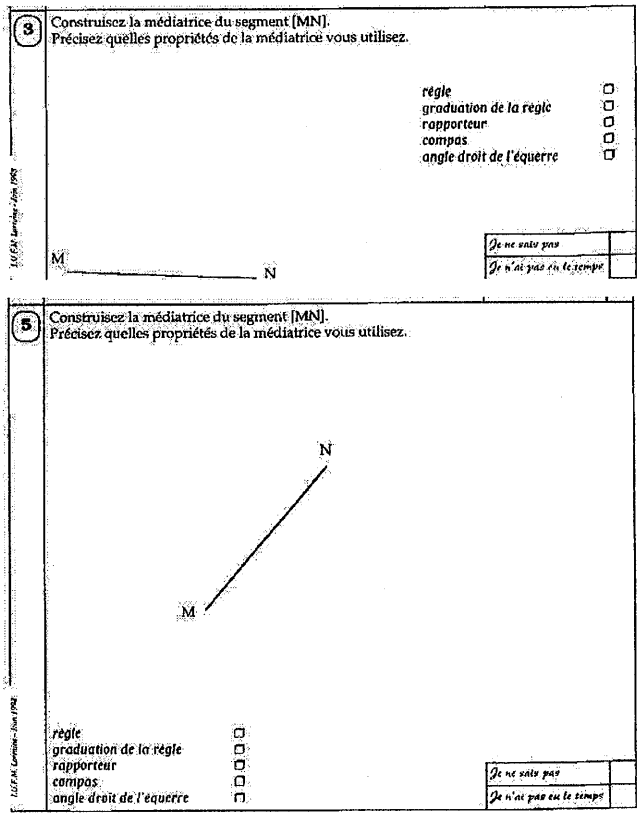
<u>QUESTION 2 : xôy est-il droit ?</u>

1 : on ne peut pas savoir
2 : utilisation d'instruments pour vérifier (équerre, rapporteur)
3 : utilisation de figure annexe
4 : paraphrase (droites perpendiculaires, angle de 90°)
5 : utilisation du théorème de Pythagore
6 : oui, sans justificatif
7 : non, il n'est pas droit

Rien ne permet sur le dessin de répondre si l'on se place dans le cadre G2 ; l'utilisation d'instruments quant à elle conduit évidemment à une réponse dans le cadre G1.

1.3. Items 3 et 5

Les items 3 et 5 demandent le tracé d'une médiatrice, ainsi que les propriétés de la médiatrice utilisées pour ce tracé :



Grille d'analyse initiale

QUESTION 3 : construire une médiatrice

Q.3.I: Instruments

A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q.3.P : Procédures de construction

A : une intersection d'arcs de cercle
B : une intersection d'arcs de cercle + milieu
B* : une intersection d'arcs de cercle + angle droit
C : deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment
C* : deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment
D : trois intersections d'arcs de cercle
E : milieu et angle droit
F : autre

Q.3.C: Commentaires

1 : pas de commentaire
2 : adéquation du commentaire et de la figure
3 : non-adéquation du commentaire et de la figure

la grille d'analyse de l'item 5 est identique

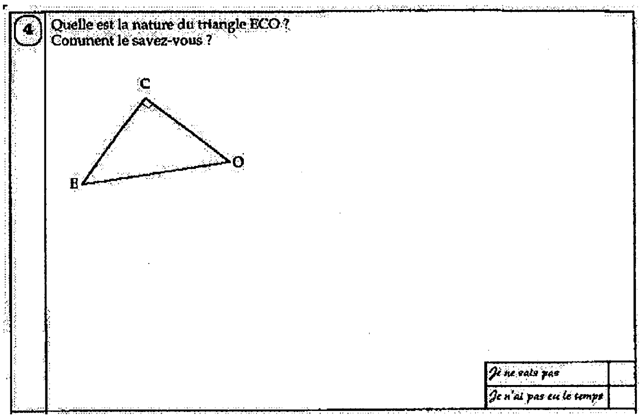
Cette consigne revient à deux reprises dans le questionnaire. Une variable didactique justifie cette reprise : la position du segment dans l'espace de travail, en bas de la feuille dans l'item 3, au milieu de la feuille dans l'item 5. Il s'agit bien d'une variable didactique en ce sens où cette caractéristique influe sur les procédures utilisées par les PE1.

Dans l'item 3, la position en bas de la feuille rend difficile une procédure attendue comme « classique » : deux intersections de cercles de part et d'autre du segment. On demande, et ce sera le cas dans d'autres questions de tracé, de noter les instruments utilisés, et de préciser la (les) propriété(s) de la médiatrice utilisée(s). Le codage prend en compte dans un premier temps les instruments cochés par l'étudiant. Dans un deuxième temps, il s'intéresse aux procédures utilisées pour effectuer le tracé, puis enfin aux commentaires, qui correspondent à « Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez ». Devant la diversité des commentaires possibles, le choix est fait de ne pas prendre en compte le contenu même du commentaire, mais le fait que celui-ci soit ou non cohérent avec la procédure de tracé utilisée.

La seule différence dans l'item 5 est la position du segment dans l'espace réservé au tracé : le segment [MN] est placé en plein milieu de la feuille, permettant toutes les procédures pour le tracé de la médiatrice. Les modalités de codage sont les mêmes que celles de la question 3, pour qu'une comparaison des résultats puisse avoir lieu. Une analyse détaillée des réponses attendues sera faite plus loin, en présentant le codage définitif mis en place.

1.4. Item 4

L'item 4 demande la nature d'un triangle, ainsi que la justification de la réponse :



Grille d'analyse initiale

<u>QUESTION 4 : nature du triangle ECO</u>

<u>Q.4.N: Nature</u>

A : rectangle
B : rectangle et isocèle
C : autre

<u>Q.4.J : Justification</u>

A : angle droit marqué sur le dessin
B : mesure des côtés
C : autre

La particularité de ce triangle est de présenter un angle droit effectivement repéré par le codage mathématique correspondant. Si l'on se place dans le cadre G2, c'est la seule propriété qu'on peut affirmer de ce triangle. Par contre, si l'on se place dans le cadre G1, le triangle semble en plus isocèle, sans que rien ne l'indique explicitement : en effet, l'égalité des côtés CO et CE n'est pas codée. La formulation de la demande de justification essaye de ne pas influencer l'étudiant vers une démonstration et se veut la plus neutre possible, admettant tout type de justification. Le codage repère la réponse ainsi que la justification donnée.

1.5. Item 6

L'item 6 est en deux parties. Dans un premier temps, on demande de tracer un losange, et de préciser les instruments utilisés ; dans un second temps, une définition du mot « losange » est demandée. Selon les groupes, une version sera donnée sur papier blanc, comme ci-dessous, ou sur papier quadrillé.

6

6.1 Construisez un losange ABCD en utilisant les instruments que vous voulez.
Marquez en couleur les deux premiers sommets placés.

règle ☐
graduation de la règle ☐
rapporteur ☐
compas ☐
angle droit de l'équerre ☐

Je ne sais pas
Je n'ai pas eu le temps

6.2 Donnez une définition du losange.

Je ne sais pas
Je n'ai pas eu le temps

Grille d'analyse initiale

QUESTION 6: un losange

Q.6.I: Instruments

A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q. 6. 1. T: Tracé initial

A : à partir d'une diagonale
B : à partir d'un côté

Q. 6. 1. S : Support

Q : utilisation spécifique du papier quadrillé
U : utilisation, à un moment, d'une procédure papier uni (on ne code pas cette procédure)

Q.6.1.D : Dessin obtenu

E : polygone autre qu'un losange
F : carré

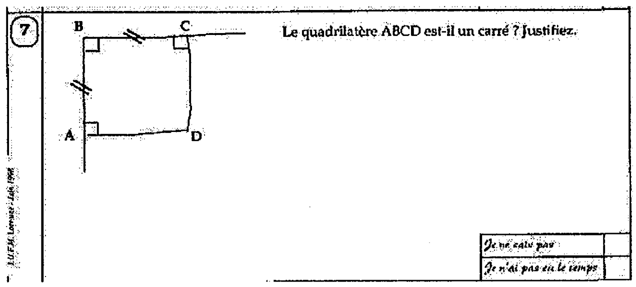
Q.6.2 : définition

A : quadrilatère ayant 4 côtés isométriques
B : parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques
C : parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires
D : juxtaposition de deux triangles isocèles symétriques
E : fourre-tout de propriétés
F : définition fausse
X : il est noté des propriétés qui empêchent d'obtenir un carré

Le codage repère dans un premier temps les instruments utilisés. Dans un second temps, il note si la procédure est ou non spécifique du papier quadrillé (utilisation par exemple du quadrillage pour faire des diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu) ou au contraire s'il s'agit d'une procédure « passe partout » de type « papier uni » (utilisation par exemple du compas), puis la nature du polygone dessiné. Enfin, il code la définition proposée.

1.6. Item 7

L'item 7 demande la nature d'un « quadrilatère » dessiné et codé :



Grille d'analyse initiale

<u>QUESTION 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?</u>

Q. 7. D : Dessin

O : oui
N : non

Q. 7.J: Justification

A : 3 angles droits et 2 côtés isométriques
B : pas assez d'angles droits et / ou de côtés isométriques
C : manque de précision

Dans le paradigme G2, les informations permettent de conclure qu'il s'agit d'un carré mais dans le paradigme G1, la figure proposée est suffisamment imparfaite pour qu'à l'œil, on ne la considère pas comme un carré. Le codage permet de repérer si l'étudiant considère ou non la figure proposée comme un carré et le type de justification effectuée.

1.7. Item 8

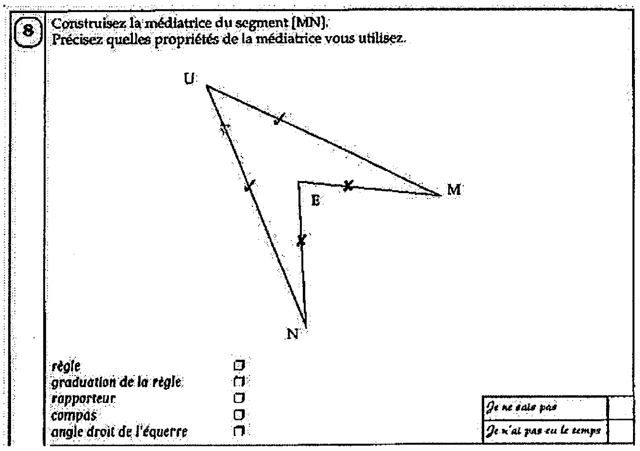
L'item 8 fait suite aux items 3 et 5.

Grille d'analyse initiale

<u>QUESTION 8: construire une médiatrice</u>

Q.8.1: Instruments

A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre



Q.8.P : procédures de tracé

A : tracé direct (joindre les points E et U)
B : tracé mixte 1 E ou U + milieu et / ou perpendiculaire
C : tracé mixte 2 E ou U + une intersection d'arcs de cercle
C* : tracé mixte 2* : E ou U + une intersection d'arcs de cercle du côté des points E et U
D : deux intersections d'arcs de cercle
E : tracé incorrect

Q. 8. T : nature du tracé

a : le segment [MN] est tracé
b : la médiatrice est une droite
c : la médiatrice est considérée comme un segment
d : la médiatrice est considérée comme une demi-droite
e : interprétation ambiguë

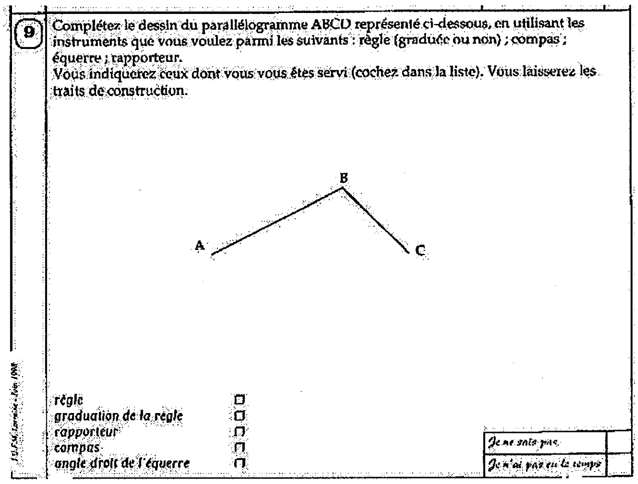
Q.8.C : commentaires

1 : sans commentaire
2 : équidistance des points
3 : référence au triangle isocèle
4 : divers

Une médiatrice est à nouveau demandée dans cette question, mais cette fois, le contexte a changé : on est en présence d'un quadrilatère concave possédant deux paires de côtés consécutifs de même longueur. Le segment [MN] est la diagonale extérieure du quadrilatère. La médiatrice cherchée est portée par la diagonale intérieure. Cette situation présente la particularité que le segment [MN] dont on doit tracer la médiatrice n'est pas lui-même tracé. Le codage des réponses va bien sûr s'intéresser aux instruments et à la procédure utilisés. Il va en outre noter des informations sur la nature des tracés effectués pour la médiatrice, ainsi que le fait que le segment [MN] lui-même soit ou non tracé par l'étudiant. Enfin, il va mémoriser en partie les commentaires effectués. Contrairement au codage des questions 3 et 5, il ne va pas noter l'adéquation ou la non-adéquation à la figure, mais le contenu même de ce commentaire.

1.8. Item 9

L'item 9 demande la construction d'un parallélogramme, à partir de deux côtés consécutifs déjà tracés.



Grille d'analyse initiale

<u>QUESTION 9: Parallélogramme</u>

Q.9.P : Procédures

A : côtés opposés de même longueur
B : côtés opposés parallèles
C : deux côtés parallèles et isométriques
D : diagonales se coupant en leur milieu
E : utilisation des angles (supplémentaires ou égaux)

Q.9.I: Instruments

A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Là encore, on demande de préciser les instruments qui ont été utilisés. Le codage permet de garder trace de ces instruments, ainsi que de la procédure utilisée.

2. Les premières analyses : où apparaît la nécessité de tout recommencer ...

A cette étape du travail, les questionnaires avaient été encodés. L'encodage avait été préparé par l'équipe et exécuté par chaque collègue qui avait fait passer le questionnaire à son groupe d'étudiants en TD. La saisie des résultats était également faite. Plusieurs fichiers étaient disponibles, venant d'une part des collègues de Lorraine, pour les années scolaires 1998-1999 et 1999-2000, et d'autre part des collègues d'Orléans-Tours, pour l'année scolaire 1999-2000. Je ne détaillerai pas ici les résultats des analyses que l'on a pu effectuer sur tout ou partie de ces fichiers. Je présenterai plutôt les problèmes que ces analyses ont pu mettre en évidence, m'obligeant par la suite à élaborer un nouveau codage.

2.1. Des formats de fichiers différents

Deux fichiers de données au format Excel sont disponibles, l'un en provenance de Lorraine, l'autre en provenance d'Orléans-Tours. Ils sont constitués de plusieurs feuilles de calcul, correspondant chacune à un ou plusieurs groupes de travaux dirigés, répartis sur les années scolaires 1998-1999 et 1999-2000. Le format des tableaux est le suivant : une colonne par modalité de question, une ligne par individu. Le codage est fait en 1 ou blanc : 1 si le test vérifie la modalité, rien sinon. Un certain nombre de problèmes apparaissent alors :

1. Les modalités codées ainsi que le codage lui-même ont été très légèrement modifiées entre les deux années scolaires, ou entre les deux centres. Pour remettre l'ensemble au même format, des colonnes de 0 ont été rajoutées, mais le compte n'y est pas : il y a un décalage dans une partie de l'un des tableaux.
2. Dans une des feuilles de calcul apparaissent des « ? », signe que le formateur qui a codé avait des doutes sur l'interprétation de la production de l'étudiant. Or, les copies ont été rendues aux étudiants et n'ont pas été repérées et stockées ; puisqu'on ne peut les consulter, on est contraint de laisser de côté les données correspondantes.
3. Le codage en 1 ou blanc pose problème : il faut être sûr qu'un blanc correspond à une absence de la modalité correspondante, et non à un oubli. Aucun élément ne permet de vérifier le codage.

2.2. Des différences inexplicables entre les résultats des trois groupes

Dans la suite, nous notons T1[71] le groupe de l'IUFM de Lorraine de 1998-1999, T2 celui de Lorraine de 1999-2000 et T3 celui de l'IUFM Orléans-Tours de 1999-2000. Les effectifs de ces trois groupes sont : T1 : 169, T2 : 324, T3 : 222.

Les tableaux proposés présentent les **pourcentages de réponses** pour chacune des modalités d'une question et pour chacun des groupes T1, T2, T3. Ces premiers résultats mettent en évidence des différences significatives entre les trois groupes. Il est toujours difficile de

[71] T est utilisé plutôt que G pour éviter les éventuelles confusions avec les paradigmes G1, G2, G3.

trancher sur le fait que ces différences proviennent de différences effectives dans les réponses des étudiants ou d'interprétations diverses par les formateurs.

Le lecteur pourra utiliser la grille initiale de codage présentée au paragraphe précédent et disponible en annexe 4 pour suivre cette analyse. L'item 1 par exemple codait les procédures (P) avec les modalités A, B, …, F, puis les commentaires (C) avec les modalités 1, 2, 3, 4, a, d'où les codes PA, PB, …, PF, C1, …Ca. Par ailleurs, dans cette partie, un seul item est traité à la fois. Le numéro de l'item n'est donc pas repris à chaque fois pour gagner de la place dans les tableaux. Ainsi, on note PA au lieu de Q1PA pour la modalité A de la question des Procédures pour l'item 1.

2.2.1. Item 1

	P A	P B	P C	P D	P E	**P F**	C 1	C 2	C 3	**C 4**	C a
T1	17	67	8	7	1	**1**	9	79	5	**4**	27
T2	20	57	6	8	1	**9**	13	73	5	**4**	33
T3	21	59	5	9	2	**4**	13	74	4	**1**	27

Les différences observées portent essentiellement sur le taux des modalités PF (autres) et C4 (divers) dans une moindre mesure. Ce sont de toutes façons des modalités peu exploitables (autres, divers sont des modalités qui regroupent tous ceux qu'on n'a pas pu coder de manière plus explicite), mais les différences de pourcentages sur ces modalités sont quand même importants.

2.2.2. Item 2

modalité	1	2	3	**4**	5	6	**7**
T1	5	60	17	**41**	3	3	**1**
T2	3	52	12	**31**	2	2	**1**
T3	6	52	17	**19**	1	4	**7**

Des différences apparaissent pour la modalité 4 (paraphrase), ainsi que pour la modalité 7 (non, il n'est pas droit). Pour cette dernière, il est peu probable qu'il puisse y avoir un problème d'interprétation de la réponse de l'étudiant, alors que c'est possible pour la modalité 4. Cette modalité 4 suggère donc que les formateurs n'aient pas toujours interprété de la même manière certaines modalités. La différence dans les taux de réponse de la modalité 7 pose problème.

2.2.3. Item 3

	I A	I B	I C	I D	I E	P A	P B	PB*	P C	PC*	P D	P E	P F	C 1	C 2	C 3
T1	73	49	2	67	63	1	16	33	5	11	0	33	3	12	70	18
T2	54	45	2	65	58	1	11	39	6	8	0	33	2	18	51	31
T3	61	37	3	70	68	3	18	39	4	7	1	27	2	18	46	32

Rappelons les intitulés des modalités présentant des différences : C2 : adéquation du commentaire et de la figure, C3 : non-adéquation du commentaire et de la figure. Comment se fait-il qu'il y ait une telle différence sur ces modalités entre le groupe T1 d'une part et les groupes T2 et T3 d'autre part ? On ne peut pas a priori répondre à cette question.

2.2.4. Item 4

	N A	N B	N C	J A	JA*	J B	J C
T1	22	75	4	84		76	14
T2	25	69	5	63		65	19
T3	13	82	4	36	55	81	12

Ici, un autre type de problème apparaît pour l'analyse du fichier : les modalités utilisées n'ont pas toujours été les mêmes. Une modalité JA* a en effet été utilisée par les formateurs du groupe T3 : il s'agit de repérer quand l'étudiant donne comme justification « angle droit » seulement, sans faire référence explicitement au codage sur la figure. Compte tenu de la répartition alors de la population totale sur les modalités JA et JA* (ni l'une ni l'autre de ces deux modalités ne sont négligeables), cette distinction paraît tout à fait pertinente, mais elle ne peut être prise en compte que pour certains seulement. Par ailleurs, on peut s'interroger sur la différence entre les taux des modalités NA (triangle rectangle) et NB (triangle rectangle et isocèle) dans les groupes T2 et T3.

2.2.5. Item 5

	I A	I B	I C	I D	I E	P A	P B	PB*	P C	PC*	P D	P E	P F	C 1	C 2	C 3
T1	91	15	2	85	23	0	1	6	74	1	0	18	2	10	50	41
T2	65	19	1	81	27	1	2	9	65	0	0	19	3	18	41	39
T3	72	11	0	85	18	1	1	4	78	1	1	12	2	18	38	41

Ici, la seule différence importante se situe entre les deux années pour la Lorraine pour la modalité IA (utilisation de la règle). Celle-ci étant notée par l'étudiant lui-même, deux interprétations sont possibles : certains ont codé « règle » dès qu'elle a manifestement été utilisée par l'étudiant, et pas seulement quand celui-ci l'a effectivement cochée, ou bien les consignes de passation au départ ont été légèrement différentes, insistant plus dans certains cas sur la nécessité de cocher tous les instruments utilisés. On voit ainsi apparaître un autre facteur de différence entre les réponses des étudiants : les consignes orales de passation au départ du test.

2.2.6. Item 6

	IA	I B	IC	ID	I F	1TA	1TB	1SQ	1SU	1DE	1DF	2A	2B	2C	2D	2E	2F	2X
T1	99	6	0	11	6	55	44	91	8	9	5	7	4	22	0	50	17	2
T2	86	19	1	38	14	62	34	52	27	13	2	9	2	20	0	52	19	4
T3	95	17	1	40	18	51	45	51	17	10	5	5	2	22	1	50	23	8

Là encore, les différences s'observent surtout entre les deux années en Lorraine (Q1 et Q2). Elles laissent penser qu'il sera peut-être prudent de ne pas tenir compte des résultats lorrains de 98-99, considérant ces résultats comme un pré-questionnaire permettant la mise en place définitive du codage. En ce qui concerne les modalités 1SQ et 1SU, elles sont liées au type de papier proposé, quadrillé ou non. Chaque formateur distribuait à la fois du papier quadrillé et du papier non quadrillé. Si les proportions de ces deux papiers n'ont pas été toujours les mêmes, on comprend alors les différences de résultats.

2.2.7. Item 7

	D O	D N	J A	J B	**J C**	**J D**
T1	56	47	47	27	**41**	
T2	45	53	38	36	**24**	
T3	56	47	48	23	**27**	**8**

La difficulté majeure réside dans l'existence d'une modalité JD (justification insuffisante de l'étudiant) dans T3 seulement.

2.2.8. Item 8

	IA	IB	IC	ID	IE	PA	PB	PC	PC*	PD	PE	**PF**	Ta	Tb	**Tc**	Td	Te	C1	C2	C3	C4
T1	92	9	0	33	23	37	9	16	1	11	6		20	89	**75**	8	15	1	10	46	23
T2	86	11	0	30	23	40	20	9	1	13	4		74	70	**23**	14	4	15	33	23	20
T3	87	8	1	32	18	45	16	6	1	24	4	**2**	78	68	**6**	19	3	22	34	17	31

Encore cette fois, T2 et T3 gardent une certaine cohérence, mais T1 est totalement atypique ! Reste qu'il y a là aussi une modalité (PF : autre tracé correct) qui n'apparaît que dans T3. La modalité Tc (la médiatrice est considérée comme un segment) obtient sur les trois groupes des résultats très différents. S'agit-il d'un problème d'interprétation de la part des formateurs ? Pour le savoir, il aurait fallu expliciter les critères qui ont permis de reconnaître cette modalité.

2.2.9. Item 9

	I A	**I B**	I C	I D	**I E**	**P A**	**P B**	P C	**P D**	P E	P F
T1	24	**93**	7	2	**76**	**17**	**73**	13	**4**	5	1
T2	69	**19**	2	59	**31**	**57**	**30**	4	**3**	2	1
T3	84	**3**	2	73	**14**	**79**	**11**	2	**11**	4	1

Cette fois, les différences sont énormes partout. En ce qui concerne les modalités PA à PF, il s'agit des instruments que les étudiants ont eux-même cochés comme les ayant utilisés. Il ne devrait donc y avoir de problème d'interprétation. Les étudiants étaient-ils si différents dans leur comportement face à cette question, ou bien faut-il remettre en cause le fichier lui-même ?

2.2.10. Premiers doutes

On voit ainsi comment, au fur et à mesure de ces premiers traitements, le doute s'installe sur les possibilités d'exploitation du fichier de données.

2.3. Disjonctif ou pas disjonctif ?

2.3.1. Le codage en disjonctif complet

Un autre point de vue est abordé ici : le codage en disjonctif complet. Il s'agit d'organiser le codage pour que, pour chaque série de modalités, il y ait une réponse choisie et une seule. L'intérêt de ce type de codage est double :

- d'une part, il est nécessaire pour de nombreux traitements statistiques. Pour effectuer une analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM) ou une analyse implicative (sous CHIC), il faut que les données soient codées en disjonctif complet (pour CHIC, elles seront ensuite transformées en tableau binaire)
- d'autre part, il permet en partie de vérifier le codage du questionnaire : la somme des effectifs de chacune des modalités de réponse doit être égale à l'effectif total.

C'est déjà le cas, théoriquement, d'un certain nombre de questions. Prenons un exemple. L'item 5 demande de construire la médiatrice du segment [MN] et de préciser quelles propriétés de la médiatrice sont utilisées. Le codage Q5C[72] comporte trois modalités :

1. pas de commentaire
2. adéquation du commentaire et de la figure
3. Non-adéquation du commentaire et de la figure

Ces trois modalités correspondent à un codage disjonctif complet : elles s'excluent mutuellement et au moins l'une d'entre elles doit être choisie.
On obtient pour cette question les effectifs[73] suivants :

---

[72] Comme il va être question de plusieurs items simultanément, dans cette partie et pour la suite, on reprendra le numéro de l'item dans le code.
[73] Il s'agit d'effectifs et non de pourcentages comme dans les tableaux précédents, dans ce tableau et dans le suivant.

	Nombre d'étudiants dans le groupe	Q5C 1	Q5C 2	Q5C 3	Total des réponses
T1	169	17	84	69	170
T2	324	59	134	126	319
T3	222	40	85	92	217

On constate notamment que dans le groupe T1, la somme des modalités de réponse est supérieure au nombre total d'individus : il y a donc nécessairement une erreur quelque part. Pour les groupes T2 et T3, elle est inférieure, on peut donc penser qu'il y avait des non-réponses, mais on ne peut en être sûr, il y a donc une possibilité d'erreur.

2.3.2. Les résultats

Mais la question Q5C n'est pas la seule à poser ce type de difficulté. Le tableau ci-dessous donne en effet, pour les questions dont on peut penser qu'elles sont en disjonctif complet, le nombre total de réponses sur l'ensemble des modalités de cette question.

Effectif total	Q1P	Q1C	Q3P	Q3C	Q4N	Q5PF	Q5C	Q6.2
665	664	624	673	661	660	662	658	674

L'effectif pour la question Q1C devrait être, au moins, de 665. On peut considérer que la modalité « divers » n'est pas disjonctive des trois autres, mais le total devrait au moins être égal à 665. L'effectif de la question Q3P est supérieur à l'effectif total : y a-t-il des étudiants qui utilisent deux procédures ? Mais comment peut-il être inférieur à 665 à la question Q5P ? Les effectifs des commentaires des items 3 et 5 sont également inférieurs à l'effectif total, ce qui ne peut s'expliquer. Il en est de même pour la question Q4N.

Quant à la question Q62, son effectif laisse penser que certains étudiants ont donné plusieurs définitions. Mais pourquoi, dans ces cas-là, la modalité « fourre-tout de propriétés » n'a-t-elle pas été utilisée ?

2.3.3. Décision

Le doute s'est installé sur le fichier dans la partie précédente. Il se renforce ici. Il va donc falloir rectifier ce fichier, voire le reprendre entièrement. L'hypothèse d'un nettoyage en enlevant tous les individus problématiques du point de vue du codage en disjonctif complet est testée puis abandonnée : elle oblige à laisser trop d'étudiants de côté, et par ailleurs, elle ne règle pas les difficultés d'interprétation possibles soulevées dans la partie précédente. Je décide donc de reprendre entièrement le codage de ces tests.

Cela suppose de récupérer les copies. Toutes ne seront pas disponibles, et seulement 563 sur les 665 étudiées précédemment, seront récupérées. Y seront ajoutés tous les tests effectués en début d'année scolaire 2000-2001, à l'IUFM Orléans-Tours (226 copies) et au CFP d'Avrillé (89 copies), d'où un total de 878 questionnaires.

Pour pouvoir vérifier en partie le codage et la saisie, chaque fois que cela est possible, le codage sera effectué en disjonctif complet. Cela supposera parfois simplement de rajouter un codage 'non-réponse', ou de placer cette non-réponse dans le codage 'autre' quand il existe. Ce codage étant difficilement interprétable par la suite, ce n'est pas très gênant, dès lors que son effectif reste faible. Dans d'autres questions, cela nécessitera de modifier entièrement le codage initial. Par ailleurs, un effort tout particulier va être entrepris pour détailler au maximum les différentes modalités de codage, de sorte que les différences d'interprétation soient réduites au minimum. De plus, les copies vont être conservées, de sorte que l'on pourra à tout moment retrouver une copie dont les réponses semblent poser problème. Enfin, la saisie informatique sera effectuée par une seule personne[74], de manière à limiter les différentes manipulations de fichiers, sources d'erreurs.

Pour limiter les difficultés d'interprétation, j'aurais également pu coder moi-même tous les tests. Cette option n'a pas été retenue pour au moins deux raisons :

1. la lourdeur de l'opération
2. ne pas totalement déposséder les formateurs du travail dans lequel ils s'étaient engagés.

Dans la pratique, j'ai cependant codé moi-même tous les tests des années antérieures (563) ainsi que ceux de mes étudiants du CFP d'Avrillé 2000-2001(89). J'ai ensuite vérifié le codage des 226 tests de 2000-2001 effectué par les collègues, de façon à limiter les erreurs d'interprétation.

Dans la partie suivante, nous allons examiner les nouvelles modalités de codage retenues.

[74] Tous mes remerciements à Phillippe qui a passé des heures à réaliser cette tâche ingrate.

3. Mise en place d'un nouveau codage et hypothèses sous-jacentes

Nous allons donc maintenant explorer le nouveau codage proposé. Il tient compte bien entendu des remarques faites précédemment, ainsi que des résultats des premiers tris à plat qui avaient cependant été effectués sur les données, afin de limiter les modalités dont les effectifs seraient trop faibles. Il s'est fait en plusieurs étapes, avec des allers-retours notamment avec le GReDiM[75]. Je ne détaillerai pas toutes les versions intermédiaires, mais seulement les deux produits finis, celui qui a permis d'établir le premier codage en mars-avril 2001 ainsi que celui qui a été refait après le premier groupe d'analyses statistiques en mai-juin 2001[76].
En effet, un premier codage a été mis en place et a permis d'effectuer les premiers traitements statistiques. Néanmoins, certaines questions sont restées sans réponse et tous les tests ont alors été repris et recodés, pour certains items. Les items portant sur le tracé de médiatrice en font partie, de sorte de pouvoir mieux préciser les procédures utilisées et les commentaires effectués. Pour les procédures, ce codage ne fait qu'affiner les procédures possibles, en fonction de ce qui a été souvent repéré lors du premier codage. C'est moi qui ai alors effectué le codage de tous les questionnaires, rendant ainsi plus sûr le contrôle des différentes étapes de codage et de saisie. Il a alors été possible d'assouplir un peu les règles que je m'étais donnée précédemment. En particulier, le codage en disjonctif complet a disparu pour les questions concernant les types de commentaires. Je détaillerai un peu plus loin l'organisation alors adoptée.

Dans le texte qui suit, je présenterai pour chaque item

- la nouvelle proposition
- les remarques sur le codage initial qui l'ont justifiée

La nouvelle version sera complétée par la deuxième version pour les questions qui ont fait l'objet d'un deuxième codage. Les remarques font en permanence référence au codage initial qui a été décrit dans la partie « présentation du questionnaire » (cf. § 1 de ce chapitre, pages 157 et suivantes) ; le lecteur pourra donc s'y reporter. Rappelons que le test vierge est disponible dans l'annexe 4, et la grille initiale de codage en annexe 5. Pour une meilleure

[75] Groupe de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'IUFM Orléans-Tours,
[76] Le lecteur trouvera ces grilles de codage en annexes 6 et 7.

lisibilité, les deux nouvelles grilles de codage sont également disponibles, respectivement en annexes 6 et 7.

Dans la première phase, le codage devant être effectué par chacun des formateurs, il a été nécessaire de prendre des précautions dans le but de limiter au maximum les différences d'interprétation entre les formateurs. J'ai donc réalisé un « document d'accompagnement » à l'intention des formateurs du GreDiM[77] afin d'apporter des précisions pour le codage. Le lecteur trouvera ce document en annexe 8.

Enfin, je détaillerai également (surtout !) pour chaque item mes hypothèses de recherche sous-jacentes.

Quelques questions générales (P) et hypothèses de recherche (HR) ont été formulées au chapitre précédent. Je les reprends ici parce que ce sont elles qui vont être affinées au fur et à mesure dans la présentation du nouveau codage.

P1 : Comment se comportent les PE1, en début de formation, du point de vue des paradigmes G1/G2 ?

On peut détailler cette question :

P1.1 : Les PE1 en début de formation travaillent-ils « spontanément » dans le cadre de la géométrie spatio-graphique (G1), ou dans celui de la géométrie proto-axiomatique (G2) ? En particulier dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les PE1 se situent-ils ? De manière générale, peut-on expliciter le paradigme ou pseudo-paradigme dans lequel se situent les PE1 ?

P1.2 : Lorsqu'on propose plusieurs tâches de géométrie plane dans le micro-espace aux PE1 en début de formation, est-il possible de faire émerger des profils d'étudiants « tout G1 » ou « tout G2 » ou d'autres profils ? De manière plus large, y a-t-il un lien entre leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une situation donnée et leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une autre situation ?

P1.3 : Dans une tâche de construction de G1, les PE1 sont-ils capables de faire le lien entre la technique de G1 qu'ils ont utilisée et la technologie de G2 qui justifie cette technique ? Autrement dit, y a-t-il cohérence entre leurs déclarations (dans G2) et leurs procédures (dans G1) ?

P1.4 : Existe-t-il des situations qui favorisent plutôt un traitement dans G1, ou dans G2 ? Et si oui, lesquelles ?

HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.

---

[77] puisque ce sont eux qui ont fait passer les questionnaires à leurs étudiants cette année-là et qui les ont ensuite codés.

HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.

3.1. Identification

Le codage sera effectué par les formateurs. Il leur est donc demandé de remplir une feuille par test codé. Celle-ci sera agrafée au test correspondant et l'ensemble me sera transmis (ce qui supprime la possibilité de rendre les tests aux étudiants ; un compte rendu pourra leur être fait, mais il est indispensable de conserver les questionnaires pour pouvoir s'y référer par la suite, si nécessaire). Afin de pouvoir retrouver ainsi chaque test, deux identificateurs seront ajoutés par le formateur sur le test et sur la feuille de codage :

1. Les initiales du formateur[78]
2. Le numéro de la copie

Par ailleurs, si les tests sont anonymes, des informations personnelles complémentaires ont cependant été demandées aux étudiants concernant la série de leur baccalauréat, leur licence et leur éventuelle expérience d'enseignement. Concernant le baccalauréat et la licence, il s'agit bien évidemment de pouvoir croiser les résultats aux différentes questions avec la scolarité initiale de l'étudiant. Une hypothèse de recherche est ainsi sous-jacente :

hr 1 : Les étudiants ayant une formation scientifique travaillent plus spontanément dans G2, les étudiants avec une autre formation travaillent plus spontanément dans G1.[79]

Par ailleurs, au CFP, de nombreux étudiants ont déjà effectué des suppléances[80], parfois longues (plusieurs années) avant d'entrer en formation. L'analyse des textes officiels faite au chapitre 3, § 3.1 (cf pages 141 et suivantes), ainsi que l'analyse des manuels de cycle 3 présentée dans [Houdement-Kuzniak. 1999] permet de penser qu'ils ont alors essentiellement,

[78] En fait, l'identificateur du formateur ne servira jamais, mais le numéro de la copie sera très utile : très souvent par la suite, je réexaminerai des copies pour lesquelles la cohérence des questions au vu du codage m'interpelle, ou bien encore pour trouver rapidement un exemple de copie qui a répondu de telle ou telle manière.

[79] Les hypothèses fondamentales ont été numérotées avec « HR » (cf. chapitre 2). « hr » est ici utilisé pour toutes ces hypothèses que nous pouvons considérer comme secondaires.

[80] Le système de remplacement des enseignants - malades par exemple - ne fonctionne pas dans l'enseignement privé comme dans l'enseignement public. Ces remplacements sont uniquement assurés par des suppléants, titulaires d'une licence mais non encore professeurs des écoles, non titulaires de leur poste. Pour éviter que ces enseignants ne restent longtemps dans cette situation précaire, c'est prioritairement dans ce vivier que s'effectue le recrutement pour la formation au CFP. Certaines directions diocésaines ne recrutent même que dans cette population (ce ne sont pas les CFP qui assurent le recrutement mais les directions diocésaines). Ainsi, de nombreux PE1 au CFP ont effectué des suppléances, au moins pendant une année scolaire, souvent plus.

voire exclusivement, travaillé dans G1 avec les enfants. Une autre hypothèse de recherche est alors :

hr 2 : Les étudiants ayant une expérience d'enseignement dans l'élémentaire travaillent plus spontanément dans G1. [81]

On obtient donc les intitulés suivants :

Formateur : N° de la copie : Bac : Licence : Suppléances : .... mois

La série du baccalauréat et la licence seront notées telles que les a indiquées l'étudiant. Ils seront ensuite codés par groupe, au moment de la saisie. Les groupes effectués seront alors, pour le baccalauréat :

codage	séries
L (Lettres)	L, A1, A2, ...
E (Economie)	ES, B, G
S (Scientifique)	S, C, D, D',E
A (Autres)	Technique, SMS, STT, ACA,...
NR (Non Réponse)	Non-réponse

et pour la licence :

codage	intitulé
L (Lettres)	Lettres modernes, Lettres classiques, Langues (Anglais, Allemand, ...), LEA : Langues étrangères appliquées, Histoire, Géographie, Arts plastiques, Philosophie, Théologie, Arts du spectacle, Histoire de l'art et Archéologie
E (Droit-Economie)	Sciences Economiques, Marketing, Droit, A.E.S., Tourisme,

[81] Le nombre important d'étudiants n'ayant pas répondu à cette question (parce qu'elle n'apparaissait pas dans la première version du questionnaire, donc sur les 563 premières copies) ou étant à l'IUFM et n'ayant donc pas fait de suppléances n'a finalement pas permis de confirmer ou d'infirmer cette hypothèse à partir de l'étude de ce questionnaire.

	Logistique, Gestion, Banque finances, BTS de publicité, Ecole de commerce, Commerce international, Commercialisation des vins et spiritueux
SH (Sciences Humaines)	Psychologie, Psychologie clinique, Sociologie, Sociologie de l'état, Sciences de l'éducation, Communication et sciences du langage, Ressources humaines
S (Scientifique)	Mathématiques, Physique, Biologie, Biochimie, Biologie-Géologie, Chimie, Mécanique, BGSTU (Biologie Générale et sciences de la terre et de l'univers), Biologie des organismes, cellulaire et physiologie, Ingénieur agronome, ...
P (Pluridisciplinaire)	Pluridisciplinaire littéraire ou scientifique[82]
A (Autres)	STAPS, Musicologie, Infirmière, Educateur spécialisé, BTS secrétariat bureautique, Management de l'éducation et de la formation, Management et conduite de projets, Infirmière, mère de 3 enfants etc.
NR (Non-réponse)	Non-réponse

N.B. : La liste des intitulés n'est pas exhaustive mais témoigne néanmoins de la diversité de la population qui entre en formation !

3.2. Item 1 : Tracer le triangle

3.2.1. La nouvelle grille de codage

En ce qui concerne les procédures, la modalité E[83] (tracés à la règle : ceux qui tâtonnent) est très rare (1,05%), ce qui ne saurait surprendre : quand l'étudiant utilise directement sa règle pour tracer le triangle, c'est qu'il sait que les points doivent être alignés. Elle peut donc être supprimée. Par ailleurs, la modalité B (cercles tangents : triangle aplati) est fréquente et peut être subdivisée. Par ailleurs, il faut prévoir une modalité regroupant des réponses trop ambiguës pour que l'on puisse conclure avec certitude.

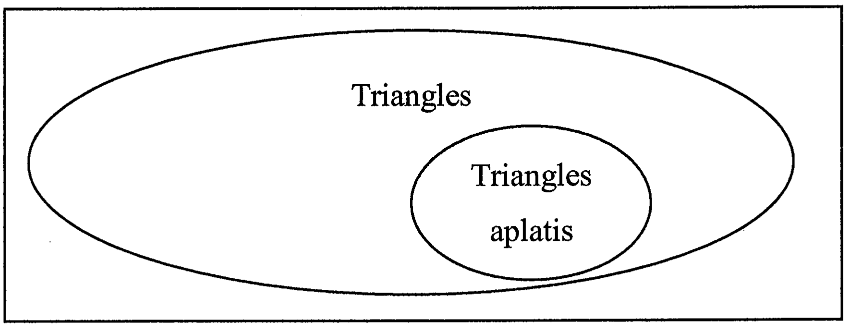
Pour les commentaires, la question essentielle est de se mettre d'accord sur ce qu'est un triangle. En effet, certains, ayant fait un tracé correct, ne le reconnaissent pas comme un triangle. La réponse « ce n'est pas un triangle » est-elle en accord avec le dessin ? Il est difficile de répondre à cette question. Le problème de l'adéquation entre le dessin effectué et

[82] Les résultats ultérieurs laissent penser qu'il s'agit plus souvent de licences pluridisciplinaires scientifiques que de licences pluridisciplinaires littéraires.

[83] Les différentes modalités initiales de codage ont été présentées au paragraphe 1 de ce chapitre, le lecteur pourra utilement s'y reporter. Il les trouvera également comme signalé précédemment en annexe 5.

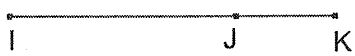
le commentaire n'est en effet pas un problème d'absence de lien entre des procédures et des déclarations comme on le trouvera aux items sur la médiatrice, mais un problème de définition qui reflète en fait un problème de conception du triangle et qu'il est très intéressant de relever : trois points alignés déterminent-ils un triangle ?

Si on en croit le Petit Larousse [Larousse, 1995, pages 1030 et 801], un triangle est un « *polygone à trois côtés* », un polygone étant une « *figure formée par une suite ordonnée de segments (côtés), dont chacun a une extrémité commune (sommet) avec le précédent et le suivant* ». Rien n'est précisé sur le fait que les extrémités puissent ou non être alignées... Si on cherche dans un dictionnaire mathématique, on trouve dans [Bouvier et al., 1993], pages 659 et 847, les mêmes définitions, dans une version un peu plus formelle, mais équivalente[84]. C'est la définition que je prendrai pour le mot triangle. Elle correspond à la représentation suivante :



où l'ensemble des triangles aplatis est un sous-ensemble de l'ensemble des triangles.

Notons cependant que [BARUK Stella, 1992 & 1995, page 1224] définit ainsi un triangle : « *un triangle est une figure plane déterminée par trois points non alignés qui sont les trois sommets du triangle* ». Dans la même page, il est précisé que *« il ne faut pas qu'ils soient alignés comme le sont les points I, J, K sinon le triangle serait aplati »*.

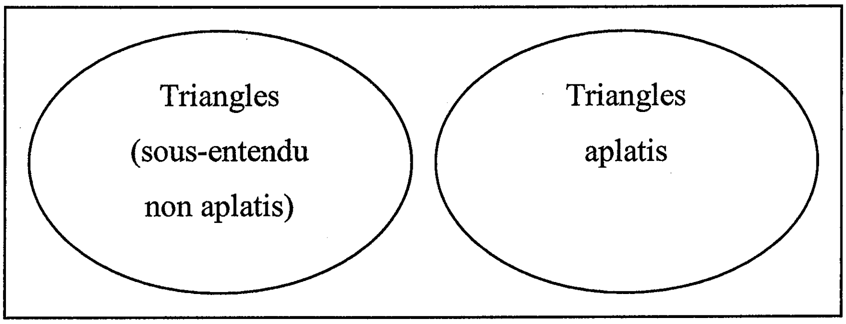


Deux conceptions différentes coexistent apparemment dans le point de vue de Stella Baruk : trois points alignés ne constituent pas un triangle, mais ils constituent néanmoins un triangle particulier (aplati), ce qui pose problème : comment un triangle aplati peut-il à la fois être un

---

[84] « *Polygone : figure plane formée par une ligne polygonale* $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ *telle que l'extrémité de* S_1 *non commune à* S_2 *soit confondue avec l'extrémité de* S_n *non commune à* S_{n-1}.
Triangle : on appelle triangle un polygone à trois côtés. » [Bouvier et al., 1993, pages 659 et 847]

triangle et ne pas être un triangle ? Il faut en fait dans ce point de vue considérer le mot triangle comme sous-entendant « non aplati ». On a ainsi la représentation suivante :



où l'ensemble des triangles aplatis et celui des triangles sont disjoints, malgré le langage utilisé. Pourra-t-on alors reprocher à nos étudiants d'avoir cette conception paradoxale du point de vue du langage alors même qu'elle est présente dans un dictionnaire ?
L'analyse des définitions dans G1 et G2 qui a été faite au chapitre 2, paragraphe 1.7 (cf. pages 93 et suivantes), permet d'interpréter la première définition (qui inclut le cas des trois points alignés comme cas particulier de triangle) comme une définition de G2, tandis que la seconde (qui exclut le cas de trois points alignés de la définition du triangle) relève de G1.

Pour repérer si leur définition du triangle relève de G1 ou de G2, on notera si les étudiants ont dit qu'il s'agissait ou non d'un triangle. Ce ne sera relevé que dans le cas de ceux qui ont tracé au compas, ceux qui ont tracé directement à la règle étant trop peu nombreux pour qu'on puisse découper ce groupe en trois sous-groupes.

D'autres remarques peuvent être faites concernant les commentaires :

- le code « divers » est imprécis ; les trois autres pouvant être considérés en disjonctif complet, il ne se justifie pas.
- il faut coder séparément la référence à l'inégalité triangulaire pour obtenir du disjonctif complet. Il s'agit plus précisément du cas particulier d'égalité de l'inégalité triangulaire.
- enfin, il est difficile de coder complètement le contenu du commentaire. Deux autres éléments vont donc être notés, pour garder trace le plus fidèlement possible des éléments de ce commentaire : « est-il explicitement dit qu'il est impossible de tracer le triangle ? » et « est-il explicitement dit que les points sont alignés ? ». Ces deux questions permettront d'affiner la conception que les PE1 se font d'un triangle.

On obtient finalement la grille de codage suivante :

Question 1 : Tracer le triangle	*Q.1.C : Référence à l'égalité 13 = 8 + 5*
Q.1.P : Procédure de construction et commentaire	A référence à l'égalité 13 = 5 + 8 B pas de référence à l'égalité 13 = 8 + 5
A tracé au compas + cercles sécants B tracé au compas + cercles tangents + reconnaissance d'un triangle (éventuellement aplati, ou plat, ou ...) C tracé au compas + cercles tangents + « ce n'est pas un triangle » D tracé au compas + cercles tangents + pas d'utilisation du mot triangle ou pas de commentaire du tout E tracé au compas + cercles extérieurs F tracé à la règle : ceux qui savent a priori G autres ou ambigu H non-réponse (aucun tracé)	*Q.1.I : Impossible de tracer le triangle* O oui N non *Q.1.A : Les points sont alignés* O oui N non

3.2.2. Les hypothèses de recherche sous-jacentes, analyse a priori

Ce codage met en évidence quelques hypothèses de recherche :

hr 3 : La majorité des PE1 ne se pose pas la question de l'existence du triangle « 5 – 8 – 13 »

Quelques explications peuvent être apportées pour justifier ce comportement.

Tout d'abord, la consigne « tracer un triangle ... »

- sous-entend que ce triangle existe. C'est un effet de contrat didactique. Il n'y a donc aucune raison de se poser la question.
- fait immédiatement appel à une technique de construction (à la règle graduée et au compas) qui est routinisée et ne déclenche donc pas de réflexion préalable à sa mise en œuvre sur le domaine d'utilisation ou sur la technologie sous-jacente. C'est un effet de l'enseignement.

Ensuite, les questions d'existence a priori sont plutôt des questions de G2. Dans G1, c'est le dessin qui justifie a posteriori l'existence : l'objet existe dès lors qu'on a pu le tracer. Ainsi, la tâche se situe dans G1, et est résolue dans G1.

hr 4 : Certains PE1 tracent un triangle non aplati pour le triangle « 5 – 8 – 13 »

En effet, plusieurs phénomènes se conjuguent pour produire ce possible résultat :

- L'imprécision du tracé, notamment si on ne commence pas par le côté le plus long[85] peut facilement amener à construire un triangle non aplati.
- Encore un effet de contrat didactique : il est demandé de tracer un triangle, il faut donc obtenir un triangle ; or pour certains PE1 (cf. hr5), 3 points alignés ne forment pas un triangle, ils font donc en sorte, plus ou moins consciemment, d'obtenir un « vrai » triangle (non aplati).

hr 5 : Certains PE1[86] ne considèrent pas trois points alignés comme constituant un triangle

Cette dernière hypothèse a déjà été développée : les étudiants ont tendance à catégoriser les objets, avec des ensembles disjoints plutôt qu'inclus les uns dans les autres. Elle peut par ailleurs également être reliée aux paradigmes G1 et G2 pour retrouver la problématique qui est la mienne. Dans G1, l'objet est physique et avant tout reconnu par sa forme. De ce point de vue, trois points alignés ne déterminent pas, pour l'étudiant, un triangle : les définitions relevant de G1 sont en général exclusives. Dans G2 par contre, l'objet – ici le triangle – est défini à partir d'une formulation discursive qui, comme nous l'avons vu, inclut en général le cas de trois points alignés : les définitions de G2 sont inclusives.

3.3. Item 2 : $x\hat{O}y$ est-il droit ?

3.3.1. La nouvelle grille de codage

La modalité 5 est peu représentée : 2,11% des étudiants ont choisi cette procédure. Je l'inclus donc dans la modalité 3.

Le codage initial n'est pas disjonctif, en particulier à cause de la modalité 7 qui peut être combinée avec les modalités 2 ou 3 ou 4.

La réponse « l'angle est droit car il mesure 90 ° » correspond-elle à 2 ou à 4 ? Est-ce que l'étudiant a effectivement utilisé son rapporteur ou son équerre pour conclure (il s'agit alors

---

[85] Il aurait d'ailleurs été intéressant de repérer par quel côté les étudiants commençaient leur tracé. Etait-ce par le plus grand ? Cet élément n'a hélas pas été pris en compte ! Or, avec la question « Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ? », [Arsac. 1989] met en évidence une conception inattendue chez les élèves de 12 ans : *« le triangle existe ou non suivant le côté par lequel on commence pour le construire »[opus cit., page 90]*.

[86] à l'image de Stella Baruk

de la modalité 2, liée à la perception instrumentée) ou est-ce qu'il a simplement regardé le dessin, repéré perceptivement que l'angle est droit (perception visuelle non instrumentée), et remplacé l'expression « angle droit » par une autre qui lui est équivalente (ici, « il mesure 90 », ailleurs « les droites sont perpendiculaires », ce qui correspond à la modalité « paraphrase ») ?

De manière générale, ces deux modalités sont souvent difficiles à distinguer : l'élément essentiel à repérer est la référence ou non à un instrument ou à une construction pour vérifier, et non le résultat de cette vérification. On a donc regroupé les modalités de réponse « oui » et « non » mais mis en évidence les éventuelles vérifications.

Réponse et justification ont été regroupées pour obtenir des modalités en disjonctif complet.

On obtient ainsi les modalités suivantes :

Question 2 : xôy est-il droit ?	
	Q.2 : Réponse et commentaires
A	on ne peut pas savoir
B	O/N + figure annexe
C	O/N + pas figure + 90° + instrument
D	O/N + pas figure + 90° + pas instrument
E	O/N + pas figure + pas 90° + instrument
F	O/N + pas figure + pas 90° + pas instrument ou pas de commentaire
G	autre ou ambigu
H	non-réponse

3.3.2. Les hypothèses de recherche sous-jacentes, analyse a priori

La présentation de cette question est évidemment ambiguë et au cœur de la problématique G1 / G2. Si l'on se place dans G1, seule la perception permet de répondre, que cette perception soit ou non instrumentée. Si l'on se place dans G2, on ne peut répondre à cette question. Il s'agit donc de travailler sur deux questions déjà indiquées :

> **P1.1** : Les PE1 en début de formation travaillent-ils « spontanément » dans le cadre de la géométrie spatio-graphique (G1), ou dans celui de la géométrie proto-axiomatique (G2) ? En particulier dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les PE1 se situent-ils ? De manière générale, peut-on expliciter le paradigme ou pseudo-paradigme dans lequel se situent les PE1 ?
>
> **P1.4** : Existe-t-il des situations qui favorisent plutôt un traitement dans G1, ou dans G2 ? Et si oui, lesquelles ?

Plus précisément dans le cadre de cette question, mes hypothèses de recherche sont les suivantes :

hr 6 .1 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1

Deux raisons peuvent a priori expliquer ce comportement :

- certains étudiants ont peu de compétences dans G2 et travaillent le plus souvent dans G1
- à nouveau un effet de contrat didactique puisque dans G2, on ne peut répondre ; il faut donc se placer dans G1 parce qu'il « faut » (contrat) produire une réponse

hr 6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G2

Certains étudiants ont notamment fait des études scientifiques et travaillent systématiquement dans G2 dès qu'ils font de la géométrie.

hr 7 : Certains PE1 se placent inconsciemment dans G1 tout en croyant travailler dans G2

C'est le cas de ceux qui font une construction sur la feuille pour répondre. La raison serait alors que ces étudiants ont intégré une règle du type « une mesure ne peut servir de justification», fruit de l'enseignement de la démonstration au collège. Aucun élément dans la figure n'étant codé pour fournir des hypothèses utilisables pour l'application d'un théorème, on réalise une construction, qui n'est pas une mesure. Par exemple, on peut placer au compas deux points à égale distance de O sur la droite (yz) puis tracer la médiatrice de ces deux points. La validation consiste alors à s'assurer **perceptivement** de la superposition de la médiatrice avec la demi-droite [Ox). L'étudiant ne se rend cependant pas compte que cette validation est de nature perceptive, donc qu'il se situe dans G1, alors qu'il croit travailler dans G2 !

Au lieu d'analyser les questions dans l'ordre des numéros, je vais opérer des regroupements pour faciliter la lecture. Etudions donc maintenant une autre question ou la présentation est ambiguë entre G1 et G2.

3.4. Item 4 : nature du triangle ECO

3.4.1. La nouvelle grille de codage

Il faut veiller à coder en disjonctif. « Autre » ne doit donc pas se superposer aux trois autres modalités pour la nature du triangle. Par ailleurs, si le triangle est considéré comme isocèle, les côtés ont forcément été mesurés ou comparés, s'il est seulement considéré comme rectangle, on peut penser que les côtés n'ont été ni mesurés ni comparés[87]. Les modalités liées aux longueurs des côtés peuvent donc être supprimées.

Une modalité A* a été utilisée par certains, avec un effectif équivalent de celui qu'a alors la modalité A. Il s'agit de la non-explicitation de l'indice constitué par le code de l'angle droit sur le dessin. Cette idée est reprise dans la question Q4JC.

L'essentiel est de savoir si l'angle a été mesuré, malgré le symbole de perpendicularité sur la figure proposée. Peu importe qu'il ait alors été reconnu comme droit ou comme non droit. Ce point est pris en compte dans Q4JM.

On obtient alors la grille de codage suivante :

Question 4 : nature du triangle ECO	*Q.4.J M : Justification de l'angle droit par le mesurage de l'angle*
Q.4.N : Nature A rectangle B rectangle et isocèle C autre D non-réponse *Q.4.JC : Justification de l'angle droit par le code du dessin* A référence explicite au code sur le dessin B pas de référence explicite au code sur le dessin	A référence explicite à une mesure effective de l'angle B pas de référence explicite à une mesure effective de l'angle

3.4.2. Les hypothèses de recherche, analyse a priori

La présentation de cette question est à nouveau ambiguë, mais différemment de la question précédente. Le codage de l'angle droit incite à considérer le dessin comme un représentant

[87] J'applique ici la loi d'exhaustivité au discours de l'étudiant : je suppose qu'il dit tout ce qu'il sait de l'objet.

d'un OGT, autrement dit incite à se placer dans G2, le code constituant une description discursive de l'objet. Le triangle ECO est alors seulement rectangle. Si l'on se place dans G1, seule la perception permet de répondre, que cette perception soit ou non instrumentée. Il est ici alors naturel d'utiliser les instruments et de vérifier que l'angle est droit[88] et que les côtés sont de même longueur. Il s'agit donc, ici aussi, de travailler sur les questions P1.1 et P1.4 (cf. chapitre 2, § 3.1, pages 114 et suivantes).

Nous retrouvons tout naturellement les mêmes hypothèses de recherche que dans la question précédente.

> r6.1 – r6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1, d'autres dans G2.

Nous pouvons également reprendre les hypothèses de recherche générales définies au chapitre 2 :

> HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.

Il est possible de reformuler de manière plus précise dans le cas présent :

hr 8 : Certains PE1 peuvent, dans une même question, utiliser des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.

Il est ainsi probable que, utilisant simultanément G1 et G2 puisqu'ils n'ont pas conscience de ces deux paradigmes, certains étudiants tiennent compte du code pour affirmer que ECO est rectangle sans vérifier aux instruments, puis prennent la règle graduée ou le compas pour s'assurer que le triangle est isocèle.

Une autre raison peut expliquer ce comportement : la règle d'exhaustivité décrite au chapitre 2, selon laquelle tout individu est censé donner le maximum de l'information dont il dispose. Ainsi, il est naturel de se placer dans le paradigme qui permet de donner le maximum de propriétés du triangle, quitte à se placer successivement dans l'un puis dans l'autre des paradigmes[89].

---

[88] On notera que cela ne peut se faire que si l'élève en a l'idée, l'intuition au sens de Houdement-Kuzniak. Il est donc nécessaire de travailler cette perception dès l'école comme nous y invitent les I.O. de cycle 3.

[89] On notera à nouveau ici le décalage entre le comportement quotidien et le comportement attendu dans la classe de mathématiques et l'influence du premier sur le second.

3.5. Item 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Cet item met également en jeu l'ambiguïté G1 / G2. La réponse dépend en effet du paradigme dans lequel l'étudiant se situe. Mais cette ambiguïté se présente encore différemment des items 2 et 4. Dans l'item 2 ($x\widehat{O}y$ est-il droit ?), seule G1 permet de produire une réponse, dans l'item 4 (nature de ECO ?), G1 et G2 permettent de conclure. Les conclusions sont différentes mais non contradictoires, l'une est seulement plus complète que l'autre, et il est possible de faire coexister les deux paradigmes. Cette fois, les réponses dans G1 et dans G2 sont contradictoires, parce que la perception contredit la description discursive proposée par le codage.

3.5.1. La nouvelle grille de codage

De tous les items, c'est certainement celui qui a été le plus difficile à coder. Aucune grille ne semblait convenir, et permettre de prendre vraiment en compte le sens de la réponse de l'étudiant. Les propositions se suivront, jamais totalement convaincantes, toujours remises en questions. Celle qui fera finalement l'objet du premier codage est la suivante :

Q.7.RJ : Réponse et justification	*Q.7.P : Précision du tracé*
A oui et non B oui et justification exacte C oui et justification fausse D oui sans justification E non avec référence à des propriétés du carré F non avec une autre justification ou sans justification G autres réponses et non-réponse	A il y a une remarque explicite sur le peu de précision du tracé B il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

Mais les réponses qui seront codées par les modalités E ou F seront souvent ambiguës, et lors du deuxième codage, un autre point de vue sera pris : au lieu d'essayer de coder le contenu du commentaire, essayons de répondre directement dans le codage, au plus près de la copie elle-même, à la question qui justifie cet item dans le test : est-ce que l'étudiant se place spontanément dans le cadre G1 ou dans le cadre G2 ? De nombreuses productions ne permettront pas hélas de trancher entre les deux paradigmes. Une réponse classique consiste en effet à dire que l'angle D n'est pas un angle droit. La difficulté réside dans la double interprétation possible ci-dessous :

Interprétation G1 :

C'est la perception, instrumentée ou non, qui permet à l'étudiant de conclure. Il **voit** que D n'est pas un angle droit et que les segments ne sont pas parallèles ou de même longueur.

Interprétation « exhaustivité » :

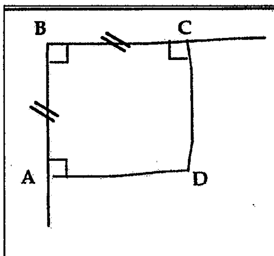
Elle est basée sur la règle d'exhaustivité : « on dit tout ce qui est vrai, si ce n'est pas marqué, c'est que ce n'est pas vrai ». Ainsi l'étudiant conclut que D n'est pas un angle droit parce que ce n'est pas marqué sur la figure.

Dans le premier cas, l'utilisation de la perception permet d'affirmer que l'étudiant se situe dans G1. Dans le second cas, on ne peut savoir dans quel paradigme il se situe. Considère-t-il le dessin comme un objet (position G1) ou comme un représentant d'un OGT (position G2) ? Rien ne permet de le déterminer, même si l'utilisation du codage relève plus fréquemment de G2 que de G1.

Dans les deux cas, notons qu'une connaissance géométrique fait défaut : « un quadrilatère possédant 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur est un carré » est une connaissance qui n'est ni mobilisable, ni disponible[90].

Il est d'ailleurs possible que l'interprétation « exhaustivité » soit induite par l'interprétation « G1 ».

Prenons l'exemple suivant :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

Non, car il n'y a que trois angles droits et les distances AD et DC ne sont pas de la même longueurs que AB et BC.

Qu'est-ce qui motive la réponse : le fait que les **codages** d'angle droit et de longueurs égales ne soient pas tous indiqués (Interprétation « exhaustivité »), ou le fait que l'on **voie** un angle

---

[90] [Robert. 1995, page 12] définit ainsi connaissances mobilisables et connaissances disponibles :
« Nous distinguons pour les élèves :

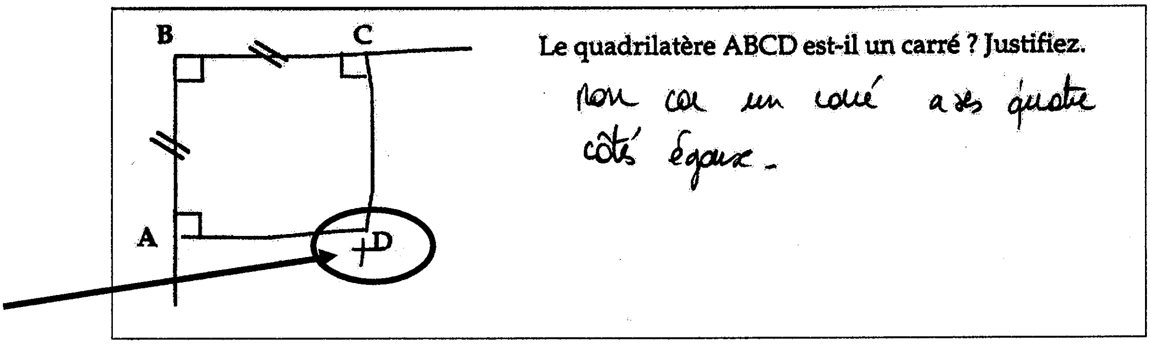
- *le fait d'utiliser des connaissances indiquées ;*
- *le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.*

Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser *leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables.*
Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. *Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel. »*

non droit et deux « segments » de longueur inégale (Interprétation G1) ? Il ne me semble pas possible de distinguer les deux.

En codant ce type de réponse « ambiguë », on perdrait sa spécificité, et elle risquerait d'être mélangée avec d'autres types de réponse. Une modalité supplémentaire est donc créée pour ce type de réponse : exhaustivité. Seront codées ainsi les réponses où l'étudiant indique qu'il manque des propriétés au quadrilatère (il n'a pas quatre angles droits et/ou il n'a pas quatre côtés de même longueur) sans qu'il soit possible de déterminer si cette affirmation est le fruit de la perception (Interprétation G1) ou d'une mauvaise maîtrise des règles de G2 (Interprétation « exhaustivité »). On notera que l'intitulé utilisé, « exhaustivité », ne fait référence qu'à l'une des deux hypothèses d'interprétation. C'est uniquement pour avoir un intitulé de modalité court. **Les deux interprétations restent possibles pour les productions codées de cette manière.**

Les réponses où l'étudiant utilise manifestement la perception, travaillant ainsi dans G1, sont codées 1[91]. Exemple :



Une croix apparaît en effet sur le dessin ; cette croix montre que l'étudiant a utilisé ses instruments, et donc la perception, pour déterminer la position que devrait avoir le point D pour que ABCD soit un carré[92]. Il travaille ainsi dans G1.

---

[91] C'est le cas d'Isabelle, rencontrée en introduction. Elle affirme : « ABCD n'est pas un carré car l'angle $\widehat{C}$ n'est pas droit. De plus DC n'est pas égale à AD ». Cette affirmation est proche de l'exhaustivité mais n'est pas interprétée comme telle parce que tous les côtés ne sont pas mentionnés. Ceux qui sont choisis ont effectivement une nette différence de longueur, DC étant le plus petit que les trois autres (3,1 cm au lieu de 3,2 cm). Par ailleurs, l'angle $\widehat{C}$ est codé sur la figure. Une réponse de type exhaustivité ferait plutôt référence à l'angle $\widehat{D}$.

[92] On observe ici une procédure particulière : pour déterminer s'il s'agit d'un carré, l'étudiant complète le dessin proposé pour obtenir selon lui un carré et observe s'il y a ou non superposition de l'objet tracé initialement et de ce qu'il a tracé. On retrouvera à plusieurs reprises une procédure de ce type, en particulier lorsqu'il s'agira de savoir si une droite est médiatrice d'un segment : certains PE1 traceront la médiatrice pour savoir s'il y a superposition avec la droite proposée,

Ceux qui ont une réponse du type : « un quadrilatère avec 3 angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur est un carré » travaillent dans G2, appliquant des théorèmes de la géométrie euclidienne pour conclure. Ces productions sont codées 2[93].

D'autres productions travaillent simultanément dans G1 et dans G2 :

Ces productions sont codées 12. Certaines mettent ainsi particulièrement en évidence le conflit que présentent G1 (perçu) et G2 (su) dans cette situation.

Une modalité « ambiguë » est mise en place pour les réponses trop difficiles à interpréter. La seconde grille de codage est ainsi :

Question 7G : quelle géométrie ?	
1	commentaire dans G1
2	commentaire dans G2
12	G1 et G2
A	ambiguë
S	sans commentaire
E	exhaustivité

3.5.2. Les hypothèses de recherche, analyse a priori

Cette question complète, comme nous l'avons dit, les questions précédentes 2 et 4 en présentant une question ambiguë du point de vue G1/G2. Il s'agit donc à nouveau de travailler sur les questions P1.1 et P1.4.

Nous retrouvons tout naturellement les mêmes hypothèses de recherche que dans les questions précédentes.

hr 6.1 – hr 6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1, d'autres dans G2.

Deux autres hypothèses, non spécifiques de cette question mais qui ont été mises en évidence dans le choix du codage de cette question, peuvent être formulées :

hr 9 : Certains PE1 utilisent la règle d'exhaustivité en géométrie plane

hr 10 : Certains PE1 manquent de connaissances en géométrie plane

[93] C'est le cas de Fabienne, rencontrée également en introduction.

Une autre hypothèse, plus spécifique à cette question même si elle pourrait aussi concerner celle sur le triangle ECO, est liée à la maîtrise du codage des dessins géométriques :

hr 11 : Certains PE1 ne maîtrisent pas les règles usuelles de codage des dessins en géométrie plane

Ceci les amène à ne pas tenir compte du codage et à mesurer les angles ou les longueurs des côtés codés, ou à mal en tenir compte (règle d'exhaustivité : les angles non codés droits ne sont pas droits)

Après ces questions qui mettent directement en jeu les paradigmes G1 et G2 par des questions ambiguës, étudions les questions concernant le tracé de médiatrices et les justifications, qui font cette fois intervenir G1 et G2 de manière différente, G2 pouvant être considérée comme la technologie qui permet de justifier une technique de construction dans G1.

3.6. Items 3, 5 et 8 : construire une médiatrice

Les items 3, 5 et 8 consistent à tracer une médiatrice dans des situations différentes. Il est intéressant de regrouper leur étude parce que c'est l'ensemble de ces trois items qui donne des informations pertinentes.

3.6.1. La nouvelle grille de codage de l'item 3

Faut-il considérer les instruments qui sont cochés ou ceux qui sont effectivement utilisés ? La décision a été prise de coder uniquement ce qui a été effectivement coché par l'étudiant. Néanmoins, le problème se pose en particulier pour la règle, qui est souvent utilisée et non notée. Comme dans la pratique elle est toujours utilisée, on ne code plus l'utilisation de la règle. Il est difficile de coder en disjonctif si on ne veut pas avoir trop de modalités, ou trop de questions. Seules ces questions sur les instruments, qui ne nécessitent aucune interprétation puisqu'on choisit de coder ce qui a été effectivement coché par l'étudiant, ne sont pas codées en disjonctif complet.

Du côté des procédures, la modalité A étant rare (1,05%), on peut la supprimer et la mettre dans « Autres », de même pour la modalité D (0,15%). Par ailleurs, dans certaines productions d'étudiants, on relève à la fois une intersection d'arcs de cercle, un angle droit et la marque du milieu. Il y a donc un élément superflu. Dans la pratique, il y a cependant probablement des éléments qui ont été utilisés effectivement pour la construction, et d'autres qui ont été ajoutés après coup, probablement dans le but de noter les différentes propriétés de la médiatrice. Ce qui nous intéresse est la procédure qui a effectivement été utilisée par l'étudiant. On peut trouver des indices pour préciser cette procédure dans les instruments utilisés. Quand la marque des deux côtés égaux et celle de l'angle droit apparaissent mais que la graduation de la règle ou l'équerre ou le rapporteur ne sont pas indiqués comme ayant été utilisés, on peut conclure que l'élément correspondant a été ajouté après la construction et n'est donc pas intervenu dans la procédure utilisée.

La première grille de codage proposée est la suivante :

Question 3 : construire une médiatrice	*Q.3.C : Commentaires*
Q.3.I: Instruments B graduation de la règle C rapporteur D compas E angle droit de l'équerre *Q.3.P : Procédures de construction* A une intersection d'arcs de cercle + milieu B une intersection d'arcs de cercle + angle droit C deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment D deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment E milieu et angle droit F autre procédure ou procédure indéterminée G non-réponse	A pas de commentaire B adéquation du commentaire et de la figure C non-adéquation du commentaire et de la figure

Le codage décrit ici est celui qui permet d'effectuer les premiers traitements statistiques. A ce moment-là, certaines questions restent encore sans réponse et tous les tests seront alors repris et recodés, pour certaines questions. Les items sur le tracé de médiatrice en font partie, dans le but de pouvoir préciser plus finement les procédures utilisées et les commentaires effectués. Par exemple, le codage proposé ci-dessus garde en effet trace du fait que le commentaire est ou non adéquat à la figure tracée, mais pas du contenu lui-même du commentaire. De même, la procédure C (« deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre ») est affinée. La modalité F (« autre ou procédure indéterminée ») ayant un effectif non négligeable (5,13%), une modalité « retraçage du segment » est ajoutée. Les modalités de ce deuxième temps sont donc les suivantes :

Question 3PF : Procédure fine		*Question 3T : type de commentaire*	
A	une intersection d'arcs de cercle + milieu	M	milieu
B	une intersection d'arcs de cercle + angle droit	A	angle droit
C1	deux intersections de cercles de part et d'autre de même rayon	E	équidistance des points
C2	deux intersections de cercles de part et d'autre de rayons différents	I	référence au triangle isocèle
C4	une intersection + angle droit + milieu	S	sans commentaire ou
D	deux intersections de cercles du même côté	autre	commentaire
E	milieu et angle droit		
F	procédure indéterminée		
G	non-réponse		
H	retraçage du segment		
I	trois intersections d'arcs de cercle		

Pour les procédures, ce codage ne fait qu'affiner les procédures possibles, en fonction de ce qui a été souvent repéré lors du premier codage. J'effectue moi-même le codage de tous les questionnaires ; le contrôle des différentes étapes de codage et de saisie est donc plus sûr. Il est ainsi possible d'assouplir un peu les règles fixées précédemment. En particulier, le codage en disjonctif complet disparaît pour la question Q3T (type de commentaire).

3.6.2. La nouvelle grille de codage de l'item 5

Dans la première version, les modalités retenues sont exactement les mêmes que pour la question 3, afin de permettre la comparaison. Les premiers traitements mettent en évidence le fait que garder exactement les mêmes modalités ne permet pas de mettre en relief la spécificité de chacune des questions, ce qui a justifié la mise en place d'un second codage. Celui-ci utilise donc des modalités légèrement différentes pour les procédures des items 3 et 5. Celui de l'item 5 fait en particulier apparaître le rayon des arcs de cercle tracés : ce rayon est-il ou non égal à la distance MN entre les deux extrémités du segment ? Les analyses statistiques montreront a posteriori la pertinence de cette distinction.

Question 5PF : Procédure fine	*Question 5T : type de commentaire*
A une intersection d'arcs de cercle + milieu B une intersection d'arcs de cercle + angle droit C1 deux intersections de cercles de part et d'autre de même rayon ≠ MN C1B deux intersections de cercles de rayon MN C2 deux intersections de cercles de part et d'autre de rayons différents C3 deux intersections de cercles + milieu ou angle droit D deux intersections de cercles du même côté E milieu et angle droit F procédure indéterminée G non-réponse	M milieu A angle droit E équidistance des points I référence au triangle isocèle S sans commentaire ou autre commentaire

3.6.3. La nouvelle grille de codage de l'item 8

Contrairement à ce qui a été fait pour les items 3 et 5, les modalités ne sont pas les mêmes dès le départ pour les procédures, à cause des segments [UN], [UM], [EN], [EM] qui offrent d'autres possibilités. Afin de garder un codage disjonctif, le tracé du segment [MN] et la nature du tracé de la médiatrice sont séparés en deux questions. Cette fois, outre l'adéquation ou non entre le commentaire et la procédure, on cherche à garder une partie du contenu même du commentaire. On obtient dans un premier temps les modalités suivantes :

Question 8 : construire une médiatrice	*Q.8.TM : Nature du tracé de la médiatrice*
Q.8.I: Instruments B graduation de la règle C rapporteur D compas E angle droit de l'équerre *Q.8.P : Procédures de tracé* A tracé direct (joindre les points E et U) B tracé mixte 1 : E et/ou U + milieu ou perpendiculaire C tracé mixte 2 : E et/ou U + une intersection d'arcs de cercle D deux intersections d'arcs de cercle E milieu et angle droit F autre procédure, correcte on non, ou procédure indéterminée G non-réponse	A la médiatrice est une droite B la médiatrice est considérée comme un segment C la médiatrice est considérée comme une demi-droite D interprétation ambiguë E médiatrice non tracée *Q.8.C : Commentaires* A sans commentaire B référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM) C équidistance utilisée à bon escient des points E et/ou U (explicitement nommés) des points M et N sans référence au triangle isocèle D autre commentaire

Q.8.TS : Nature du tracé du segment [MN]	*Q.8.A : Adéquation*
A la droite (MN) est tracée B le segment [MN] est tracé C ni l'un ni l'autre ne sont tracés	A pas de commentaire B adéquation du commentaire et de la figure C non-adéquation du commentaire et de la figure

Lors de la deuxième étape, cette question sera également recodée, afin d'obtenir plus de précisions sur les procédures utilisées et sur les commentaires effectués.

On a alors :

Question 8PF : procédure fine	*Question 8C : commentaire*
A direct B1 E/U + milieu B2 E/U + angle droit C1 E/U + 1 inters de cercles du côté de E/U C2 E/U + 1 inters de cercles de l'autre côté CM 1 intersection + milieu CA 1 intersection + angle droit D1 2 intersections de cercles de même rayon D2 2 intersections de cercles de rayon ≠ E milieu et angle droit F autre, correcte ou non, indéterminée G non-réponse	S sans commentaire B référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM) C équidistance de E et/ou U sans triangle isocèle M milieu A angle droit E équidistance des points D autre commentaire F bissectrice

3.6.4. Les hypothèses de recherche sous-jacentes, analyse a priori

Une analyse de ce type de tâche a été faite en détail au chapitre 3, § 2.2.(cf pages 139 et suivantes). Rappelons seulement que l'action de tracer peut être considérée comme une tâche dans G1 ou dans G2 selon la lecture qu'on en fait, et que l'explicitation correcte des propriétés utilisées (mise en évidence de la technologie qui justifie la technique) est relative à G2. Cependant, le langage utilisé (construire) appelle au premier degré un dessin, surtout pour le non-expert, et pousse ainsi plus spontanément vers G1 que vers G2.

De nombreuses hypothèses de recherche sous-tendent ces codages :

Pour l'expert, la procédure utilisée pour tracer une médiatrice s'adapte aux contraintes de la situation. C'est ainsi que dans la situation 5 l'expert tracera volontiers deux intersections d'arcs de cercle de même rayon de chaque côté du segment, mais tracera ces intersections du même côté du segment dans la situation 3, ou encore utilisera une procédure faisant intervenir un autre outil que le compas (avec règle graduée pour le milieu et/ou équerre pour l'angle droit). Dans la situation 8, l'expert tracera directement la droite (EU). Ce n'est probablement pas le cas de tous les PE1, d'où les hypothèses :

hr 12 : certains PE1 disposent de procédures de tracé très routinisées et peu adaptables

hr 13 : certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes

L'analyse des manuels de sixième effectuée au chapitre 3, paragraphe 4 (cf. pages 145 et suivantes), permet de justifier a priori l'hypothèse hr12. Même sans posséder les compétences de l'expert, on peut néanmoins penser qu'un certain nombre d'étudiants sauront néanmoins s'adapter aux diverses contraintes, d'où hr13.

L'intérêt d'avoir trois questions du même type est bien sûr de croiser ces questions. D'où l'hypothèse :

hr 14 : il y a un lien entre les procédures utilisées dans une situation et celles utilisées dans une autre

J'espère en effet mettre en évidence des profils d'étudiants qui utilisent systématiquement le compas, ou la règle graduée et l'équerre, ou, plus subtilement, tel type de tracé dans une question quand tel autre type de tracé a été effectué dans une autre question. L'intérêt sera alors bien sûr de repérer ces différents tracés.

Une dernière hypothèse vient compléter les précédentes :

hr 15 : certains PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux

Plusieurs raisons peuvent justifier cette hypothèse :

- certains PE1 ont peu de connaissances dans G2
- des procédures de tracé ont été mises en place de manière automatique, comme de simples techniques, soit trop tôt alors que la technologie correspondante est hors de portée (c'est le cas lorsque des perpendiculaires sont tracées à la règle et à l'équerre en cycle 3[94]), soit au collège dans l'étude de la médiatrice, mais sans mettre en lien les propriétés utilisées et la procédure de tracé, c'est-à-dire la technologie et la technique.

[94] Ce n'est évidemment pas au programme de cycle 3, mais c'est pourtant souvent rencontré encore dans les classes. Certains enseignants considèrent en effet que la construction à la règle et au compas est plus précise que la construction à l'équerre et qu'il vaut donc mieux l'utiliser. On est alors dans une problématique de la précision, et donc dans G1. Cela arrive naturellement lorsque l'enseignant lui-même ne se situe que dans G1 et n'est pas en mesure de justifier sa construction dans G2.

C'est le cas de certains manuels de collège, comme nous l'avons montré au chapitre 3 (cf. chapitre 3, § 4, pages 145 et suivantes).

3.7. Item 6 : un losange

3.7.1. La nouvelle grille de codage

Les remarques concernant les instruments utilisés faites pour l'item 3 restent valables ici.
La question portant sur le tracé initial est conservée, elle doit permettre de mettre en évidence la procédure utilisée. Par contre, la question portant sur le support n'a de sens que si l'on a du papier quadrillé. Elle va donc être reformulée, de sorte que l'on sache sur quel type de papier l'étudiant a travaillé en même temps que le type de procédure utilisée dans le cas de papier quadrillé. La question sur la nature du dessin obtenu est complétée afin d'obtenir un codage disjonctif complet. Une question sur la position du losange est ajoutée, pour repérer le poids de la position prototypique, « posé sur la pointe ».
En ce qui concerne la définition, les propositions B (parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques) et D (juxtaposition par leur base de deux triangles isocèles isométriques) ont des effectifs très faibles (respectivement 2.56% et 0.3%). Elles sont donc regroupées dans une modalité « autre définition correcte » plus large ; la modalité non-réponse est à nouveau ajoutée, pour le codage en disjonctif complet.
La modalité X (il est noté des propriétés qui empêchent d'obtenir un carré) fait l'objet d'une question séparée : Q.6.2.C. On obtient ainsi les modalités suivantes :

Question 6 : un losange	*Q.6.1.D : Posé sur la pointe*
Q.6.1.I : Instruments B graduation de la règle C rapporteur D compas E angle droit de l'équerre *Q.6.1.T : Tracé initial* A à partir d'une diagonale B à partir d'un côté C pas de tracé ou pas de polygone *Q.6.1.S : Support et procédure* A papier uni B papier quadrillé et utilisation spécifique du papier quadrillé C papier quadrillé et utilisation d'une procédure papier uni D pas de tracé ou pas de polygone *Q.6.1.D : Dessin obtenu* A polygone non-losange B losange non-carré C carré D pas de tracé ou pas de polygone	OD Posé sur la pointe, debout OC Posé sur la pointe, couché N Pas posé sur la pointe *Q.6.2.D : Définition* A quadrilatère ayant 4 côtés isométriques B parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires C autre définition correcte du losange D trop de propriétés du losange ou du parallélogramme E autre définition fausse F non-réponse *Q.6.2.C : Carré* A il est cité quelque chose qui implique qu'un carré n'est pas un losange B il n'y a rien qui implique qu'un carré n'est pas un losange

3.7.2. Les hypothèses de recherche, analyse a priori

Il s'agit dans la première partie de cet item d'étudier la flexibilité des procédures en fonction du support. On peut reformuler alors une hypothèse de recherche sous-jacente déjà présentée lors du travail sur les médiatrices :

r12 : certains PE1 disposent d'une procédure de tracé très automatisée et peu adaptable

ce qui, dans le cas présent, revient à : certains PE1 utilisent sur papier quadrillé des procédures « papier uni ». Ce comportement correspond à des étudiants ayant automatisé des procédures et n'étant pas capables de s'adapter à une situation particulière. Ils n'utilisent pas la spécificité du quadrillage et procèdent comme sur papier uni.

hr 16 : certains PE1, même sur papier uni, tracent le losange sur la pointe.

Il est en effet habituel de « poser le losange sur la pointe », faute bien souvent de ne pouvoir le reconnaître dans une autre position. Cette position est favorisée par le papier quadrillé si on utilise une procédure basée sur les diagonales. Elle ne s'impose pas dans les procédures sur papier blanc et il est donc intéressant d'étudier ce qui se passe de ce point de vue sur ce support.

Dans une deuxième partie, c'est la définition du losange qui nous intéresse, en même temps que le concept de définition lui-même. Plusieurs hypothèses de recherche sont sous-jacentes au codage proposé :

hr 17 : certains PE1 considèrent qu'un carré n'est pas un losange.

On retrouve ici la difficulté de considérer qu'un objet peut relever de deux catégories à la fois, la tendance naturelle à traiter les ensembles d'objets de manière disjointe plutôt qu'inclusive (voir chapitre 2, § 1.7, pages 93 et suivantes), ce qui relève de G1 plutôt que de G2.

Par ailleurs, j'ai posé l'hypothèse hr 9 : certains PE1 utilisent la règle d'exhaustivité en géométrie plane ; cette règle, plutôt appliquée dans G1, invite l'étudiant à dire tout ce qu'il sait de l'objet. Elle permet alors de poser ici une hypothèse plus précise :

hr 18 : les définitions proposées par certains PE1 sont redondantes, d'autres sont incomplètes.

Il est utile ici de préciser la notion de définition correcte. Dans sa thèse, Cécile Ouvrier-Buffet [Ouvrier-Buffet, 2003] étudie notamment une étude de [Shir, 2001] qui lui permet d'affirmer :

> *« parmi les critères mathématiques invoqués par les enseignants se trouvent : une définition est une condition nécessaire et suffisante ; une définition doit être minimale … »[Ouvrier-Buffet, 2003, page 116]*

Je reprends à mon compte ces deux éléments comme caractéristiques fondamentales d'une définition correcte, m'intéressant ainsi seulement à l'aspect mathématique sans prendre en compte par exemple l'aspect langagier. Cela est lié à la situation particulière dans laquelle je me place et pour laquelle j'ai besoin du concept de définition : je veux savoir si des définitions proposées par les étudiants sont correctes ou non. Ces définitions ne sont pas destinées aux élèves, mais uniquement au formateur. L'essentiel est donc qu'elles soient correctes du point de vue mathématique, peu m'importe qu'elles soient « claires, simples[95] », ou encore qu'elles soient « basées sur des connaissances antérieures des élèves[96] » par exemple.

---

[95] Ces caractéristiques sont généralement invoquées par les enseignants (cf. [Ouvrier-Buffet, 2003, page 116])
[96] idem

Ainsi, une proposition qui n'est pas une condition nécessaire sera considérée comme une définition fausse. Par exemple, « les angles du losange ne sont pas des angles droits » n'est pas une condition nécessaire et donnera une définition du losange considérée comme fausse[97]. Une condition non suffisante sera considérée comme incomplète[98] : « un losange est un quadrilatère avec deux diagonales perpendiculaires » est une définition incomplète du losange.

Par ailleurs, une définition doit être minimale, du point de vue des propriétés énoncées. Autrement dit, une définition doit imposer un ensemble de contraintes tel que la suppression d'une de ces contraintes rend la définition incomplète. « Parallélogramme qui possède deux diagonales perpendiculaires et quatre côtés de même longueur » est certes un lot de conditions suffisantes et non contradictoires pour avoir un losange, mais non minimal. Elle sera considérée comme redondante. Des propriétés peuvent en effet être supprimées (« quatre côtés de même longueur » ou « deux diagonales perpendiculaires ») tandis que la définition du losange reste correcte. Il est à noter cependant qu'une « petite[99] » dose de redondance pourra être acceptée. Un losange peut certes être défini par « un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur » mais la définition « parallélogramme avec quatre côtés de même longueur » sera également considérée comme acceptable, sans tenir compte de la redondance. En fait, la redondance sera prise en considération lorsqu'elle fait intervenir une propriété d'une autre nature et non quant il s'agit seulement d'une valeur numérique trop grande. Cela permet par exemple de considérer « quadrilatère qui possède quatre angles droits » comme une définition correcte du rectangle, sans exiger « quadrilatère qui possède trois angles droits », sans quoi toutes les définitions habituellement rencontrées devraient être considérées comme inexactes.

Les trois cas de définitions non correctes évoqués ci-dessus ne sont pas tous séparés dans le codage explicité au paragraphe précédent. Ce codage permet néanmoins de mettre d'un côté les définitions (ou du moins ce que les étudiants considèrent comme des définitions) présentant des conditions non nécessaires ou non suffisantes (codées « autres définitions

[97] Ceci suppose évidemment par ailleurs que l'objet dont on parle, ici le losange, soit parfaitement défini dans la communauté des mathématiciens, avec un sens qui fait consensus et qui donne la norme ; la définition proposée peut alors être considérée comme fausse, c'est-à-dire en désaccord avec la norme.

[98] Là encore, par rapport à la norme : on ne se situe pas dans un processus de construction de définition en cours mais dans une situation où le concept est sensé être connu par l'étudiant.

[99] Personne ne sera dupe de l'aspect tout à fait subjectif de ce « petit » !

fausses ») et d'un autre côté les définitions redondantes (codées « trop de propriétés »), afin d'évaluer leur fréquence.

Si l'hypothèse hr18 est vérifiée, un travail pourra ensuite être envisagé en formation sur les « définitions minimales », en particulier autour de la classification des quadrilatères[100]. Il semble en effet utile que les professeurs des écoles puissent maîtriser ce concept. En fin de cycle 3 par exemple, le rectangle doit être maîtrisé. Si on demande à un élève de cycle 3 de vérifier (dans G1) qu'un quadrilatère ABCD tracé est un rectangle, qu'attend-on de l'élève comme vérification[101] ? Il est utile que l'enseignant ait conscience que vérifier par exemple la présence de trois angles droits suffit, ou encore que les côtés sont de même longueur deux à deux et qu'il y a un angle droit. Vérifier que le quadrilatère possède **quatre** angles droits **et** que les côtés sont de même longueur deux à deux n'est pas utile ! Le critère qui nous intéresse ici n'est donc pas un critère de véracité (même « trop » complètes, c'est-à-dire non minimales, ces définitions définissent bien un rectangle) mais un critère d'efficacité.

Plusieurs arguments peuvent par ailleurs permettre d'expliquer que les étudiants donnent des définitions non minimales, c'est-à-dire avec toutes (ou presque) les propriétés qu'ils connaissent pour définir un objet :

- la règle d'exhaustivité déjà rencontrée : il faut dire tout ce que l'on sait de l'objet
- la non maîtrise du concept de « conditions minimales », difficile du point de vue logique
- un manque de connaissances dans G2

3.8. Item 9

3.8.1. La nouvelle grille de codage

Le codage initial n'est que très peu modifié, on obtient :

[100] Une telle proposition sera mise en œuvre et explicitée au chapitre 7, paragraphe 1.1.2

[101] Cette expérience a été faite dans une classe de CM1. Une procédure fréquente des élèves pour vérifier la présence d'un rectangle était de vérifier que les **quatre** angles étaient droits et que les **deux paires** de côtés opposés étaient de même longueur (voire que les côtés consécutifs n'étaient pas de même longueur…).

Question 9 : parallélogramme	*Q.9.P : Procédures*
Q.9.I : Instruments	
B graduation de la règle C rapporteur D compas E angle droit de l'équerre	A côtés opposés de même longueur B côtés opposés parallèles C deux côtés parallèles et isométriques D diagonales se coupant en leur milieu E autres procédures F Non-réponse

Il n'y a pas de difficultés dans cette partie, et donc rien de particulier dans le document d'accompagnement.

3.8.2. Les hypothèses de recherche, analyse a priori

Cette question est avant tout destinée à faire le point sur ce que savent les PE1 sur le parallélogramme, et plus précisément sur les procédures de construction. C'est le croisement de cette question avec d'autres qui sera intéressant. L'hypothèse de recherche sous-jacente peut être ainsi formulée :

hr 19 : des profils d'étudiants, utilisant des procédures de même type, apparaissent dans la population.

En première approximation, j'appelle procédure de même type des procédures utilisant les mêmes instruments. Deux groupes d'instruments notamment peuvent émerger : règle et compas d'une part, ou règle graduée et équerre d'autre part. Des liens avec les procédures de tracé d'une médiatrice ou d'un losange notamment seront intéressants à rechercher.

4. Variantes et nouvelles questions dans les tests ultérieurs

Dès la première année de ce travail de thèse, 878 tests sont disponibles et donc codés. 878 est un nombre déjà important et il ne sert à rien de reposer les mêmes questions sur un autre public les années suivantes : je fais l'hypothèse que les résultats seraient identiques. Par contre, l'analyse de ces tests soulève de nouvelles questions qui restent alors sans réponse. Les deux années suivantes, deux autres tests vont donc être proposés aux étudiants. Les items qui sont apparus les plus intéressants sont repris, avec, à chaque fois, une légère modification, de formulation et/ou d'ordre ; certains sont abandonnées, de nouveaux sont ajoutés. Il faut cependant noter que les effectifs sont plus faibles sur les tests ultérieurs et il faut donc être

vigilant sur les conclusions qu'ils permettent d'obtenir. L'intérêt de ces nouveaux tests est d'affiner les résultats obtenus dans le test initial.
Je vais maintenant décrire les modifications apportées dans les questions pour obtenir les tests 2 et 3, ainsi que les grilles de codage et les hypothèses de recherche sous-jacentes[102].

4.1. Les tracés de médiatrice

Une première question se pose après le test 1 : « L'ordre des questions a-t-il une influence sur les procédures utilisées par les étudiants ? ». Cette question apparaît parce que l'analyse des résultats du test 1 permet de mettre en évidence la procédure majoritairement utilisée par les étudiants dans le tracé d'une médiatrice sans contrainte. Mais ce tracé de médiatrice sans contrainte est demandé **après** celui de la médiatrice en bas de page et la procédure utilisée est souvent différente dans les deux situations. Il est alors difficile de déterminer dans quelle mesure les étudiants changent de procédure entre les deux tracés parce que le segment est dans une position différente ou parce qu'on leur demande de refaire un tracé qu'ils ont déjà effectué. Une étudiante me dit en effet un jour : « si on nous demande de faire deux fois la même chose[103], c'est pour qu'on montre une autre procédure ». Dans quelle mesure cette remarque fait-elle partie du contrat didactique ? Autrement dit, dans quelle mesure la procédure choisie par l'étudiant est-elle plus liée à son désir de répondre à ce qu'il croit être l'attente de l'enseignant – changer de procédure - qu'aux caractéristiques de la situation – position du segment [MN] dans l'espace de travail - ?
Ainsi, les questions concernant les tracés de médiatrice sont mises dans un autre ordre : tout d'abord la situation sans contrainte avec le segment en milieu de page, ensuite la médiatrice en bas de page, enfin la situation avec les deux triangles isocèles. Afin de pouvoir comparer avec l'analyse déjà effectuée, la formulation et le codage sont conservés à l'identique. Cependant, chaque fois, pour assurer la prise de décision au codage sur la procédure utilisée, qui a parfois été difficile dans le premier test, des indications supplémentaires sont demandées à ce sujet : « Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice. (Vous pouvez regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit) ». Cette question n'est pas codée.
Une hypothèse de recherche sous-jacente à cette modification d'ordre peut être formulée :

[102] Le lecteur trouvera ces tests et les grilles de codage correspondantes en annexes 9 à 12.
[103] Elle parle de tracer des médiatrices.

hr 20 : l'ordre des questions influence la procédure utilisée par l'étudiant.

4.2. Modification de formulation

Trois questions sont modifiées dans la formulation.

4.2.1. Construisez un triangle ABC

Dans la question sur le triangle aplati (Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. Que remarquez-vous ?), « Que remarquez-vous ? » est remplacé par « Que pouvez-vous dire de ABC ? » dans le test 2. La formulation met ainsi plus l'accent sur le triangle ABC. Il s'agit de les amener à préciser si pour eux ABC est ou non un triangle.

L'hypothèse de recherche sous-jacente à cette modification de formulation est :

hr 21 : la formulation de la question influence la réponse de l'étudiant.

Dans le test 3 par contre, la question est complètement modifiée pour faire tracer non plus un triangle aplati, mais un triangle rectangle. Il ne s'agit plus alors d'une simple modification de formulation. Elle sera étudiée plus loin dans le paragraphe concernant les nouvelles questions.

4.2.2. L'angle $x\widehat{O}y$ est-il droit ?

Cette question fait l'objet d'une modification de formulation dans le test 2 et est supprimée dans le test 3. « Que pouvez-vous dire de l'angle $x\widehat{O}y$? Justifiez votre réponse » devient : « L'angle $x\widehat{O}y$ est-il droit ? Justifiez votre réponse ». La question ouverte devient ainsi fermée. L'hypothèse de recherche sous-jacente est à nouveau :

hr21 : la formulation de la question influence la réponse de l'étudiant.

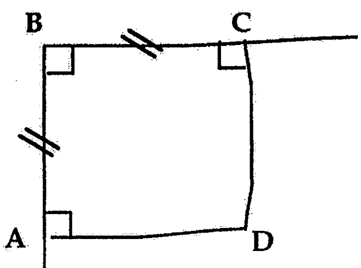
En particulier, on peut imaginer qu'il est plus facile de répondre « rien » à la question « que pouvez-vous dire de l'angle $x\widehat{O}y$? » que répondre « on ne peut pas répondre » à la question « L'angle $x\widehat{O}y$ est-il droit ? ».

4.2.3. Quelle est la nature du triangle ECO ?

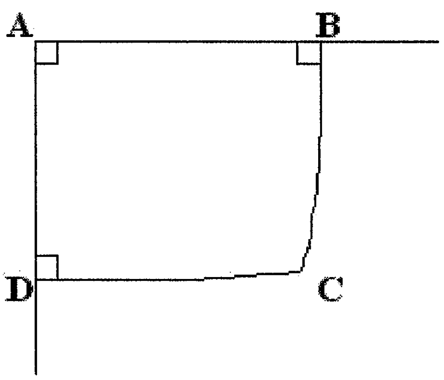
De la même manière, cette question est modifiée dans les tests 2 et 3. « Comment le savez-vous ? » est remplacé par « Justifiez ». L'objectif est toujours de tester la stabilité des résultats obtenus dans l'analyse du premier test par rapport à des modifications de formulation.

4.3. Modification du dessin proposé

Un autre item va faire l'objet d'une modification, cette fois surtout sur le fond même si la formulation est également touchée : celui qui s'intéresse à la nature du quadrilatère ABCD. Rappelons l'item dans le test initial :

7		Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

Il devient dans le test 2 (septembre 2001) :

5		Le quadrilatère ABCD a-t-il 4 angles droits ? Comment le savez-vous ?

La grille de codage est proche de celle utilisée pour la question précédente dans le test initial :

<table>
<tr><td>Question 5 : 4 angles droits ?

Q5G : quelle géométrie ?
G1 commentaire dans G1
G2 commentaire dans G2
12 G1 et G2
A ambigu
S sans commentaire
E exhaustivité</td><td>Q5RJ : Réponse et justification
A oui et non
B oui et justification exacte
C oui et justification fausse
D oui sans justification
E non + angle non marqué
E2 non + angle mesuré
F1 non + tracé non droit
F2 non + autre commentaire
F3 non sans commentaires
G autre réponse et non-réponse</td><td>Q5P : Précision du tracé
A remarque explicite sur le peu de précision
B il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé</td></tr>
</table>

Elle est cependant plus détaillée dans le cas où l'étudiant affirme que ABCD n'a pas quatre angles droits. Cinq cas sont alors envisagés :

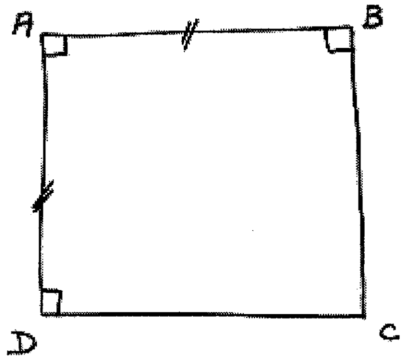
1. L'étudiant précise que le quatrième angle ne possède pas de symbole d'angle droit (E)
2. L'étudiant précise qu'il a mesuré l'angle, fait référence à l'équerre, etc. (E2)
3. L'étudiant précise que le tracé n'est pas droit (F1)
4. L'étudiant effectue un autre commentaire (F2)
5. L'étudiant ne fait aucun commentaire (F3)

J'ai développé lors de l'analyse du codage de cette question (cf. § 3.5.1 de ce chapitre, pages 187 et suivantes) une difficulté rencontrée dans l'interprétation des réponses des étudiants. Les hypothèses de recherche de cette question reprennent celle de la version du test initial :

> **hr 9** : Certains PE1 utilisent la règle d'exhaustivité en géométrie plane
>
> **hr 10** : Certains PE1 manquent de connaissances en géométrie plane.

Pour tester en effet l'effet de ce manque de connaissances allié à la règle d'exhaustivité, je simplifie l'objet géométrique en ne faisant plus référence aux longueurs des côtés, mais seulement aux angles droits. Dans le test 1, G2 amenait à utiliser le théorème : « tout quadrilatère qui a trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur est un carré », éventuellement mal maîtrisé par certains PE1, tandis que dans cette version, « tout quadrilatère qui a trois angles droits en a quatre et est donc un rectangle » suffit. Ce théorème est plus simple que le précédent, l'effet de hr9 et hr10 devrait être diminué. Par contre, l'ambiguïté entre G1 et G2 reste bien sûr présente : l'étudiant qui considère ce dessin comme l'Objet géométrique peut travailler dans G1 et affirmer de manière perceptive (même sans instrument) que l'angle en C n'est pas droit (l'inexactitude du tracé est flagrante) ; celui qui le considère comme Représentant d'un objet théorique peut, lui, travailler dans G2 en faisant intervenir une propriété plus simple que précédemment. Le dessin proposé reste par ailleurs mixte : une partie « droite », une autre ressemblant à du dessin à main levée.

Cette caractéristique est soupçonnée d'avoir une influence sur la réponse, parallèlement au manque de connaissances et à la règle d'exhaustivité. Pour évaluer cette éventuelle influence, un autre dessin est proposé dans le test 3, entièrement dessiné à main levée. L'item est alors le suivant :

2		Que pouvez-vous dire du quadrilatère ABCD ? Comment le savez-vous ? Expliquez en détail.

La grille de codage est la suivante :

Question 2 : Nature du quadrilatère ABCD *Q2G : quelle géométrie ?* G1 commentaire dans G1 G2 commentaire dans G2 12 G1 et G2 A ambigu S sans commentaire E exhaustivité	*Q2RJ : Réponse et justification* A carré et justification exacte B carré et justification fausse C carré sans justification D non carré E autre réponse et non-réponse F carré et non carré	*Q2P : Précision du tracé* A remarque explicite sur le peu de précision B il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

L'ambiguïté entre G1 et G2 reste présente : l'étudiant peut considérer le dessin proposé comme objet de G1 ou comme représentant d'un objet de G2. L'hypothèse de recherche sous-jacente est :

hr 22 : un dessin à main levée favorise un travail dans G2

D'autres hypothèses de recherche restent pertinentes pour ces questions dans les tests 2 et 3 :

> hr 6.1 – hr 6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1, d'autres dans G2.

4.4. Les nouveaux items

4.4.1. Carré et Thalès

Deux items, dont il paraît plus difficile de tirer des conclusions du point de vue G1/G2 sont supprimés : celui sur le losange et celui sur le parallélogramme. Ils sont en effet plus centrés sur les connaissances des étudiants sur les quadrilatères que sur l'utilisation de G1 et G2. De ce fait, il est possible d'ajouter un item sans trop allonger le test. Il est suggéré par un atelier de Kuzniak et Rauscher au XXIX^{e} colloque de la Copirelem (cf. [KUZNIAK & RAUSCHER. 2002, page 285]). Dans la version initiale, l'énoncé était :

Construire un carré ABCD de côté 5 cm. 1. Calculer BD. 2. Placer le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm. La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?[104]

J'ai fait le choix de supprimer la question du calcul de BD. Cela permettra ainsi plusieurs types de procédures :

Procédure	conclusion	Paradigme dont relève la procédure
Vérification visuelle ou à l'aide de la règle et de l'équerre du parallélisme des droites	Les droites sont parallèles	G1
Vérification de la perpendicularité de (IL) et de (BC), visuellement ou à l'aide de l'équerre	Les droites sont parallèles	G1
Mesure de BD puis application de la réciproque du théorème de Thalès	Les droites sont parallèles	Un peu G2 mais essentiellement G1
Calcul de BD par le théorème de Pythagore, approximation de BD à 7 cm puis application de la réciproque du théorème de Thalès	Les droites sont parallèles	Un peu G2 mais essentiellement G1
Calcul de BD par le théorème de Pythagore, puis application de la contraposée du théorème de Thalès	Les droites ne sont pas parallèles	G2

[104] Une analyse détaillée de cette version se trouve dans [Houdement & Kuzniak. 2003, pages 63-65].

En particulier, cela permet de multiplier les endroits où les étudiants sont susceptibles de se situer dans G1.

Ainsi, dans le test 2, l'item est :

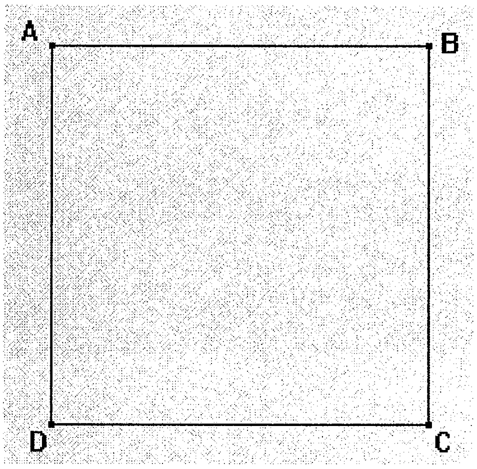
Construisez un carré ABCD de côté 5 cm. Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm. Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ? Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?

Dans le test 3, l'item est :

ABCD est un carré de côté 5 cm.

Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm.

Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?



Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?

La grille de codage est :

Question 7 : Carré et Thalès	*Q7G : quelle géométrie ?*
Q7P : Les droites sont : A parallèles +cite Thalès + ne démontre pas B parallèles + Thalès + calculs approchés C parallèles + cite Thalès + mesure des longueurs ou des angles, explicite ou non F parallèles – Thalès+ mesure G parallèles – Thalès + ça se voit ou rien du tout H non parallèles et figure fausse ou raisonnement faux I non parallèle et figure exacte J autre commentaire (sans parallélisme) K sans commentaire ni construction L sans commentaire mais construction M parallèles et non parallèles N ne conclue pas	G1 commentaire dans G1 G2 commentaire dans G2 12 G1 et G2 A ambiguë S sans commentaire

Seules les modalités M et N apparaissent pour le test 3 mais ne sont pas présentes pour le test 2.

Cet item est à nouveau ambigu entre G1 et G2, mais d'une façon différente des situations précédentes. Elle commence pour l'étudiant par une tâche dans G1 : il s'agit de tracer un carré dans le test 2, de placer des points I et J dans les tests 2 et 3. Ces points doivent être placés aux instruments : en utilisant la règle graduée. Seule la perception (instrumentée) permet de valider le placement correct des points. Cette première tâche se situe donc bien dans G1. Comment faut-il alors répondre à la question : « Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ? » ? L'étudiant peut continuer la tâche dans G1, et répondre en utilisant à nouveau la perception (instrumentée ou non) ou changer de paradigme et laisser de côté les informations apportées par le dessin pour n'utiliser que les informations discursives qui définissent les objets et les théorèmes de géométrie euclidienne, ici le théorème de Pythagore et la contraposée du théorème de Thalès. Pour travailler ainsi dans G2, il lui faut maîtriser des connaissances de géométrie euclidienne[105]. Dans la version 2, le tracé du carré n'est pas demandé, mais le fait de demander de placer les points I et J situe le début du problème plutôt dans G1 également.

La variante entre les deux versions (carré tracé ou non) est introduite dans un premier temps pour des raisons de gain de temps. Sur papier uni, certains étudiants tracent en effet le carré à

[105] Certains sont certes capables de citer le théorème de Thalès mais peu sont capables d'utiliser correctement sa réciproque ou sa contraposée.

la règle et au compas et prennent beaucoup de temps pour répondre à cette question ; en outre, le tracé du carré lui-même ne présente pas d'intérêt. Cette modification a cependant une autre influence : le dessin obtenu par l'étudiant est plus précis dans le test 3 que dans le test 2. Il est alors intéressant d'étudier si cela a une influence sur le positionnement en G1 ou G2 des étudiants, puisque la problématique de G1 est celle de la précision. Les hypothèses de recherche sont toujours les mêmes :

> HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.
>
> hr 6.1 – hr 6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1, d'autres dans G2.
>
> hr 8 : Certains PE1 peuvent, dans une même question, utiliser des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.
>
> hr 10 : Certains PE1 manquent de connaissances en géométrie plane

4.4.2. Tracer un triangle rectangle

Comme nous l'avons dit précédemment, l'item sur le triangle aplati disparaît dans le test 3. Un autre est proposé, avec des caractéristiques proches :

- Une tâche de construction est proposée dans G1
- Une justification est demandée, pour laquelle l'étudiant pourra se positionner dans G1 ou dans G2 avec des arguments bien distincts
- Les connaissances géométriques pour répondre dans G2 sont accessibles à une majorité de PE1.

Mais cette fois le triangle est rectangle. L'item devient alors :

Q6 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm, BC = 6 cm, AC = 4,5 cm. Que peut-on dire du triangle ABC ? Comment le savez-vous ?

Les valeurs numériques sont choisies de sorte que le fait que le triangle soit rectangle ne soit pas trop évident (le triangle égyptien[106], de côtés 3, 4 et 5 cm, est souvent connu comme exemple prototypique du triangle rectangle). Les arguments utilisés pour la justification permettent effectivement de mettre en évidence un positionnement dans G1 ou dans G2 : ceux

[106] Un triangle pythagoricien est un triangle rectangle dont les dimensions des côtés sont des nombres entiers. Le triangle égyptien est le plus petit des triangles pythagoriciens. Il servait de base à la construction des équerres dans l'Égypte ancienne.

qui vérifient à l'équerre ou au rapporteur utilisent la perception visuelle, ils se situent dans G1, ceux qui appliquent la réciproque du théorème de Pythagore utilisent la définition discursive de l'objet et les théorèmes de géométrie euclidienne, ils se situent dans G2. Certains utilisent successivement les deux arguments, ils se situent dans G1 puis dans G2. D'autres, comme pour la question « l'angle $x\widehat{O}y$ est-il droit ? » (cf. § 3.3.2 ci-dessus, pages 183 et suivantes), effectuent une construction[107] ; ils se situent dans G1, puisqu'ils vérifient perceptivement qu'un point est sur un cercle, alors qu'ils pensent se situer dans G2 puisqu'ils appliquent un théorème de géométrie euclidienne.

Le codage prend en compte le tracé effectué, la nature du triangle annoncée par l'étudiant et les justifications apportées. La grille de codage utilisée est la suivante :

Question 6 : nature du triangle ABC	*Q6J : Justification de l'angle droit*
Q6T : Tracé A correct B incorrect C non-tracé *Q6N : Nature* A rectangle B autre C non-réponse	A Équerre B Pythagore C Équerre et Pythagore D Autre ou non réponse I Cercle circonscrit, diamètre = hypoténuse

La tâche est proposée dans G1 : il s'agit d'effectuer un tracé. Rien n'indique explicitement qu'il faille changer de paradigme pour répondre à la question de la justification, d'autant plus que cette fois, les validations de G1 (perception) ou de G2 (validation hypothético-déductive basée sur la réciproque du théorème de Pythagore) produisent exactement les mêmes conclusions, contrairement à l'item 2 (« $x\widehat{O}y$ est-il droit ? ») où l'un des paradigmes ne permet pas de répondre, à l'item 4 (« Quelle est la nature du triangle ECO ? ») où l'un donne une conclusion plus complète que l'autre, où encore à l'item 7 (« Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? ») où les deux donnent des conclusions opposées. Cet item est donc à nouveau ambigu du point de vue G1/G2, d'une manière encore différente des items précédents. Les hypothèses de recherche déjà énoncées sont à nouveau sous-jacente à cette question :

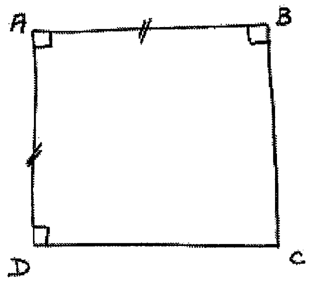
> hr 6.1 – hr 6.2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1, d'autres dans G2.

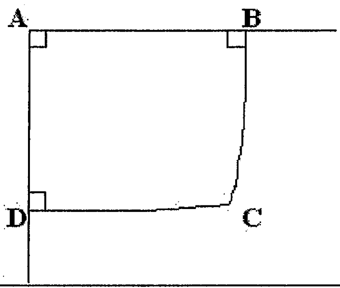
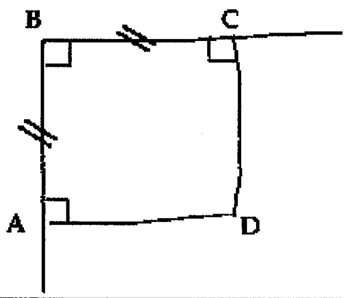
[107] Ils tracent un cercle de diamètre [AB] et vérifient que C est sur ce cercle.

HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.
hr1 : Certains PE1 peuvent, dans une même question, utiliser des arguments de G1 et d'autres issus de G2.

5. Synthèse

Trois versions successives du test ont été proposées aux étudiants. Voici un tableau récapitulant les différentes versions :

Questionnaire initial	**Questionnaire septembre 2001**	**Questionnaire septembre 2002**
Q1 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. Que remarquez-vous ?	Q1 : Que pouvez-vous dire de l'angle $x\hat{O}y$? Justifiez votre réponse.	Q1 : médiatrice sans contrainte
Q2 : L'angle $x\hat{O}y$ est-il droit ? Justifiez votre réponse.	Q2 : médiatrice sans contrainte	Q2 : Que pouvez-vous dire du quadrilatère ABCD ? Comment le savez-vous ? Expliquez en détail. 
Q3 : médiatrice en bas de page	Q3 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. Que pouvez-vous dire de ABC ?	Q3 : Quelle est la nature du triangle ECO ? Justifiez
Q4 : Quelle est la nature du triangle ECO ? Comment le savez-vous ?	Q4 : médiatrice en bas de page	Q4 : médiatrice en bas de page
Q5 : médiatrice sans contrainte	Q5 : ABCD a-t-il 4 angles droits ?	Q5 : médiatrice et triangles isocèles

	 	
Q6 : losange (tracé puis définition)	Q6 : médiatrice et triangles isocèles	Q6 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm, BC = 6 cm, AC = 4,5 cm. Que peut-on dire du triangle ABC ? Comment le savez-vous ?
Q7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.  	Q7 : Quelle est la nature du triangle ECO ? Justifiez	Q7 : carré et Thalès
Q8 : médiatrice et triangles isocèles	Q8 : carré et Thalès	
Q9 : parallélogramme		

Quatre types de situations ambiguës ont ainsi été proposés :

exercice	dans G1	dans G2	commentaire
$x\widehat{O}y$ est-il droit ?	oui	On ne peut répondre	On peut répondre dans G1 mais pas dans G2
Quelle est la nature du triangle ECO ?	Rectangle et isocèle	rectangle	Réponse plus complète dans G1
Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?	oui	non	Réponses contradictoires
Que peut-on dire du triangle ABC tel que AB = 7,5 cm, BC = 6 cm, AC = 4,5 cm ?	rectangle	rectangle	Réponses identiques

Par ailleurs, de nombreuses hypothèses contextuelles de recherche ont été proposées, que nous pouvons rassembler[108] :

hr 1 : Les étudiants ayant une formation scientifique travaillent spontanément dans G2, les étudiants avec une autre formation travaillent spontanément dans G1.

hr 2 : Les étudiants ayant une expérience d'enseignement dans l'élémentaire travaillent plus spontanément dans G1.

hr 3 **:** La majorité des PE1 ne se pose pas la question de l'existence du triangle « 5 – 8 – 13 »

hr 4 **:** Certains PE1 tracent un triangle non aplati pour le triangle « 5 – 8 – 13 »

hr 5 : Certains PE1 ne considèrent pas trois points alignés comme constituant un triangle

hr 6 .1: Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1

hr 6 .2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G2

hr 7 : Certains PE1 se placent inconsciemment dans G1 tout en croyant travailler dans G2

hr 8 : Certains PE1 peuvent, dans une même question, utiliser des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.

hr 9 : Certains PE1 utilisent la règle d'exhaustivité en géométrie plane

hr 10 : Certains PE1 manquent de connaissances en géométrie plane.

hr 11 : Certains PE1 ne maîtrisent pas les règles usuelles de codage des dessins en géométrie plane.

hr 12 : Certains PE1 disposent de procédures de tracé très routinisées et peu adaptables

hr 13 : Certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes

hr 14 : Il y a un lien entre les procédures utilisées dans une situation et celles utilisées dans une autre

hr 15 : Certains PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux

hr 16 : Certains PE1, même sur papier uni, tracent le losange sur la pointe.

hr 17 : Certains PE1 considèrent qu'un carré n'est pas un losange.

[108] Pour pouvoir s'y référer facilement, le lecteur trouvera toutes ces hypothèses rassemblées en annexe 14

hr 18 : Les définitions proposées par certains PE1 sont redondantes, d'autres sont incomplètes.

hr 19 : Des profils d'étudiants, utilisant des procédures de même type, apparaissent dans la population.

hr 20 : L'ordre des questions influence la procédure utilisée par l'étudiant.

hr 21 : La formulation de la question influence la réponse de l'étudiant.

hr 22 : Un dessin à main levée favorise un travail dans G2

Le chapitre qui va suivre va maintenant présenter les résultats obtenus, ainsi que les réponses à ces hypothèses, lorsque cela est possible.

Chapitre 5

Chapitre 5 : Présentation des résultats

Après la saisie et quelques vérifications[109], des traitements statistiques sont effectués : tris à plat, tris croisés, analyses factorielles des correspondances multiples à l'aide des logiciels SPAD et Xlstat, analyses implicatives à l'aide du logiciel CHIC. Je présenterai ici tous les tris à plats mais seulement, parmi les autres analyses, celles qui fournissent des résultats intéressants. Les intitulés des questions ont été décrits au paragraphe 1 du chapitre 4 (cf. pages 157 et suivantes), le codage au paragraphe 3 du chapitre 4 (cf. pages 174 et suivantes); le lecteur pourra s'y référer au fur et à mesure de l'analyse. Il trouvera également en annexe 4 le questionnaire initial, en annexes 6 et 7 ses feuilles de codage, rappelant les divers codes utilisés, et en annexes 9 à 12 les textes et les grilles de codages des tests 2 et 3.

Je vais présenter une analyse question par question, avant de faire des croisements entre les questions qui le permettent et qui fournissent des résultats intéressants.
L'ordre d'étude des questions va reprendre l'ordre de présentation du nouveau codage dans le chapitre précédent :

1. items 1, 2, 4, 7 du test 1, et dernier item des tests 2 et 3 où une question ambiguë de reconnaissance d'objet est posée, qui permettent de mettre en évidence dans quel paradigme géométrique les étudiants travaillent.
2. items 3, 5 et 8[110] sur les tracés de médiatrices et leur justification, qui permettent d'étudier le lien entre les techniques de tracé de G1 et les technologies de G2
3. items 6 et 9 sur les constructions de quadrilatères particuliers.

S'il n'y a pas de précision, les résultats proposés concernent le test 1. C'est le test principal, puisqu'il porte sur 878 étudiants. Les deux autres tests servent à affiner les résultats, mais leur

---

[109] L'objectif du codage en disjonctif complet est de pouvoir faire des vérifications de saisie. Celles-ci ont lieu au fur et à mesure de la saisie par le fait que dans chaque colonne, un et un seul caractère doit être saisi. Quelques modalités dérogent à la règle : ce sont celles concernant les instruments utilisés. Ces colonnes sont mises en couleur dans le tableau Excel de saisie et permettent au fur et à mesure de s'assurer que l'on saisit la bonne colonne.
Le premier travail après la saisie est la vérification du fichier. Sous Excel, en utilisant des formules conditionnelles, il est vérifié que les codes utilisés rentrent dans la liste des modalités prévues. Le taux d'erreur est faible, de l'ordre de 1 erreur par colonne, soit 1 sur 878 ! Les copies étant toutes numérotées, la copie mal saisie est alors retrouvée et la modification faite. On est alors sûr que dans chaque colonne, seules les modalités permises sont utilisées.

[110] Attention, ces numéros correspondent au test 1, l'ordre a été modifié dans les tests 2 et 3.

faible effectif (98 pour le test 2 et 75 pour le test 3) ne permettent pas de faire les mêmes traitements.

Mais avant de présenter ces résultats, je veux rapidement mettre en garde contre une généralisation abusive de mes résultats.

Les PE1 concernés par mon travail sont d'une part des étudiants d'IUFM, en particulier de Lorraine (1998-2000) et d'Orléans-Tours (1999-2002), ainsi que des étudiants des CFP[111] d'Avrillé (1999-2005) ou de Nantes (2002-2003). Chaque IUFM et chaque direction de l'enseignement catholique[112] possèdent son propre mode de recrutement, qui fait notamment intervenir de manière différente les compétences des candidats en mathématiques. Par ailleurs, chaque région possède ses spécificités, ne serait-ce qu'en terme d'offre de formation au niveau universitaire. Ainsi par exemple, les licences pluridisciplinaires n'existent pas partout et sont souvent très différentes les unes des autres. Une autre particularité a été signalée : la présence importante dans certains groupes en CFP d'étudiants ayant effectué des suppléances.

Ainsi, la population en formation est différente d'un IUFM ou d'un CFP à l'autre, parfois également très hétérogène à l'intérieur d'un même centre de formation. Par conséquent, même si l'effectif étudié est conséquent, il faut être modeste sur la généralisation possible de mes résultats. Pour simplifier les formulations des hypothèses de recherche ou des réponses à ces hypothèses par exemple, j'utiliserai l'expression très générique « **les** PE1 », mais il ne faudra jamais oublier qu'il s'agit en fait des PE1 que j'ai étudiés, et que toute généralisation peut être abusive.

[111] Rappelons que les CFP sont les équivalents des IUFM pour la formation des professeurs des écoles de l'enseignement privé. La formation et le concours sont régis par les mêmes textes officiels que l'enseignement public.

[112] Dans l'enseignement privé sous contrat, ce ne sont pas les CFP qui sélectionnent les candidats, mais les directions diocésaines de l'enseignement catholique, en tant que représentant de leur futur employeur.

1. Origine des étudiants : bac, licence et suppléances

Bac d'origine :

Modalité	Effectif	%
A	9	1,03
E	119	13,55
L	140	15,95
NR	406	46,24
S	204	23,23

Licence d'origine :

Modalité	Effectif	%
A	23	2,62
E	23	2,62
L	169	19,25
NR	441	50,23
P	24	2,73
S	115	13,10
SH	83	9,45

Les tableaux ci-contre mettent en évidence le nombre important d'étudiants qui n'ont pas précisé leur baccalauréat et leur licence. Ceci est lié au fait que la première version du test ne comportait pas ces questions, seuls les étudiants de l'année 1999-2000 ont pu y répondre. Ces deux variables seront par la suite parfois mises en variables supplémentaires mais le trop grand nombre de non-réponses ne permettra pas toujours d'en tirer des conclusions.

Une remarque peut cependant être faite : sur la population qui a répondu à ces questions, un quart a une licence scientifique et la moitié a un baccalauréat scientifique. Le même calcul sur l'ensemble des groupes testés avec les tests 2 et 3 les deux années suivantes donne des taux de scientifiques plus faibles encore : 30 % d'étudiants ont un bac scientifique, 14 % une licence scientifique.

L'étude des différents groupes des tests 2 et 3 montre des différences dans les taux de bacheliers scientifiques par exemple. Ils varient de 23 % (CFP Nantes 2002) à 46 % (CFP Avrillé 2001) selon les groupes. Ceci confirme la difficulté à généraliser les résultats déjà signalée : la population des PE1 est hétérogène à l'intérieur d'un groupe, mais aussi différente d'un groupe à l'autre. Dans tous les cas néanmoins, la population n'est pas majoritairement scientifique. La grande majorité n'a pas fait de géométrie depuis le lycée. Ils possèdent donc un bagage mathématique limité en géométrie. C'est bien sûr un des éléments majeurs qui explique les difficultés de ces étudiants en géométrie et qui justifie tout ce travail de thèse.

En ce qui concerne les suppléances pour le test 1, on obtient le tableau d'effectifs suivant :

	CFP Avrillé	IUFM	total
NR (non réponse)	0	582	878
0 mois	16	199	215
de 1 à 120 mois	73	8	81
total	89	789	878

Il met en évidence que la grande majorité des étudiants d'Avrillé (90 %) ont été suppléants, tandis que c'est le cas d'à peine 4 % des étudiants d'IUFM qui ont répondu à cette question. Ceci marque à nouveau la différence de population entre ces deux types d'établissements.

2. Les items de reconnaissance de figure plane

2.1. Item 1 : tracer le triangle

2.1.1. Question Q1P : Procédures de construction et commentaires

Il s'agit dans cette question de coder la procédure et les commentaires de l'étudiant pour tracer un triangle de dimensions 5, 8, 13. On obtient les résultats suivants :

	Cercles sécants	Tracé au compas avec cercles tangents : 65 %			Cercles extérieurs	Tracé règle			
	Q1PA	Q1PB	Q1PC	Q1PD	Q1PE	Q1PF	Q1PG	Q1PH	Total
effectif	151	233	165	176	40	64	25	24	878
pourcentage	17,2	26,5	18,8	20	4,56	7,29	2,85	2,73	100

On voit que les deux tiers des PE1 utilisent la procédure avec le compas et la règle graduée, et résolvent correctement la tâche dans G1.

7 % des étudiants seulement effectuent directement le tracé à la règle, ce qui suppose une analyse des valeurs numériques avant d'effectuer la construction. Ces quelques étudiants se situent dans G2 : ils analysent la description discursive de l'objet dans G2 avant d'en effectuer une représentation. Tous les autres effectuent directement un tracé au compas. Ce résultat permet d'affirmer en réponse à hr 3 :

r 3 : La grande majorité (87 %) des PE1 ne se pose pas la question de l'existence du triangle « 5 – 8 – 13 ».

L'hypothèse d'interprétation a été proposée au chapitre 4, § 3.2.2, (cf. pages 181 et suivantes).

22 % des étudiants effectuent un tracé qui conduit à des cercles sécants (17 %) ou extérieurs (5 %). En réponse à hr 4, on peut affirmer :

r 4 : 17 % des PE1 tracent un triangle non aplati dans l'item 1.

2.1.2. Tableau croisé Q1C - Q1I

Trois questions sont codées en binaire :

- Q1C : Y a-t-il ou non référence explicite à l'égalité $13 = 8 + 5$?
- Q1I : Est-il explicitement dit qu'il est impossible de tracer le triangle ?
- Q1A : Est-il explicitement dit que les points sont alignés ?

Pour cette dernière question, les résultats sont les suivants :

Modalité	Effectif	%
Non	526	59,91
Oui	352	40,09

40 % des étudiants concluent que les points sont alignés. Ce résultat n'est pas très intéressant en lui-même, c'est le croisement avec les autres questions concernant cet item qui le sera comme on le verra un peu plus loin.

Les deux autres questions ont été examinées ensemble :

```
        POIDS           | Q1I=N           | Q1I=O           | ENSEMBLE
 % COLONNE              |                 |triangle         |
            % LIGNE     |                 |impossible       |
------------------------+-----------------+-----------------+--------------
                        |     179         |      124        |     303
Q1C=A                   |  28.23          |  50.82          |  34.51
référence à l'égalité   |         59.08   |         40.92   |       100.00
------------------------+-----------------+-----------------+--------------
                        |     455         |      120        |     575
Q1C=B                   |  71.77          |  49.18          |  65.49
Sans réf. à l'égalité   |         79.13   |         20.87   |       100.00
------------------------+-----------------+-----------------+--------------
                        |     634         |      244        |     878
       ENSEMBLE         | 100.00          | 100.00          | 100.00
                        |         72.21   |         27.79   |       100.00
------------------------------------------------------------------------------
KHI2 =   38.78 /  1 DEGRES DE LIBERTE /  0 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A
5
PROBA ( KHI2 >  38.78 ) = 0.000 / V.TEST =   6.12
------------------------------------------------------------------------------
```

Donnons quelques explications sur la lecture de ce type de tableau, produit par le logiciel SPAD, et que nous rencontrerons souvent dans ce chapitre, en explicitant la signification des nombres de la première case.

- 179 correspond à l'effectif qui a été simultanément codé A pour la question Q1C et N pour la question Q1I.
- 28,23 signifie que parmi ceux qui ont été codés N à la question Q1I, 28,23 % ont été codés A à la question Q1C : il s'agit donc de pourcentages par rapport à la colonne $Q1I = N$. Ces pourcentages sont à comparer à ceux de la colonne de marge qui indique les effectifs et pourcentages de la modalité A pour la question Q1C sur l'ensemble de la population.
- 59,08 signifie que parmi ceux qui ont été codés A à la question Q1C, 59,08 % ont été codés N à la question Q1I : il s'agit donc de pourcentages par rapport à la ligne $Q1C = A$. Ces pourcentages sont à comparer à ceux de la ligne de marge qui indique les effectifs et pourcentages de la modalité N pour la question Q1I sur l'ensemble de la population.

Le tableau présente ensuite les résultats du test du χ^2 qui permettent ici de conclure qu'il n'y a pas indépendance entre les deux variables.

Ainsi, la colonne de marge montre que seulement 35 % des PE1 font explicitement référence à l'égalité « 13 = 5 + 8 ». La formulation de la question : « Que remarquez-vous ? » n'appelle pas systématiquement de justification, et donc un éventuel recours à G2. Dans le test 2 ou la formulation est « Que pouvez-vous dire de ABC ? », les résultats sont plus accentués : 22 % seulement des PE1 font référence à cette égalité, ce qui peut se comprendre par le fait que la question porte alors explicitement sur le triangle. Ainsi, de manière spontanée, en réponse à une tâche posée dans G1, la majorité des PE1 ne cherche pas à justifier sa réponse.
La ligne de marge permet de répondre à hr 5 :
r 5 : dans l'item 1, 28 % des PE1 indique de manière explicite qu'il est impossible de tracer un triangle de longueurs « 5 – 8 – 13 ».

Le croisement de ces deux variables permet par ailleurs d'expliciter r 5. En effet :

- ceux qui font référence à l'égalité $13 = 5 + 8$ sont plus nombreux que la moyenne à conclure qu'il est impossible de tracer le triangle

- ceux qui disent qu'il est impossible de tracer le triangle sont plus nombreux que la moyenne à mettre en évidence l'égalité 13 = 5 + 8

Ainsi, cette référence à l'égalité 13 = 5 + 8 est un argument pour conclure qu'on ne peut tracer le triangle. **La conception sous-jacente du triangle mise en évidence ici pour ces PE1 est qu'un triangle doit être un « vrai » triangle, c'est-à-dire ne pas être aplati.** J'ai détaillé cette conception au chapitre précédent.

On peut certes analyser ainsi tous les couples de variables. Mais il est plus intéressant d'utiliser les analyses qui permettent de prendre en compte simultanément toutes les variables, c'est le cas de l'analyse des correspondances multiples et de l'analyse implicative.

2.1.3. Analyse des correspondances multiples sur la question 1 seule

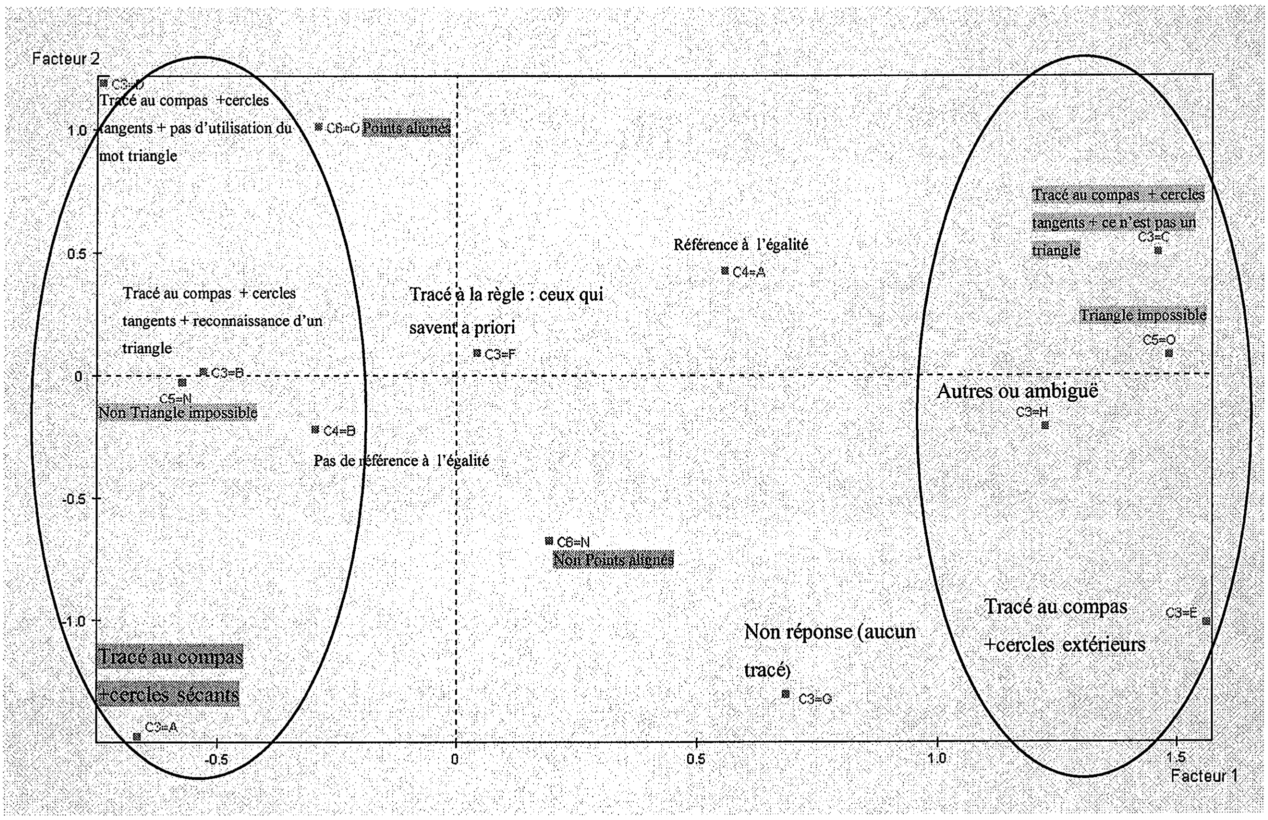
La conception précédemment mise en évidence se retrouve dans les résultats de l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM). Les pourcentages d'inertie représentés par les trois premiers axes sont respectivement de 19 %, 16 % et 12 %.

Les variables ayant une forte contribution sont :

- sur l'axe 1 : Q1IN,Q1IO et Q1PC. C'est l'axe de l'expression on non de l'impossibilité de tracer le triangle.
- sur l'axe 2 : Q1AN,Q1AO et Q1PA. C'est l'axe de la référence ou non à l'alignement des points.
- sur l'axe 3 : Q1CA,Q1CB, Q1PB, Q1PD, Q1PE et Q1PF. C'est l'axe de la référence ou non à l'égalité 13 = 5 + 8

Le lecteur trouvera à titre d'exemple le tableau des contributions en annexe 16.

La projection des points sur le plan 1 x 2 donne le graphique suivant :



L'axe 1 oppose ceux qui affirment que la tâche proposée est impossible à ceux qui n'utilisent pas ce mot, tandis que l'axe 2 oppose ceux qui signalent l'alignement des points à ceux qui n'en parlent pas. La référence à l'égalité « 8 + 5 = 13 » est plutôt du côté de ceux qui affirment que c'est impossible et que les points sont alignés, ce qui conforte l'analyse précédente.

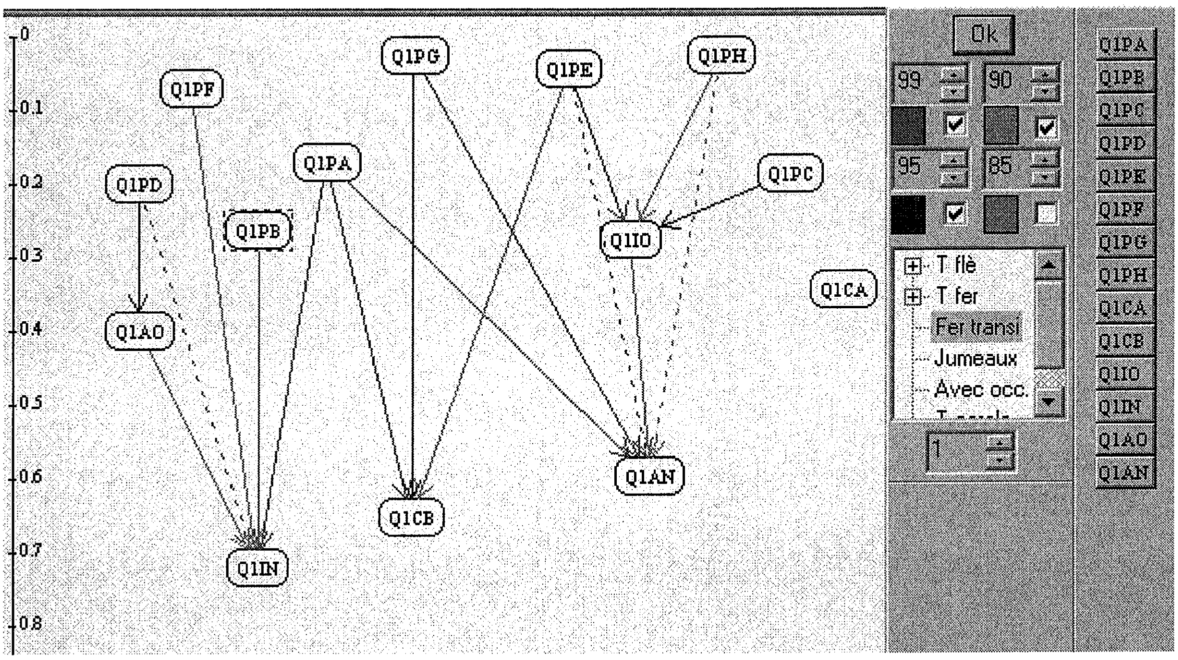
Ce graphique donne également des informations triviales : ceux qui font des cercles sécants ne disent pas que c'est impossible ni que les points sont alignés, ceux qui font des cercles extérieurs disent que c'est impossible, etc.

2.1.4. Analyse implicative par Chic

Le graphe implicatif ci-dessous est fait en ne prenant en compte que les modalités correspondant aux quatre sous-questions de l'item 1, avec l'analyse entropique, pour la loi de Poisson[113].

Les modalités qui apparaissent en haut du graphique sont celles qui ont le plus faible effectif (leur fréquence est indiquée par la graduation de l'axe vertical), les conclusions que l'on obtient sur ces modalités sont donc d'une faible portée.

[113] Au fil du temps, plusieurs versions de CHIC ont été utilisées, mais les graphes implicatifs ont toujours été effectués avec l'analyse entropique et la loi de Poisson ; les seuils par contre diffèrent selon les analyses et sont indiqués à chaque graphe



Les occurrences fréquentes sont pour les modalités d'absence de commentaire, que ce soit sur l'égalité 13 = 8 + 5, sur le fait qu'il soit impossible de tracer un triangle, ou sur le fait que les points soient alignés (ce qui explique leur forte contribution sur les axes 1, 2 et 3 de l'analyse des correspondances multiples).

Ce graphe met en évidence de nombreuses relations prévisibles, par exemple :

- Quand on trace des cercles sécants (Q1PA), des cercles extérieurs (Q1PE) ou qu'on a une réponse ambiguë (Q1PG), on ne dit pas que les points sont alignés (Q1AN) et on ne fait pas référence à égalité « 13 = 8 + 5 » (Q1CB).
- Quand on trace des cercles sécants (Q1PA), ou des cercles tangents et que l'on reconnaît un triangle (Q1PB) ou qu'on n'utilise pas le mot triangle (Q1PD), on ne dit pas qu'il est impossible de tracer un triangle (Q1IN).

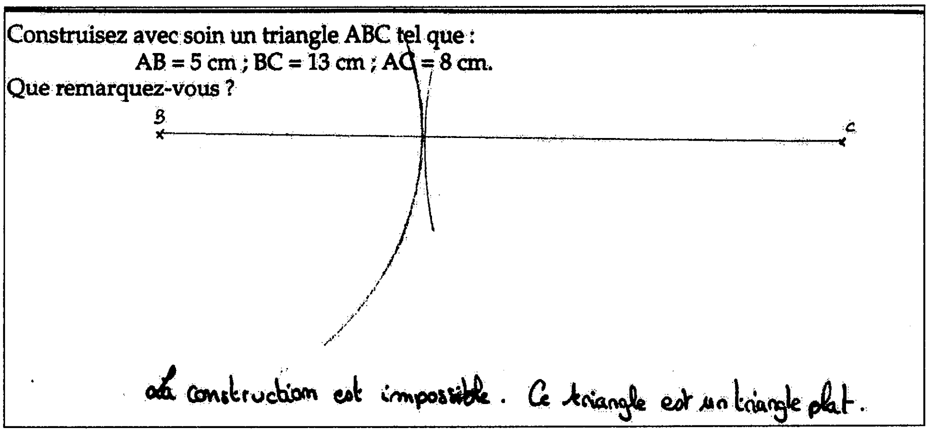
Il permet également d'éclairer des aspects moins évidents, en particulier en analysant les liaisons autour des modalités Q1IO (impossible de tracer le triangle) et Q1AO (les points sont alignés) :

- quand on trace des cercles tangents et que l'on n'utilise pas le mot triangle (Q1PD), c'est le plus souvent pour dire que les points sont alignés (Q1AO), et surtout, quand on dit que les points sont alignés, on ne conclut pas qu'il est impossible de tracer le triangle (Q1AO → Q1IN). On peut considérer ce comportement comme « expert ».
- Réciproquement, quand on dit qu'il est impossible de tracer le triangle, on ne dit pas que les points sont alignés (Q1IO → Q1AN). Autrement dit, l'étudiant utilise un commentaire sur les points alignés ou sur le fait qu'il soit impossible de tracer le

triangle, mais pas les deux.

Par contre, la modalité Q1CA (référence à l'égalité 13 = 8 + 5) n'est liée à aucune autre. Cela peut s'expliquer par le fait qu'elle peut aussi bien permettre de conclure que les points sont alignés et le triangle aplati, que permettre de conclure qu'il n'est pas possible d'obtenir le triangle demandé, selon la conception que l'étudiant a du triangle aplati et relativise les conclusions de l'ACM.

Voici pour conclure la production de Caroline qui exemplifie la conception du triangle de certains étudiants :



La construction est classique : Caroline commence par tracer le plus grand côté du triangle puis trace des arcs de cercles qui vont être tangents. L'expression « la construction est impossible » marque probablement que Caroline n'obtient pas alors ce à quoi elle s'attendait : un « vrai » triangle. Elle semble dire « vous me demandez de tracer un triangle, c'est impossible ». Sa conception du triangle exclut le triangle aplati. Sa conclusion « ce triangle est un triangle plat » précise cette conception : il y a d'un côté les « vrais » triangles, que l'on appelle triangles, et d'un autre côté les triangles aplatis, qu'elle appelle « triangles plats ». Nous retrouvons là la conception de Stella Baruk qui a déjà été analysée, qui met en place deux catégories disjointes (cf. chapitre 4, § 3.2.1, pages 178 et suivantes). Ce type de définition, par exclusion, est celle de la vie courante et relève plutôt de G1 (cf. chapitre 2, § 1.7, pages 93 et suivantes). Notons par ailleurs qu'elle n'utilise pas le terme « aplati » mais « plat », qui vient certainement de « l'angle plat » qui apparaît dans ce dessin.

2.1.5. Résultats avec le test 2

Dans la version du test 2, la question « Que remarquez-vous ? » est remplacée par « Que pouvez-vous dire de ABC ? ». Le tableau des effectifs et des pourcentages sur les procédures est le suivant :

	Cercles sécants	Tracé au compas avec cercles tangents : 65 %			Cercles extérieurs	Tracé règle			
	Q1PA	Q1PB	Q1PC	Q1PD	Q1PE	Q1PF	Q1PG	Q1PH	Total
effectif	21	28	5	24	2	14	3	1	98
pourcentage	21,4	28,6	5,1	24,5	2	14	3	1	100

Deux modalités seulement ont des fréquences très différentes : Q1PC (tracé au compas avec des cercles tangents et « ce n'est pas un triangle ») passe de 18,8 % à 5,1 % et Q4PF (tracé à la règle ceux qui savent a priori) passe de 7,3 % à 14,3 %.

Pour la première modalité, on peut faire l'hypothèse que la question « Construisez avec soin un triangle ABC … Que pouvez-vous dire de ABC ? » ne permet pas de remettre facilement en cause le fait que ABC ne soit pas un triangle. ABC est défini comme étant un triangle, et on demande ensuite de parler de ABC. Dans la version initiale du test, au contraire, on ne remet pas l'accent sur ABC dans la question. L'étudiant peut ainsi plus facilement dire que c'est impossible. C'est une question de contrat didactique.

Pour la deuxième modalité qui a des résultats très différents, on peut penser que la formulation « Que remarquez-vous ? » suggère de faire d'abord le dessin pour pouvoir remarquer quelque chose, autrement dit à travailler dans G1, tandis que la formulation « Que peut-on dire de ABC ? » peut plus facilement inviter les étudiants à conclure à partir des informations discursives de l'énoncé, autrement dit à travailler directement dans G2. Cependant, le pourcentage de ceux qui font référence à l'égalité passe de 34, 5 % dans la version initiale à 22,4 % dans le test 2, la formulation « Que peut-on dire de ABC ? » n'invite donc pas à expliciter cette référence à l'égalité.

Les autres différences sont peu significatives compte tenu du faible effectif du groupe sur lequel a été effectué le test 2.

2.2. Item 2 : xÔy est-il droit ?

2.2.1. Résultats avec le test initial

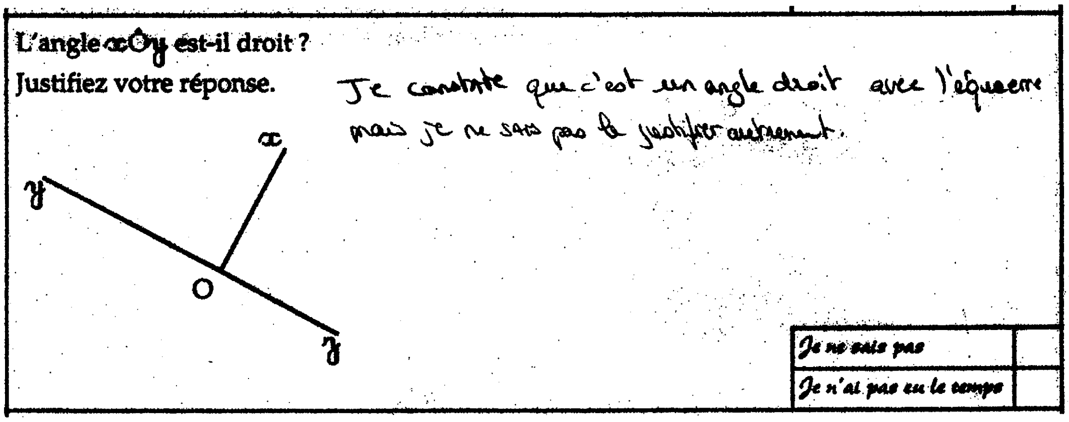
On obtient les résultats suivants :

	Q2A	Q2B	Q2C	Q2D	Q2E	Q2F	Q2G	Q2H	Total
effectif	27	158	157	181	197	132	12	14	878
pourcentage	3,08	18,00	17,88	20,62	22,44	15,03	1,37	1,59	100

Analysons cette question du point de vue de la distinction G1 – G2. Seule la première modalité est dans le cadre G2 (on ne peut pas savoir), toutes les autres sont dans G1. Ainsi, on peut affirmer, en réponse à hr 6.1 et hr 6.2 :

r 6.1 : dans la situation de l'item 2, ambiguë entre G1 et G2, seulement 3% des PE1 se placent dans G2 pour répondre.

Une interprétation de ce phénomène peut être un effet de contrat didactique : il faut produire une réponse, le cadre G2 ne le permet pas, il faut donc tout naturellement se placer dans G1. Ce n'est pas pour autant que les étudiants sont satisfaits de leur réponse. Certains d'entre eux expriment explicitement cette difficulté :



On peut penser que cet étudiant a conscience de l'existence de G2, qui se traduit par le fait qu'un résultat ne peut être constaté sur un dessin, il doit être démontré, ce qui ne peut bien sûr être fait ici par absence d'hypothèses textuelles.

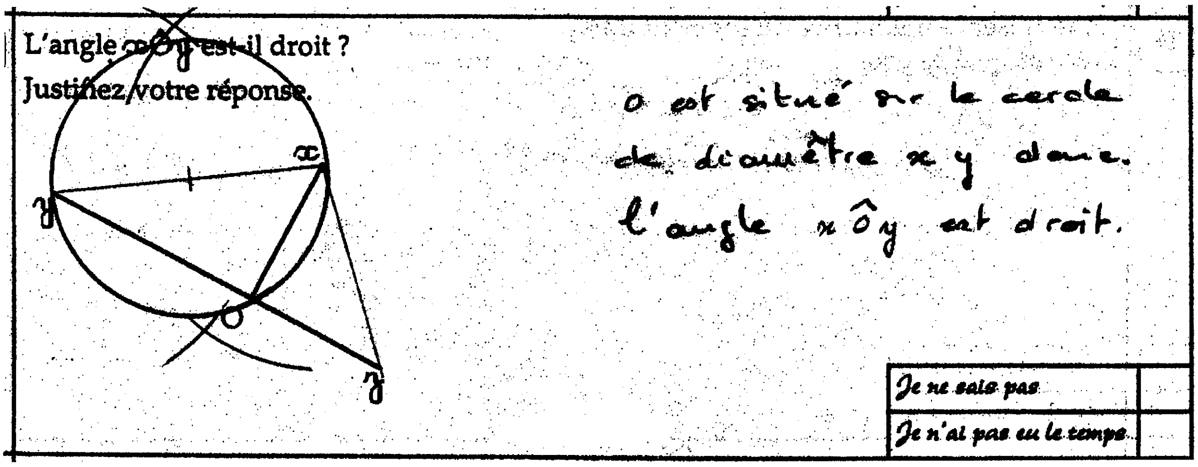
Le tableau précédent permet par ailleurs d'apporter une réponse à hr 7 et hr 8:

r 7.1 : 18% des PE1 dans la situation de l'item 2 se placent dans G1 en pensant travailler dans G2.

r 8.1 : 18% des PE1 utilisent dans la situation de l'item 2 des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.

Ce sont ceux qui effectuent une figure annexe pour conclure. Ils croient ainsi travailler dans G2. En effet, dans ce type de réponse, des théorèmes sont sous-jacents et donnent l'illusion d'avoir « vraiment fait de la géométrie », en même temps qu'ils donnent du poids à leur réponse.

Etudions par exemple la production ci-dessous.



La réponse à la question « l'angle est-il droit ? » est obtenue comme conclusion de l'application d'un théorème (un triangle inscrit dans un cercle et dont l'hypoténuse est diamètre du cercle est rectangle), donc par des validations de type hypothético-déductif relevant de G2 et non directement à partir d'une validation perceptive. La difficulté qui n'est cependant pas repérée est qu'une hypothèse de ce théorème, elle, est bien le résultat d'une propriété obtenue de manière perceptive donc relevant de G1 : « le point O est sur le cercle de diamètre [xy][114] » est obtenu par observation visuelle. Ces PE1 ne distinguent pas G1 de G2 et travaillent conjointement dans les deux paradigmes ; ou plutôt, **le pseudo-paradigme** dans lequel travaillent ces étudiants relève simultanément de G1 et de G2. Il **est ici caractérisé par le fait d'utiliser des validations de type hypothético-déductif sur des hypothèses obtenues par la perception visuelle (éventuellement instrumentée).**

[114] Le lecteur aura remarqué que les lettres x, y, z permettant de définir les demi-droites sont ici considérées par l'étudiant comme des points …

2.2.2. Résultats avec le test 2

On obtient :

	Q2A	Q2B	Q2C	Q2D	Q2E	Q2F	Q2G	Q2H	Total
effectif	7	11	27	17	18	14	2	2	98
pourcentage	7,1	11,2	27,6	17,4	18,4	14,3	2	2	100

Les trois premières modalités surtout ont des résultats sensiblement différents. Ainsi, par rapport à « Que peut-on dire de xôy ? », la formulation « xôy est-il droit ? » du test initial laisse moins de place à une réponse de type « on ne peut pas répondre ». Elle appelle plutôt une réponse de type « oui / non ». Par ailleurs, par l'utilisation d'un vocabulaire géométrique précis, elle incite les étudiants à utiliser des théorèmes, pour que la réponse soit plus « géométrique ».

En réponse à hr23, on peut donc affirmer sans surprise que :

r 23 : la formulation de la question peut influencer la réponse de l'étudiant.

2.3. Item 4 : nature du triangle ECO

2.3.1. Item 4 : nature du triangle ECO et justifications

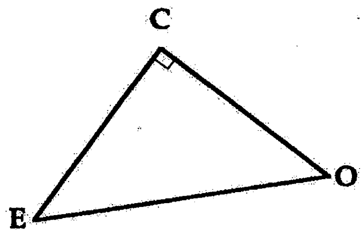
Voici les résultats des tris à plat :

	Q4NA	Q4NB	Q4NCD	Total
Effectifs	164	677	37	878
Pourcentages	18,68	77,11	4,21	100

19 % des étudiants répondent que le triangle est rectangle, sans que l'on puisse savoir s'ils ont mesuré l'angle. On peut considérer a priori que ces étudiants se placent **dans G2**, même s'il reste un doute d'effet Jourdain : ont-ils délibérément fait le choix de ne pas mesurer parce qu' « une mesure n'est pas valide pour conclure » (comportement effectivement dans G2), ou bien n'y ont-ils tout simplement pas pensé, parce qu'ils n'ont pas repéré, perceptivement, que le dessin est un triangle isocèle (comportement qui serait alors dans G1) ?

La majorité des étudiants, par contre, a reconnu ce triangle comme rectangle et isocèle. C'est donc qu'ils ont mesuré à la règle graduée ou comparé par exemple au compas les longueurs des côtés. Les deux sous-questions suivantes permettent de préciser comment ils justifient l'angle droit. Il s'avère que 32% des étudiants font explicitement référence au code sur le dessin, tandis que 8% seulement explicitent dans leur commentaire qu'ils ont fait une mesure (au rapporteur) ou une comparaison (à l'équerre). Autrement dit, les justifications explicites sont relativement rares. Par contre, de nombreux commentaires ressemblent à :

Quelle est la nature du triangle ECO ?
Comment le savez-vous ?



C'est un triangle isocèle et rectangle en C car OC = EC et $\widehat{ECO} = 90°$.

Ces productions ne permettent pas de déterminer comment ont été obtenus les deux résultats « $OC = EC$ » et « $\widehat{ECO} = 90°$ », mais permettent néanmoins de confirmer HR1 et hr 8. Elles mettent en effet sur le même plan l'angle droit et l'égalité des mesures des côtés. Les étudiants ne font pas apparaître de différence entre les deux types d'arguments :

- la mesure ou la comparaison des longueurs des côtés, qui s'effectue de manière perceptive ; il s'agit de ce que l'on **voit** sur le dessin. Cette procédure relève typiquement de G1.
- le symbole de l'angle droit sur le dessin, qui est une description de l'objet intégrée dans l'énoncé, de manière non textuelle mais symbolique ; il s'agit donc de ce que l'on **sait** de manière certaine sur l'objet. Cette propriété relève-t-elle pour autant de G2 ?

J'ai en effet montré au chapitre 1 (§ 1.4, pages 38 et suivantes), en analysant des exercices extraits des manuels Cap Maths CM1 ou CM2, que le codage, notamment de l'angle droit, pouvait aussi bien être utilisé dans G1 que dans G2. Le code de l'angle droit permet d'indiquer des propriétés de l'objet, mais ne change pas la nature de l'objet : celui-ci peut aussi bien être considéré comme un objet physique que comme un objet théorique, le dessin en étant alors un représentant. En cycle 3, on peut travailler sur un objet géométrique à partir d'un dessin ou à partir d'une description. Un dessin à main levée codé peut être considéré comme une forme particulière de description. L'élève peut alors dire d'un polygone qu'il a un angle droit en le considérant comme un objet physique parce que la présence de l'angle droit a été vérifiée à l'équerre sur un dessin, mais aussi parce que la description qui est donnée de l'objet donne cette information, que cette description soit textuelle, ou que ce soit un dessin à main levée (voire les deux). Autrement dit, l'utilisation du codage de la figure n'est pas un indice suffisant pour pouvoir affirmer que l'étudiant se situe dans G2. On peut seulement conclure qu'ils utilisent conjointement des propriétés lues sur la figure (éventuellement mesurées), et des informations données dans l'énoncé.

Selon la règle d'exhaustivité, il faut en effet essayer de répondre le plus complètement possible, en donnant toutes les informations dont on dispose sur l'objet. Un effet de contrat didactique renforce peut-être cette démarche : la réponse « triangle rectangle » est trop évidente, et il faut trouver une autre propriété de l'objet. Les deux types d'arguments (mesure d'une part et propriétés données dans l'énoncé d'autre part) sont alors exploités pour répondre à la question posée. On a ainsi 19 % des étudiants qui sont exclusivement dans le cadre G2 (ou qui n'ont pas remarqué que le triangle pouvait être isocèle), répondant seulement que le triangle est rectangle et 77 % qui sont dans G1 et peut-être dans G2, répondant que le triangle est rectangle et isocèle. En réponse à hr 8 on peut ainsi formuler :

r 8.2 : 77 % des PE1 utilisent dans la situation de l'item 4 des arguments liés à une vérification sur le dessin, relevant de G1 et d'autres issus du codage, relevant de G1 ou de G2.

2.3.2. Tableau croisé Q4N – Q4NJC

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q4JC=A Référence explicite à une mesure de l'angle	Q4JCQ=B Pas de référence explicite à une mesure de l'angle	ENSEMBLE
Q4N=rectangle	80 28.07 48.78	84 14.17 51.22	164 18.68 100.00
Q4N=rectangle et isocèle	202 70.88 29.84	475 80.10 70.16	677 77.11 100.00
Q4N=autre	3 1.05 8.11	34 5.73 91.89	37 4.21 100.00
ENSEMBLE	285 100.00 32.46	593 100.00 67.54	878 100.00 100.00

```
KHI2 =   32.06 /   2 DEGRES DE LIBERTE /   0 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA ( KHI2 >   32.06 ) = 0.000 / V.TEST =    5.18
```

Ce tableau met en évidence le lien entre « reconnaître le triangle comme seulement rectangle » et « justifier explicitement par le code sur le dessin » (Q4JCA), lien que l'on retrouve lorsqu'on fait une analyse implicative. En effet, ceux qui justifient explicitement par le code sont plus nombreux que la moyenne à déclarer le triangle seulement rectangle, et ceux qui déclarent le triangle rectangle sont plus nombreux que la moyenne à expliciter le code sur le dessin.

Mais ce lien ne permet pas de lever le doute exprimé précédemment et de déterminer s'il s'agit d'un comportement expert relevant de G2 ou d'un comportement non expert d'étudiants pour qui « triangle isocèle » n'est pas une connaissance disponible (ils ne se souviennent pas du mot, n'y ont pas pensé ou ne l'ont pas vu).

2.3.3. Tableau croisé Q4JC – Q4JM

Le croisement de ces deux variables doit permettre d'étudier le lien entre le fait de justifier l'angle droit par le codage, et le fait de le justifier par une mesure ou une comparaison explicite aux instruments. Le tableau croisé est le suivant :

POIDS / % COLONNE / % LIGNE		Q4JMA Référence explicite au code sur le dessin	Q4JMB Pas de référence explicite au code sur le dessin	ENSEMBLE
Q4JCA	Référence explicite à une mesure de l'angle	22 31.88 7.72	263 32.51 92.28	285 32.46 100.00
Q4JCB	Pas de référence explicite à une mesure de l'angle	47 68.12 7.93	546 67.49 92.07	593 67.54 100.00
ENSEMBLE		69 100.00 7.86	809 100.00 92.14	878 100.00 100.00

```
KHI2 =    0.00 /   1 DEGRES DE LIBERTE /   0 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA ( KHI2 >    0.00 ) = 0.978 / V.TEST =  -2.02
```

Le test du khi2 permet d'affirmer qu'il y a indépendance entre le fait de faire référence au code sur le dessin et celui d'effectuer une mesure de l'angle. Or, effectuer une mesure de l'angle est une procédure qui relève typiquement de G1 (d'autant plus qu'elle « néantise » le code de l'angle droit). Si la référence au codage était systématiquement le signe d'une procédure experte relevant plutôt de G2, on peut supposer qu'il n'y aurait pas indépendance entre ces deux variables : ceux qui font référence au codage effectueraient moins souvent que la moyenne une mesure de l'angle et/ou ceux qui effectuent une mesure de l'angle feraient moins souvent que la moyenne référence au codage. Ceci renforce donc l'hypothèse précédemment exprimée selon laquelle la référence au codage peut aussi bien être une procédure relevant de G2 que de G1.

Remarque : que le khi2 soit faible est une chose, qu'il soit nul en est une autre ! J'ai éprouvé le besoin de vérifier les calculs. Le tableau de tri croisé sous l'hypothèse d'indépendance donne les effectifs fictifs suivants :

	Q4JMA	*Q4JMB*
Q4JCA	*22,397*	*262,603*
Q4JCB	*46,603*	*546,397*

dont on constate qu'ils sont particulièrement proches des effectifs réels. C'est un vrai cas d'école de variables indépendantes !

Les résultats du test 2 sont quasiment identiques. « Comment le savez-vous ? » ou « Justifiez » amènent ici aux mêmes réponses et commentaires.

2.4. Item 7 : nature du quadrilatère ABCD

2.4.1. Item 7 : nature du quadrilatère ABCD et justifications dans le test 1

On obtient les résultats suivants dans le test initial :

	Oui et non	oui			non		autre	
	Q7RJA	Q7RJB	Q7RJC	Q7RJD	Q7RJE	Q7RJF	Q7RJG	Total
Effectifs	35	361	81	7	278	97	19	878
Pourcentages	4	41,1	9,23	0,8	31,7	11	2,2	100

La modalité dont l'effectif est le plus faible est ici intéressante : moins de 1 % des étudiants répondent que le quadrilatère est carré sans donner d'explication (Q7RJD). Il leur est demandé de justifier leur réponse, ils le font effectivement.

4% des étudiants explicitent plus ou moins clairement que tout dépend du point de vue (G1 ou G2) : *« Je suis bien embarrassée pour vous répondre. D'après les signes portés sur la figure (3 angles droits et 2 côtés consécutifs), ABCD est un carré. D'après mes yeux, non. »*, lit-on sur une copie. Ce type de réponse est caractéristique d'étudiants qui sont a priori susceptibles de se positionner, soit dans G1, soit dans G2, et qui prennent conscience d'une incompatibilité, et donc d'une différence, entre les deux paradigmes. Dans cette situation, il y a en effet conflit entre le su (G2) et le perçu[115] (G1). Remarquons que cette fois, l'utilisation du codage du dessin suppose que l'étudiant se situe dans G2. En effet, les angles ne sont perceptivement pas droits, les longueurs perceptivement différentes. Accepter les informations données par le codage signifie que l'étudiant considère effectivement le dessin comme un représentant d'un objet théorique et non comme un objet physique, et donc qu'il se situe dans G2. Les deux paradigmes amènent des conclusions différentes et sont donc source de conflit pour l'étudiant, ce qui l'oblige en général à choisir, contrairement à la question précédente, ou l'absence de conflit n'invitait pas à choisir mais au contraire à faire cohabiter les deux types d'arguments, ceux issus du « perçu » et ceux issus du « su ». De ce fait, ils sont ici peu nombreux à conserver les deux paradigmes dans leur réponse à cette question ; la plupart font un choix et fonctionnent uniquement dans G1 ou dans G2, de manière exclusive. Ainsi, **43 %** donnent une réponse **dans G1** : *« ce n'est pas un carré »,* **51 %** répondent **dans G2** : *« c'est un carré »*, même si la rigueur mathématique de leur justification dans ce cas laisse parfois à désirer... Autrement dit, 94% des étudiants résolvent, d'une façon ou d'une autre, la contradiction. On peut ainsi, en réponse à hr 6.1 et hr 6.2, formuler :

r 6.2 : dans la situation de l'item 7, ambiguë entre G1 et G2, 43 % des étudiants se placent dans G1, 51 % dans G2 pour répondre.

J'ai ici considéré, du point de vue G1 / G2, que la modalité A (oui et non) relève simultanément de G1 et de G2, tandis que les modalités B, C et D (réponses oui) relèvent de G2, et que les modalités E et F relèvent de G1. Cependant, j'ai expliqué au chapitre 3 comment la règle d'exhaustivité brouillait en fait cette interprétation. Pour tenter de lever cette difficulté, le deuxième codage change complètement de point de vue et fait explicitement référence à G1 et G2 (cf. chapitre 3). Il aurait dû être un codage en disjonctif complet. Mais les difficultés d'interprétation de certaines copies m'ont amené à cumuler les codes. On obtient les résultats suivants :

[115] Sur le conflit su/perçu, on pourra consulter [PARZYSZ, 1989]

	Oui et non	Oui : 51 %			Non : 43 %		autre	
	Q7RJA	Q7RJB	Q7RJC	Q7RJD	Q7RJE	Q7RJF	Q7RJG	Total
Effectifs	35	361	81	7	278	97	19	878
Pourcentages	4	41,1	9,23	0,8	31,7	11	2,2	100

	Q7G12	Q7G2	Q7G1	Q7GE	Q7GS	Total
Effectifs	45	432	212	177	12	878
Pourcentages	5,1	49,2	24,15	20	1,3	100

Les flèches d'un tableau vers l'autre indiquent des liens forts entre les modalités mais celles-ci ne se correspondent pas exactement. Par exemple, quelques-uns ont fait des commentaires qui relèvent de G1 et de G2 (ils sont donc dans Q7G12), mais ont opté pour une réponse oui ou une réponse non qui fait qu'on ne les retrouve pas dans Q7RJA. De même, Q7RJG correspond à « autre commentaire ou sans commentaire », tandis que Q7GS correspond à « sans commentaire ». Les faibles écarts entre les deux tableaux permettent néanmoins de conclure que l'interprétation précédente du point de vue des paradigmes G1 / G2 à partir du codage initial (Réponse et justifications) ou à partir du codage direct en G1 / G2 donne des résultats identiques. On peut en outre avec ce nouveau codage découper le groupe des « non » en deux groupes intéressants : ceux qui utilisent des arguments uniquement dans G1 d'une part (24%) et ceux dont on a fait l'hypothèse qu'ils utilisent la règle d'exhaustivité (20%) d'autre part. On peut ainsi formuler, en réponse à hr 9 :

r 9 : dans la situation de l'item 7, 20 % des étudiants semblent utiliser la règle d'exhaustivité.

Par ailleurs, 30% des étudiants ont fait une remarque sur le peu de précision du tracé. Le tableau croisé Q7RJ × Q7P, disponible en annexe 17, permet de faire quelques constations triviales : quand on dit « oui et non » (Q7RJA), on fait une remarque sur le tracé, de même que lorsqu'on dit « non » avec d'autres arguments que ceux liés à des propriétés du carré. Quand on dit « oui , c'est un carré », quelle qu'en soit la justification, on fait abstraction de la précision du tracé et on se situe donc clairement dans G2.

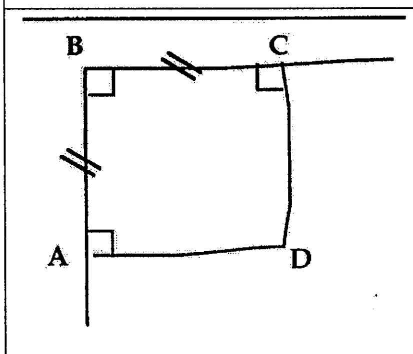
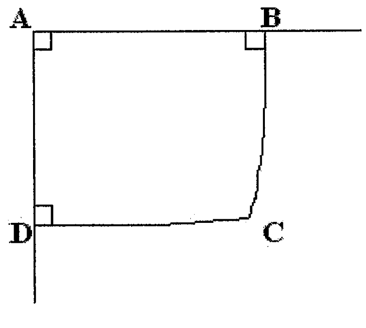
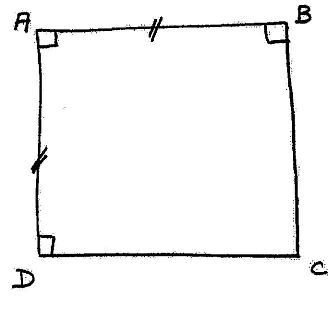
2.4.2. Nature du quadrilatère ABCD et justifications dans les tests 2 et 3

Analysons les résultats des tests 2 et 3 (cf. chapitre 4, § 4.3, pages 205 et suivantes pour la description de l'item dans les tests 2 et 3, cf. annexe 13 : « Tableau récapitulatif des trois versions du test » pour une vision synthétique des trois versions). Beaucoup de cas différents sont envisagés dans le codage pour les tests 2 et 3, mais les faibles effectifs de la population totale (98 étudiants pour le test 2, 75 pour le test 3) obligent à des regroupements afin d'obtenir des résultats significatifs.

		Test 1		**Test 2**		**Test 3**	
Modalité		Effectif	%	Effectif	%	Effectif	%
N	Non carré (ou non 4 angles droits)	375	**42,71**	54	55,10	3	**4,00**
O	Carré (ou 4 angles droits)	449	**51,14**	41	41,84	69	**92,00**
ON	Carré et non carré (ou…)	35	**3,99**	3	3,06	2	**2,67**
NR	Autres réponses ou non réponses	19	2,16			1	1,33
total		878		98		75	

Le taux de réponses « oui et non » reste stable et faible : il est en effet difficile de conserver une réponse de ce type du point de vue du contrat didactique. Par contre, si le taux de réponses oui d'une part, non d'autre part, reste proche dans les tests 1 et 2, ils sont significativement différents dans le test 3.

Rappelons les dessins proposés dans chacun des tests :

Test 1	Test 2	Test 3
		

Dans les tests 1 et 2, une partie du dessin est « précise », c'est-à-dire manifestement tracée à la règle (même si celle-ci est virtuelle et issue d'un logiciel de dessin sur ordinateur) tandis que l'autre ne l'est pas. **Le contraste entre les deux parties du dessin met en évidence la partie imprécise ; l'accent mis sur l'imprécision du tracé d'une partie du dessin invite alors les étudiants à se placer dans G1 pour répondre**. Par ailleurs, la situation est plus simple dans le test 2, ce qui rend l'utilisation de la règle d'exhaustivité moins fréquente.

Dans le test 3, la formulation a été modifiée par rapport au test 1, le dessin possède le même codage mais il est entièrement effectué à main levée. 92 % concluent alors que ABCD est un carré (71 % avec une justification exacte, 21 % avec une justification erronée). Cela permet d'en déduire que

- **ce n'est probablement[116] pas le manque de connaissances qui empêche les étudiants de reconnaître un carré dans le test 1**, mais bien la nature « bâtarde[117] » du dessin, avec pour une partie des tracés « précis » et pour une autre des tracés qui ne le sont pas. En effet, les hypothèses sont identiques dans les items 1 et 3 ; la démonstration et les connaissances nécessaires sont donc également les mêmes. Ce n'est donc pas le manque de connaissances qui justifie les réponses « ce n'est pas un carré » dans le test 1 puisque ces mêmes connaissances permettent à 92 % des étudiants de conclure que c'est un carré dans le test 3.
- **un dessin à main levée invite les étudiants à travailler dans G2.** Le dessin à main levée, nécessairement et volontairement imprécis, empêche les étudiants de décider de la nature du quadrilatère à partir d'un repérage visuel (démarche relevant de G1). Ils doivent alors analyser les informations codées sur le dessin ou données par le texte et utiliser leurs connaissances sur les quadrilatères pour conclure. Même si on ne peut affirmer que l'objet sur lequel travaille l'étudiant est alors un objet théorique, on peut au moins affirmer que le dessin est considéré comme le représentant d'un autre objet, lui-même physique ou théorique, et non pas directement l'objet géométrique de travail. Par ailleurs, les validations utilisées sont de type hypothético-déductif. Cette démarche relève donc plutôt de G2.

En réponse à hr 22, on peut affirmer :

r 22.1 : un dessin à main levée invite les étudiants à travailler dans G2.

[116] je prends des précautions pour ce type d'affirmations, car il ne faut pas oublier d'une part que les populations sont différentes, et que d'autre part les effectifs pour le test 3 sont faibles.
[117] au sens de *« qui n'est pas d'une espèce bien déterminée »* [Académie française. huitième édition]

Et, en complément, même si cela ne correspond pas directement à al formulation de hr 22 :

r 22.2 : la nature « bâtarde » d'un dessin incite certains étudiants à travailler dans G1

Par contre, une hypothèse est ici infirmée (hr11) car on peut dire :

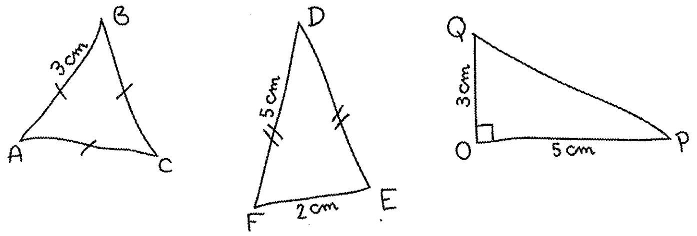
r 11 : la majorité des PE1 maîtrisent les symboles de codage d'un angle droit et de deux côtés isométriques.

Cette nature des dessins pourra être utilisée en formation de deux manières différentes. En cycle 3 et au collège, l'utilisation de dessins à main levée pourra favoriser une mise en œuvre progressive de traitements dans G2. Dans l'exemple suivant en sixième, il s'agit par exemple d'apprendre à décoder le dessin [Transmath 6^{e}. 2000, page 158] :

1 Voici des triangles dessinés à main levée.
a. L'un d'eux est dit triangle rectangle. Lequel ?
b. Un autre est dit triangle isocèle. Lequel ?
c. Comment nomme-t-on le troisième triangle ?

Le sens des mots

- **Isocèle** provient du grec *isos skelos* qui signifie : jambes égales.
- **Équilatéral** provient du latin *aequilateralis* qui signifie : côtés égaux.

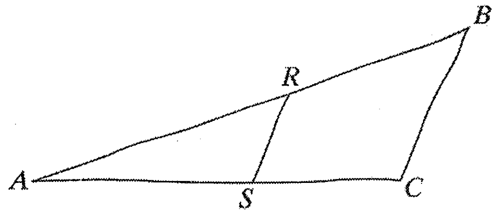


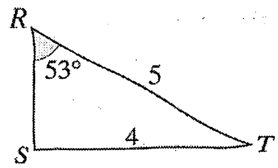
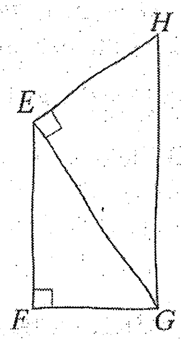
[118]

L'élève est au minimum amené à considérer le dessin proposé comme le représentant d'un autre objet géométrique, première étape d'un fonctionnement dans G2. En troisième, il s'agit de raisonner à partir du dessin à main levée, et donc d'une part de ne pas considérer le dessin proposé comme l'objet direct de travail, et d'autre part de mettre en œuvre des validations de type hypothético-déductif, deux éléments essentiels du paradigme G2. L'élève peut être amené à reproduire un dessin à main levée sur sa feuille, mais surtout pas, bien sûr, un dessin aux instruments. Tout ou partie des informations concernant une figure peut être donné sur le dessin à main levée. Par exemple :

---

[118] On notera que l'énoncé présente un inconvénient majeur : il laisse supposer qu'il n'y a qu'un triangle isocèle. Le triangle équilatéral n'est donc pas considéré comme isocèle, ce qui revient à considérer des définitions non inclusives, et donc des définitions des objets relevant de G1 (cf. chapitre 2, § 1.7, page 93)

<table>
<tr>
<td>Seules les positions relatives des points sont données sur le dessin à main levée, toutes les informations numériques sont données dans le texte.
[5 sur 5. 1999. 3ème, page 152]</td>
<td>19 Dans chaque cas, refaire le dessin à main levée ci-dessous en indiquant les longueurs proposées. Préciser ensuite si les droites (RS) et (BC) sont parallèles. Justifier.


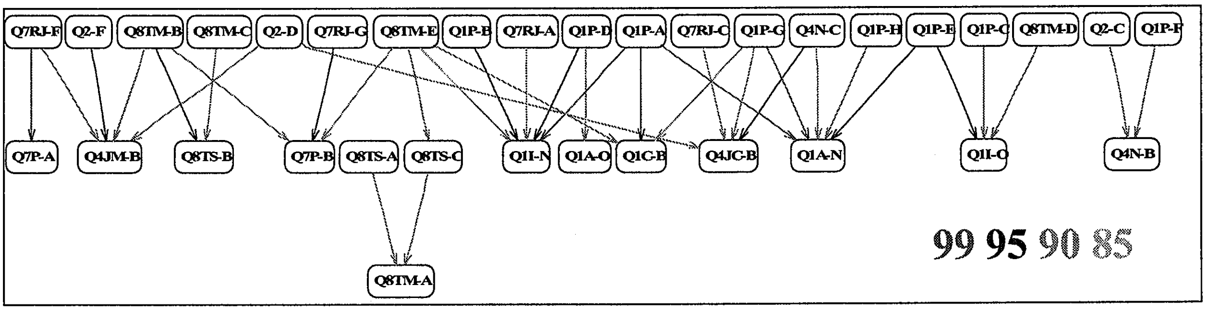
a) $AR = 3$; $AS = 9$; $AC = 15$; $AB = 5$.
b) $AR = 5$; $BR = 3$; $AS = 30$; $SC = 50$.
c) $AR = 7$; $AB = 11$; $AS = 10{,}5$; $SC = 6$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Une seule information est donnée dans le texte : RST est un triangle.
[5 sur 5. 1999. 3ème, page 172]</td>
<td>45 Nature ?
1° Le triangle RST semble rectangle, mais qu'en est-il exactement ?

</td>
</tr>
<tr>
<td>Une partie des informations est donnée sur le dessin à main levée (positions relatives des points, angles droits), le reste (mesures des angles et des longueurs) est dans le texte.
[5 sur 5. 1999. 3ème, page 173]</td>
<td>49 Soit la figure à main levée ci-contre.
1° Calculer les mesures des angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EGH}$, sachant que :
$EF = 5$, $EG = 6$ et $EH = 4$.
2° Calculer $\widehat{EGF}$, EG, HG et EH sachant que :
$EF = 4$, $FG = 6$ et $\widehat{EHG} = 50°$.

</td>
</tr>
</table>

Remarquons que ces dessins à main levée sont relativement peu exploités dans les manuels de collège. Par exemple, sur quatre manuels de classe de troisième consultés, deux ne proposent aucun dessin à main levée : [Décimale. 3ème.1999], [Triangle. 3ème.1999] ; un manuel propose un seul dessin à main levée : [Transmath. 3ème.1999, page 216], un dernier enfin, [5 sur . 1999. 3ème], en propose assez fréquemment : 7 dans le chapitre « Le théorème de Thalès et sa réciproque », 16 dans le chapitre « Triangle rectangle et trigonométrie » et 4 dans le chapitre « Sections, Agrandissement-réduction » .

En formation de professeurs des écoles, le dessin « bâtard » du quadrilatère du test 1 par exemple peut être le support d'un débat riche dans la classe afin de faire expliciter les paradigmes sous-jacents à chacun des types de réponses. Les résultats précédents montrent en effet que l'on peut s'attendre à ce que, en proposant la formulation du test 1, environ la moitié pense qu'il s'agit d'un carré, tandis que l'autre moitié pensera le contraire, ce qui doit permettre de mettre en place un débat qui permettra à chaque étudiant de prendre conscience des différences de nature des arguments utilisés, puis à l'enseignant d'expliciter les paradigmes G1 et G2. Cette situation sera exploitée dans le cadre de l'expérimentation en environnement papier-crayon. J'analyserai au chapitre 7, paragraphe 1.4 (cf. pages 374 et suivantes) les commentaires des étudiants et le débat qui s'instaure alors.

2.5. Croisement des items 1 2 4 7

Chacun des items ayant été analysé séparément, il est intéressant d'étudier les liens entre les modalités des divers items. L'objectif est de faire émerger des profils d'étudiants, à partir de leurs réponses à ces items. On aimerait voir apparaître des groupes d'étudiants qui se situent toujours dans G1, ou toujours dans G2 notamment. Une analyse implicative est ainsi effectuée sur l'ensemble des modalités concernant ces items. Deux variables sont rajoutées, concernant la nature du tracé de la médiatrice (Q8TM) et le tracé du segment [MN] (Q8TS) dans la question 8 (tracé de médiatrice dans la configuration du quadrilatère concave UMEN). Cette question 8 sera analysée en détail plus loin, mais ces deux variables peuvent être analysées du point de vue des paradigmes G1/G2, d'où leur présence dans cette analyse.



Le graphe implicatif obtenu, ci-dessus, est très plat. Cela signifie qu'il n'y a pas de longs chemins d'implications, mais à chaque fois, une seule implication : une modalité en entraîne éventuellement une autre, mais le chemin s'arrête. En réponse à h19, on peut alors affirmer :

r19 : **Il n'est pas possible de mettre en évidence des profils d'étudiants, répondant de manière semblable à la série d'items 1, 2, 4 et 7.**

Par ailleurs, aucun groupe ne se détache, ce qui empêche de faire des sous-groupes dans la population. Enfin, de nombreuses implications concernent naturellement des modalités correspondant à un même item.

On peut cependant repérer quelques liens entre des modalités associées à des items différents :

Q7RJF : ABCD pas carré sans référence aux propriétés du carré **Q2F** $x\widehat{O}y$ est droit ou non droit mais sans explication **Q8TM-C** la médiatrice est considérée comme une demi-droite **Q2D** $x\widehat{O}y$ est droit ou non droit « parce qu'il fait 90 ° »	→	**Q4JMB** Pas de référence à une mesure explicite de l'angle
Q8TM-B la médiatrice est considérée comme un segment **Q7RJG** « autres réponses » **Q8TM-E** médiatrice non tracée	→	**Q7PB** Pas de remarque sur le peu de précision du tracé
Q8TM-E médiatrice non tracée **Q7RJA** ABCD est un carré : oui et non	→	**Q1IN** Il n'est pas précisé qu'il est impossible de tracer le triangle
Q2D figure annexe **Q7RJC** ABCD est un carré et justification fausse **Q1PG** « autres »	→	**Q4JCB** Pas de référence explicite au code sur le dessin
Q2C utilisation des instruments, précision 90° **Q1PF** tracé à la règle : ceux qui savent a priori	→	**Q4NB** ECO est rectangle et isocèle
Q8TM-E médiatrice non tracée	→	**Q1CB** pas de référence à l'égalité : $13 = 8 + 5$
Q4NC « autre »	→	**Q1A** il n'est pas précisé que les points sont alignés
Q8TM-D interprétation ambiguë	→	**Q1IO** Il est impossible de tracer le triangle

La plupart des implications concernent des modalités de type « autre », « ambiguë », ou des modalités qui indiquent que l'étudiant ne précise pas telle ou telle chose, ou encore des modalités très fréquentes. Quasiment aucune information ne peut en être extraite, si ce n'est que les réponses des étudiants aux différents items sont dans une large mesure indépendantes. Ces items ont été regroupés parce qu'ils mettaient en évidence un comportement relevant plutôt de G1 ou de G2, mais cet élément n'est manifestement pas stable chez les étudiants. Concrètement, ce ne sont pas les mêmes étudiants qui vont donner une même réponse à chaque item. Il est ainsi difficile de faire émerger des profils d'étudiants à partir de leurs réponses aux items ici étudiés, comme l'ai exprimé dans r19.

Une analyse en composantes multiples permet de confirmer ce résultat. Effectué sur le tableau croisant les 878 étudiants avec toutes les sous-questions des items 1, 2, 4 et 7, on obtient le tableau de valeurs propres ci-dessous :

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Valeur propre	0,23	0,18	0,17	0,17	0,15	0,13	0,12
% variance	7,33	5,93	5,67	5,43	4,88	4,37	4,04
% cumulé	7,33	13,27	18,94	24,37	29,25	33,62	37,66

Ainsi, le premier axe factoriel ne représente que 7 % de l'inertie totale du nuage de points représentant les données, il est donc porteur de peu d'informations. Ceci met en évidence le faible lien entre les différentes variables.

L'objectif de faire émerger des profils d'étudiants à partir de leurs réponses à ces items n'est pas atteint. Une interprétation est que les étudiants ne se situent pas toujours dans le paradigme G1 ou toujours dans le paradigme G2, mais dans un pseudo-paradigme qui relève simultanément de G1 et de G2 et dans lequel les arguments ne sont pas tous d'ordre géométrique, tels :

- le contrat didactique : il faut donner une réponse, non triviale de préférence,
- la règle d'exhaustivité : il faut donner le maximum de l'information dont on dispose

2.6. Item « Carré et Thalès »[119]

Cet item apparaît seulement dans les tests 2 et 3, toujours en dernier item. On obtient les résultats suivants, en cumulant les deux tests, dont les résultats sont proches :

[119] J'utilise les numéros d'items essentiellement dans le test 1. Pour les autres tests, je préfère donner un nom aux items pour éviter les confusions. Cet item est le numéro 8 dans le test 2 et le numéro 7 dans le test 3.

Modalité		Effectif	%
A	parallèles +cite Thalès + ne démontre pas	40	**23**
B	parallèles + Thalès + calculs approchés	22	**13**
C	parallèles + cite Thalès + mesure des longueurs ou des angles, explicite ou non	24	**14**
F	parallèles – Thalès+ mesure	31	**18**
G	parallèles – Thalès + ça se voit ou rien du tout	18	**10**
NP	Non parallèle (H, I, M)	27	**16**
Aut	(J K L N) autre commentaire ou pas de commentaire	11	**6**
	Total (test 2 : 98 + test 3 : 75)	173	**100**

50 %

28 %

78 %

Tout d'abord, seulement 16 % des étudiants ne considèrent pas les droites comme parallèles. Ils effectuent une démonstration globalement correcte (même s'il y a des imperfections dans la rédaction), en utilisant le théorème de Pythagore puis la contraposée du théorème de Thalès. Un seul d'entre eux aboutit à cette conclusion avec une démonstration erronée. Ainsi on peut affirmer :

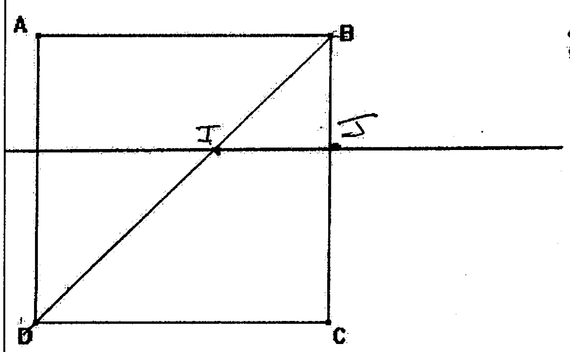
r 6.3 : 16 % d'étudiants se situent dans G2 à l'item « Carré et Thalès ».

78 % des étudiants répondent que les droites sont parallèles, ce qui signifie, qu'à un moment où à un autre de leur travail, leur procédure relève de G1, même si une autre partie relève de G2.

En particulier, 28 % des étudiants restent totalement dans G1, en prenant des mesures d'une manière ou d'une autre pour contrôler le parallélisme, dont une partie (10 % du total) acceptent que « ça se voit ». Autrement dit, c'est la perception visuelle, instrumentée ou non, qui leur permet de conclure. Cette démarche relève donc bien uniquement de G1. On ne peut cependant totalement exclure que certains, ne disposant pas de suffisamment de temps pour résoudre l'exercice dans G2, ont mis en œuvre une procédure relevant de G1, procédure évidemment plus rapide que la procédure experte dans G2. Ainsi :

r 6.4 : 28 % d'étudiants se situent dans G1 à l'item « Carré et Thalès ».

50 % des étudiants citent le théorème de Thalès, dont la moitié ne démontre rien. Ces derniers étudiants ont reconnu une « situation de Thalès ». Ils ont intégré une règle du contrat didactique de G2 : « il faut démontrer » et cherchent à se situer dans G2.



Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.

Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?

J'utilise Pythagore puis Thalès.

Néanmoins, ils ne disposent pas de toutes les connaissances et compétences nécessaires pour effectuer une démonstration correcte dans G2. Ceux qui ne démontrent pas, comme c'est le cas sur la production ci-dessus, peuvent

- soit ne pas disposer effectivement d'une maîtrise suffisante des théorèmes de Pythagore et Thalès pour les appliquer et aboutir, ce qui correspond à notre hypothèse hr11.
- soit ne pas disposer du temps nécessaire pour le faire. En effet, cet exercice est toujours proposé en fin de test, et il n'est pas impossible que certains n'aient pas pu terminer dans le temps imparti (une demi-heure). Ils peuvent dans ces conditions avoir rapidement indiqué la méthode à utiliser, pour montrer qu'ils savaient faire, mais sans avoir le temps de la mettre en œuvre.

Mais il est certain qu'il n'y a pas la moitié des étudiants qui n'a pas eu le temps de terminer. On peut donc affirmer, en réponse à hr10 :

r 10 : l'item « carré et Thalès » montre qu'une partie non négligeable des PE1 manque de connaissances et de compétences en géométrie plane

14 % prennent des mesures sur le dessin pour pouvoir conclure avec la réciproque du théorème de Thalès. Ces étudiants sont dans une situation non conforme au fonctionnement de G2 : ils prennent des mesures sur le dessin (G1), puis ils appliquent les théorèmes de G2 pour conclure. Nous retrouvons ici une caractéristique du pseudo-paradigme dans lequel se situent souvent les étudiants (application de théorèmes sur des mesures obtenues

perceptivement sur le dessin), énoncée précédemment (cf. ci-dessus, § 2.2.1, pages 230 et suivantes). Cette situation nous permet d'affirmer, en réponse à hr 8 :

r 8.3 : Dans la situation de l'item « carré et Thalès », 14 % des PE1 utilisent des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2

Rien n'indique en général dans leur production que ces étudiants aient conscience de la nature des hypothèses qu'ils utilisent (dans G1 puisque lues sur le dessin), ils pensent probablement effectuer une démonstration correcte puisqu'ils appliquent les théorèmes de la géométrie plane, en l'occurrence le théorème de Thalès. Cette remarque permet de conclure, en réponse à hr7 :

r 7.2 : Dans la situation de l'item « carré et Thalès », 14 % des PE1 utilisent se situent en partie dans G1 en pensant se situer dans G2.

Enfin, 13 % appliquent « correctement » le théorème de Pythagore et la réciproque du théorème de Thalès (même s'ils font référence au théorème et non à sa réciproque) ; ils effectuent les calculs, mais considèrent ensuite que $\sqrt{2}$ vaut exactement 1,4, ou que « *c'est presque 1,4* ». Dans les deux cas, ils concluent que les droites sont parallèles. Pour d'autres, le calcul n'est pas effectué sur $\sqrt{2}$ mais sur $5\sqrt{2}$, mais les conclusions sont identiques : ils considèrent alors que $5\sqrt{2} = 7$ ou que $5\sqrt{2} \simeq 7$ et concluent de même que les droites sont parallèles. Dans tous les cas, ils ont utilisé leur calculatrice pour obtenir une valeur (il est peu probable qu'ils connaissent une valeur approchée de $\sqrt{2}$). Ils ont donc effectué une approximation, la calculatrice proposant des décimales dont ils n'ont volontairement pas tenu compte. Plusieurs interprétations sont possibles :

- Ceci signifie que pour eux, des longueurs de $\sqrt{2}$ cm et de 1,4 cm (voire de $5\sqrt{2}$ cm et de 7 cm) sont identiques, ou encore qu'une précision supérieure au dixième de millimètre n'a pas de sens. En effet, du point de vue pratique, dans G1, pour des tracés effectués dans des conditions habituelles aux instruments, une telle précision est non seulement suffisante, mais aussi maximale : il est difficile d'obtenir une précision supérieure au demi-millimètre avec les instruments standards de l'écolier ! Ceci montre qu'**ils se situent alors dans G1,** où la problématique est celle de la précision. Pour la majorité de ces étudiants, on peut considérer que c'est parce qu'ils se situent spontanément dans G1 qu'ils effectuent sans hésiter une approximation.

- On ne peut cependant pas écarter l'hypothèse que pour certains, l'incapacité technique dans laquelle ils sont de manipuler des racines carrées, les amène à les remplacer par des valeurs approchées, et les fait ainsi se situer dans G1.
- Mais au-delà de ce simple argument technique, il y a pour certains une méconnaissance plus fondamentale de la nature des nombres qui leur fait remplacer $\sqrt{2}$ par 1,4. Pour ces étudiants, $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre, cette écriture n'est pas porteuse de sens, et il leur est donc naturel de la remplacer par une autre qui le soit plus. La seule disponible est l'écriture décimale, qui pour eux est par ailleurs la seule susceptible de représenter une mesure, de longueur dans le cas présent. De la même manière, à la question « Le géant parcourt 7 mètres en 4 pas, quelle est la longueur d'un pas ? », nombreux sont ceux qui répondent 1,75 m plus volontiers que $\frac{7}{4}$, mais qui répondent également 2,33 m si le géant parcourt 7 mètres en 3 pas, d'une part parce que ce sens des fractions ($\frac{7}{3}$ signifie 7 divisé en 3) leur est peu familier ($\frac{7}{3}$ représente plus volontiers pour eux 7 fois $\frac{1}{3}$) mais aussi parce qu'une fraction *« ne dit pas la longueur que ça fait, le calcul n'est pas terminé ! »*[120]. Un autre exemple peut être cité : l' « égalité » $\pi = 3{,}14$ est fréquemment utilisée par les PE1 et la nécessité d'écrire à la place $\pi \simeq 3{,}14$ leur apparaît souvent comme une rigueur de mathématicien pointilleux sans intérêt. Seule l'écriture décimale est pour eux porteuse de sens. Les notions de valeur exacte et valeur approchée ne sont pas maîtrisées, ni celles de nombre décimal et de nombre irrationnel. Leur méconnaissance des nombres ne leur permet ainsi pas de faire la différence entre $\sqrt{2}$ et 1,4 [121].

En fait, les ensembles de nombres qui interviennent dans chacun des paradigmes G1 et G2 ne sont pas les mêmes. G1 est lié à la problématique de la précision, les validations sont le plus souvent issues de mesures effectives. L'ensemble des nombres utiles dans G1 est donc l'ensemble des nombres décimaux. Une unité étant fixée, il suffit d'augmenter le nombres de chiffres dans la partie décimale pour augmenter la précision. Au contraire, les nombres irrationnels, tels que $\sqrt{2}$, ont été introduits justement pour donner des valeurs exactes, issues

---

[120] Remarque d'un de mes étudiants un jour en cours.

[121] Ces affirmations sont issues de mon expérience de formatrice de PE1, et mériteraient de faire l'objet d'une étude précise.

d'une démarche hypothético-déductive. Le théorème de Pythagore permet en effet de prouver l'existence d'un nombre dont le carré vaut 2, et les pythagoriciens[122] ont démontré que ce nombre ne peut être rationnel. L'ensemble de tous les nombres réels est ainsi nécessaire dans le paradigme G2. Il faut ainsi non seulement concevoir les objets sur lesquels on travaille comme des objets théoriques, maîtriser des définitions et des théorèmes pour appliquer des raisonnements hypothético-déductifs, mais aussi parfois disposer de connaissances et de compétences sur les nombres rationnels et irrationnels pour résoudre un problème géométrique dans le paradigme G2. Par conséquent, parallèlement au travail effectué en géométrie pour faire prendre conscience aux PE1 des paradigmes G1 et G2, et les rendre capables de résoudre des problèmes en se situant dans G2, un travail important est également nécessaire à effectuer avec eux sur les nombres pour leur permettre de se situer efficacement dans G2. Autrement dit, il faut développer des connaissances sur les nombres pour pouvoir fonctionner dans G2.

Mais la relation entre nombres et géométrie n'est pas à sens unique. Les domaines numériques et géométriques **inter**agissent et, parallèlement à ce travail sur les nombres au service de la géométrie, des activités géométriques doivent être mises en place au service de la construction du nombre, en particulier du nombre réel. En effet, j'ai montré que des connaissances sur les nombres réels étaient indispensables pour se situer dans G2 mais il ne faut pas attendre que tout soit construit sur les nombres pour commencer à faire de la géométrie. Au contraire, développer des compétences géométriques va aussi permettre de développer des compétences numériques. C'est la base des changements de cadres proposés par Régine Douady : à l'intérieur d'une activité, les deux cadres, numérique et géométrique, peuvent intervenir et [Douady.1984, 1988, 1992] a montré comment ce changement de cadre pouvait être riche.

[122] Cette découverte serait due à Hippase de Métaponte qui selon la légende, après avoir enfreint les règles de la Fraternité pythagoricienne (école de Pythagore) en divulguant sa découverte, périt dans un naufrage

2.7. Item « tracer un triangle rectangle »

Cet item apparaît uniquement dans le test 3, en remplacement de l'item sur le tracé d'un triangle aplati. On obtient les résultats suivants concernant les tracés effectués et la réponse donnée à la question : « Que peut-on dire du triangle ABC ? » :

Modalité	Effectif	%
A tracé correct	73	97,33
B tracé incorrect	1	1,33
C pas de tracé	1	1,33
total	75	100 %

Modalité	Effectif	%
A ABC est rectangle	72	96,00
B autre	2	2,67
C non-réponse	1	1,33
total	75	100 %

Les étudiants tracent le triangle sans problème et le reconnaissent comme rectangle. Ce qui est surtout intéressant est bien sûr leur réponse à la question complémentaire : « Comment le savez-vous ? »

Modalité	Effectif	%	
A Equerre	11	14,67	
B Pythagore	38	50,67	
C Equerre et Pythagore	7	9,33	
BI Pythagore et cercle circonscrit	3	4,00	20 %
I Cercle circonscrit	12	16,00	
D Autre ou non-réponse	4	5,33	
total	75	100 %	

La moitié des étudiants justifient uniquement à l'aide de la réciproque du théorème de Pythagore, ce qui relève de G2.

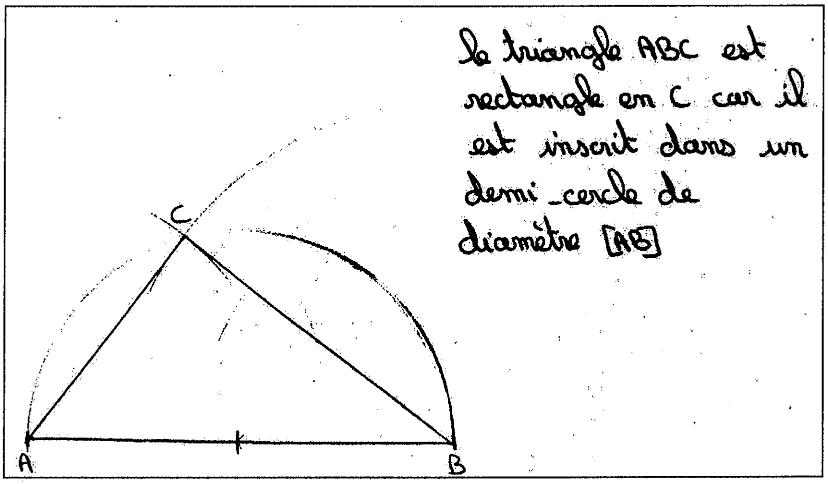
Au contraire, 14,5 % des étudiants vérifient avec l'équerre : c'est la perception qui valide, ce qui relève de G1.

9,5 % des étudiants, quant à eux, justifient à la fois par la perception avec l'utilisation de l'équerre, et par la réciproque du théorème de Pythagore, mettant sur le même plan les deux types de validations. En réponse à hr 8, on peut alors formuler :

r 8.4 : dans la situation de l'item « tracer un triangle rectangle », 9,5 % des étudiants utilisent des arguments qui relèvent de G1 et d'autres qui relèvent de G2.

Un dernier groupe est plus étonnant, notamment par son effectif : 20 % des étudiants utilisent un demi-cercle circonscrit au triangle pour conclure. On retrouve ainsi un comportement déjà observé sur d'autres items, qui consiste à effectuer une construction et à appliquer un théorème pour conclure. En réponse à hr 7, on peut ainsi formuler :

r 7.3 : Dans la situation de l'item « tracer un triangle rectangle », 20 % des étudiants se placent en fait dans G1 tout en croyant travailler dans G2.



Le faible effectif de ce test 3 ne permet pas de croiser cette question avec une autre.

Les items proposant une situation de reconnaissance de figure géométrique, et volontairement ambigus par rapport à G1-G2, permettant de déterminer directement dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les étudiants se situent, viennent d'être analysés. Je vais maintenant présenter les résultats des items concernant le tracé de médiatrices dans différentes situations, items qui doivent nous permettre, par l'analyse des justifications qui vont être proposées par les étudiants, d'envisager d'un autre point de vue le rapport des PE1 aux paradigmes géométriques G1 et G2.

3. Items 3, 5 et 8 : tracer une médiatrice

Trois items concernaient un tracé de médiatrice. Je vais les étudier simultanément, en m'intéressant successivement aux points suivants :

1. Les procédures utilisées sur chacun des trois items
2. La résistance des procédures aux changements de présentation
3. Une synthèse des procédures utilisées sur les trois items
4. Une première approche des degrés d'expertise des procédures, à partir des tris croisés sur les procédures
5. Les propriétés formulées et leur adéquation aux procédures utilisées
6. La cohérence des instruments avec les procédures utilisées
7. Une deuxième approche des degrés d'expertise des procédures de l'item 3, à partir d'une ACM puis de tris croisés sur les variables de l'item 3 seulement
8. Quelques précisions sur l'item 8

Voici quelques codes qui seront utilisés pour simplifier la lecture de certains tableaux ou graphiques :

∟ : angle droit ; X : intersection d'arcs de cercle ; **M** : milieu

D'où les procédures :

- XX : deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment ou du même côté, de même rayon ($r1 = r2$) ou de rayons différents ($r1 \neq r2$) pour l'item 3, de rayon égal à la distance MN ($r = MN$) ou non ($r \neq MN$) pour l'item 5.
- **M** ∟ : milieu et angle droit
- Etc.

3.1. Les procédures dans chacun des trois items

Analysons tout d'abord les procédures utilisées pour tracer la médiatrice du segment [MN] dans les items 3 et 5. Les résultats des tris à plat sont les suivants dans le test initial :

Résultats du test 1

Médiatrice sans contrainte

Modalité	Effectif	%	
Q5PF A X M	16	1,82	
Q5PF B X ∟	57	6,49	
Q5PF C1 XX r ≠ MN	497	56,61	
Q5PF C1B XX r = MN	185	21,07	78 %
Q5PF D XX même côté	1	0,11	
Q5PF E M ∟	100	11,39	
Q5PF F ?	14	1,59	
Q5PF G non réponse	8	0,91	

Médiatrice en bas de page

Modalité	Effectif	%		
Q3PF A X M	103	11,73	51 %	
Q3PF B X ∟	343	39,07		
Q3PF C1 XX r1 = r2	49	5,58		
Q3PF C2 XX r1 ≠ r2	24	2,73		14 %
Q3PF D XX même côté	52	5,92	8.5 %	
Q3PF C4 X ∟ M	13	1,48		
Q3PF E M ∟	249	28,36		
Q3PF F ?	15	1,71		
Q3PF G non réponse	6	0,68		
Q3PF H retraçage	19	2,16		
Q3PF I XXX	5	0,57		

La procédure standard, très largement utilisée (78 %) quand il n'y a pas de contrainte particulière (Q5), **consiste à tracer deux intersections d'arcs de cercle, de part et d'autre du segment [MN]**. Tous les arcs de cercle tracés ont, dans la configuration Q5, le même rayon. Ce rayon peut être égal (21 %) ou non (57 %) à la longueur MN.

Cette procédure n'est pas massivement remplacée par la procédure « milieu et angle droit » quand la position du segment est en bas de la feuille (Q3) (28 % seulement de la population totale utilise cette procédure en Q3), mais plutôt le plus souvent « adaptée », en gardant une intersection de deux arcs de cercle et, selon les cas, en utilisant un angle droit (39 %) ou le milieu du segment (12 %). Nous reviendrons sur cette adaptation.

Afin d'analyser l'influence de l'ordre des items, étudions les résultats des tests 2 et 3 dans lesquels, rappelons-le, l'item de la médiatrice sans contrainte était proposé **avant** celui de la médiatrice en bas de page, contrairement au test initial.

Résultats du test 2

Médiatrice sans contrainte

Modalité	Effectif	%	
Q2P A XM	5	5,10	
Q2P B X∟	3	3,06	
Q2P C1 XX r ≠ MN	54	55,10	73,5 %
Q2P C1B XX r = MN	17	17,35	
Q2P C3	1	1,02	
Q2P E M∟	18	18,37	

Médiatrice en bas de page

Modalité	Effectif	%	
Q4P A XM	14	14,29	32,5 %
Q4P B X∟	18	18,37	
Q4P C1 XX r1 = r2	10	10,20	
Q4P D XX	9	9,18	
Q4P E M∟	45	45,92	
Q4P Autres	2	2,04	

Résultats du test 3

Médiatrice sans contrainte

Modalité	Effectif	%	
Q1P B X∟	3	4,00	
Q1P C1 XX r ≠ MN	59	78,67	84 %
Q1P C1B XX r = MN	4	5,33	
Q1P E M∟	9	12,00	

Médiatrice en bas de page

Modalité	Effectif	%	
Q4P A XM	5	6,67	38,5 %
Q4P B X∟	24	32,00	
Q4P C1 XX r1 = r2	1	1,33	
Q4P D XX	3	4,00	
Q4P E M∟	36	48,00	
Q4P Autres	6	11	

Les résultats des tris à plat ci-dessus permettent de conclure que :

- Pour la situation de la médiatrice sans contrainte, le taux de procédures « deux intersections d'arcs de cercles » reste très majoritaire (entre 73 et 84 %) , tandis que la procédure « milieu et angle droit » reste beaucoup moins utilisée (entre 11 et 18 %). Les résultats sont proches de ceux du test 1.
- Pour la situation de la médiatrice en bas de page, le taux de procédures « milieu et angle droit » devient plus important, tandis que le taux de l'ensemble des procédures utilisant au moins une intersection d'arcs de cercles diminue. Il est en effet de 65 % quand la médiatrice en bas de page est proposée en premier, et autour de 40-42 % quand cette position est proposée en second. On peut faire l'hypothèse d'interprétation suivante : la procédure spontanément utilisée par les étudiants pour tracer une médiatrice est celle comportant deux intersections d'arcs de cercles de même rayon, de

part et d'autre du segment. A la première demande de tracé de médiatrice, l'étudiant commence donc par essayer d'appliquer cette procédure.

Si la première situation proposée est celle de la médiatrice sans contrainte, alors l'étudiant applique cette procédure complètement sans difficulté. A la seconde demande, un certain nombre d'entre eux est tenté, par un effet de contrat didactique, de changer de procédure. Ceci est renforcé par le fait que cette procédure aboutit alors difficilement. L'étudiant **change** alors totalement de procédure, pour utiliser la procédure « milieu et angle droit ».	Si la première situation proposée est celle de la médiatrice en bas de page, l'étudiant essaie d'appliquer cette procédure et trace la première intersection d'arcs de cercles, au-dessus du segment. La seconde partie du tracé est difficile à mettre en œuvre. L'étudiant **adapte** donc cette procédure, en utilisant la première intersection tracée, et en remplaçant le second élément de la procédure par un autre : angle droit, milieu ou seconde intersection mais cette fois au-dessus du segment. De ce fait, la procédure « milieu et angle droit » est moins utilisée.

Cette interprétation serait bien sûr à vérifier en reprenant ces tests sur des effectifs plus importants.

Pour l'item 8, le tri à plat sur le test 1 donne les résultats suivants :

Modalité		Effectif	%
Q8PFA	direct E et U	430	48,97
Q8PFB1	**E/U** et **M**	34	3,87
Q8PFB2	**E/U** et ∟	79	9,00
Q8PFC2	**E/U** et X	44	5,01
Q8PFCA	X∟	35	3,99
Q8PFD1	XX	195	22,21
Q8PFE	**M**∟	37	4,21
Q8PFF	autre	11	1,25
Q8PFG	non réponse	13	1,48

Ainsi, presque la moitié des étudiants utilisent de manière pertinente les points E et U pour effectuer le tracé le plus simple : tracer la droite (EU). Cette procédure sera considérée dans la suite comme la procédure experte.

Ce tableau met cependant également en évidence la résistance de la procédure « deux intersections d'arcs de cercles » qui est utilisée par 22 % des étudiants. Ceux-ci disposent d'une procédure « routinisée » et ne cherchent pas à utiliser les particularités de la configuration proposée.

Il sera intéressant dans les analyses suivantes d'identifier les procédures utilisées aux items 3 et 5 par ceux qui ont utilisé cette procédure « deux intersections d'arcs de cercles » à l'item 8. C'est ce type de problème que nous allons maintenant étudier.

3.2. Analyse des procédures pour les trois items simultanément

3.2.1. Analyse implicative

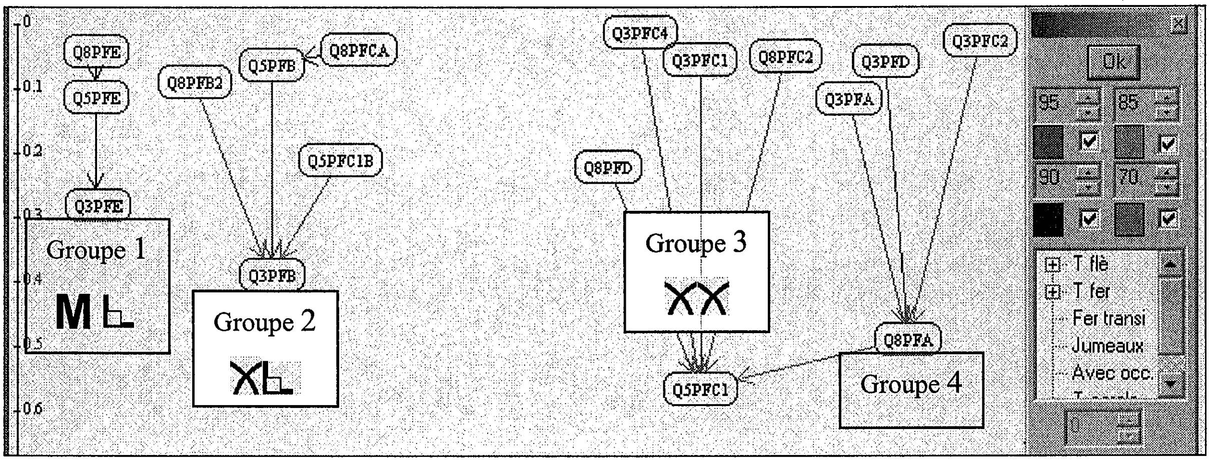
Une analyse implicative est effectuée pour répondre à la question précédente : « quelle procédure utilisent aux items 3 et 5 les étudiants qui ont utilisé la procédure « deux intersections d'arcs de cercles » à l'item 8 ? » et, de manière plus générale, à toutes les questions du type : « quelle procédure *x* utilisent à l'item *n* les étudiants qui ont utilisé la procédure *y* à l'item *p* ? ». Elles correspondent aux hypothèses présentées au chapitre précédent :

hr 12 : certains PE1 disposent de procédures de tracé très routinisées et peu adaptables

hr 13 : certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes

hr 14 : il y a un lien entre les procédures utilisées dans une situation et celles utilisées dans une autre

L'analyse est effectuée avec CHIC 1.4 et donne le graphe implicatif suivant :



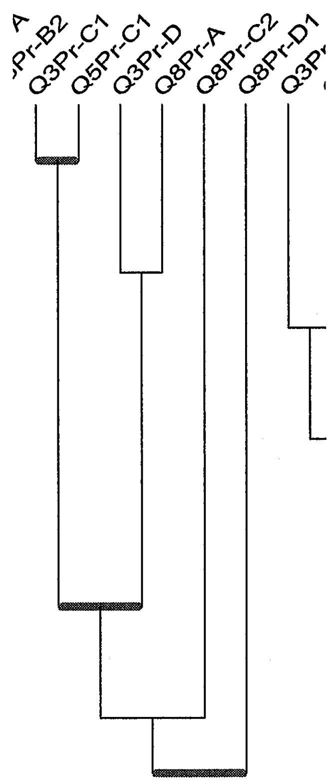
En réponse à hr 12, on peut noter la résistance de certaines procédures :

- quand on utilise la procédure « milieu et angle droit » (Q8PFE, groupe 1) pour l'item 8, on l'utilise également pour l'item 5 (Q5PFE) et pour l'item 3 (Q3PFE). Compte tenu des configurations des situations 3, 5 et 8, dans lesquelles cette procédure peut chaque fois s'utiliser, ces relations sont sans surprise. En effet, le fait d'utiliser la procédure « milieu et angle droit » à la question 8, alors qu'on peut directement relier les points E et U, voire à la question 5, où la procédure « deux intersections d'arcs de cercle » est massivement utilisée, signifie que cette procédure est fortement installée chez l'étudiant, elle est même éventuellement la seule disponible. Elle est donc naturellement utilisée à la question 3, où elle est parfaitement adaptée. La variable supplémentaire la plus typique au chemin Q8PFE→Q5PFE est la licence littéraire avec un risque de 0,08, et la plus typique à Q5PFE→Q3PFE est le bac E, avec un risque de 0,005, tandis que le bac L est typique à ce chemin avec un risque de 0,03. Autrement dit, la procédure « milieu et angle droit » est fortement liée aux étudiants littéraires.

- quand on utilise la procédure « une intersection d'arcs de cercles et angle droit » pour l'item 8 (Q8PFCA, groupe 2), on l'utilise également pour l'item 5 (Q5PFB) et pour l'item 3 (Q3PFB). La variable supplémentaire la plus typique au chemin Q8PFCA→ Q5PFB est à nouveau la variable bac L, avec un risque de 0,08, tandis que celle la plus typique au chemin Q5PFB→Q3PFB est la licence SH avec un risque de 0,01. Cette procédure est donc à nouveau plutôt une procédure d'étudiants littéraires. On peut aussi utiliser cette procédure à l'item 3 quand on a à l'item 8 utilisé le point E ou le point U et l'angle droit (Q8PFB2).

Notons dans les deux cas que ce sont pour les items 5 et 8 des procédures peu utilisées. L'axe vertical du graphe implicatif rappelle la fréquence des modalités concernées. On a donc là des liens relativement forts dans l'analyse implicative, mais qui correspondent à un nombre faible d'individus.

- quand on utilise la procédure « deux intersections de cercles de part et d'autre de [MN] » pour les items 3 (Q3PFC1, groupe 3) ou 8 (Q8PFD1), on l'utilise aussi pour l'item 5 (Q5PFC1). Cette procédure, standard dans la situation de l'item 5 sans contrainte, n'est pas la plus adaptée pour l'item 8, et encore moins pour l'item 3. Son utilisation pour ces deux derniers items peut laisser penser qu'il s'agit là pour l'étudiant de la seule procédure disponible. Cette interprétation n'est toutefois pas légitime, parce qu'il n'y a pas de lien entre les modalités Q3PFC1 et Q8PFD1 (au seuil de 0,7 dans l'analyse implicative). Une classification hiérarchique des similarités selon l'algorithme de la vraisemblance du lien de I.C. Lerman montre en effet que



Q8PFA est plus proche de Q3PFC1 que Q8PFD1[123]. La variable supplémentaire qui est le plus typique du chemin Q3PFC1 $\rightarrow$ Q5PFC1 est la licence L, avec un risque de 0,0002 ! Il s'agit donc encore de procédures encore utilisées plutôt par les étudiants littéraires.

On peut ainsi affirmer :

r 12 : certains PE1 disposent de procédures de tracé très automatisées et peu adaptables

En réponse à hr 13, ce graphe implicatif met également en évidence

- des changements de procédures signes d'« expertise » : quand on utilise la procédure « directe » pour l'item 8 (Q8PFA, groupe 4), on utilise la procédure « deux intersections d'arcs de cercles de rayon différent de MN » pour l'item 5 (Q5PFC1, groupe 2). De même, trois procédures de l'item 3 sont liées à la procédure directe de l'item 8 : « une intersection et milieu » (Q3PFA), « deux intersections du même côté » (Q3PFD) et « deux intersections de part et d'autre de rayons différents » (Q3PFC2). Ces procédures peuvent donc être considérées comme plus expertes que d'autres[124] puisqu'elles aboutissent à la procédure la plus experte pour l'item 8. Les changements de procédures correspondants sont liés à l'adaptabilité de la procédure. La variable supplémentaire qui est la plus typique du chemin Q3PFD $\rightarrow$ Q8PFA par exemple est le bac S avec un risque de 0,001. Ceci confirme l'« expertise » de ce lien.
- des changements de procédures liés à la faible adaptabilité de certaines procédures, avec par exemple le lien entre la procédure « deux intersections d'arcs de cercles de rayon MN » (Q5PFC1B, groupe 4) pour l'item 5 avec la procédure « une intersection d'arcs de cercles et un angle droit » de l'item 3 (Q3PFB). La procédure avec des arcs de cercles de rayon MN est peu adaptable car le rayon des cercles est fixé par la situation. Elle ne peut donc pas être adaptée pour l'item 3 en une procédure qui utilise des arcs de cercles de rayon différents, de part et d'autre ou du même côté du segment [MN]. Elle est donc changée plus radicalement et une des intersections d'arcs de cercle est remplacée par l'utilisation de l'équerre.

---

[123] Dans le dendogramme (arborescence) précédent, comme dans les tableaux de tris croisés qui suivent, les codes sont légèrement modifiés : un r (comme regroupé) apparaît à la place du F. Pour limiter les traitements avec des modalités à effectifs trop faibles, toutes celles qui ont une fréquence inférieure à 0,04 ont été regroupées dans une modalité « Autre » pour chacune des variables Q3PF, Q5PF, Q8PF. Les autres modalités n'ont pas été modifiées. Elles ont été renommées pour que l'on sache à tout moment sur quel fichier on travaille. Je continue néanmoins à les désigner par F dans mon texte pour faciliter la lecture et éviter la multiplication inutile des codes.

[124] Nous reviendrons un peu plus loin sur cette hiérarchisation des procédures du point de vue de leur degré d'expertise

Ainsi, on peut affirmer :

r 13 : certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes.

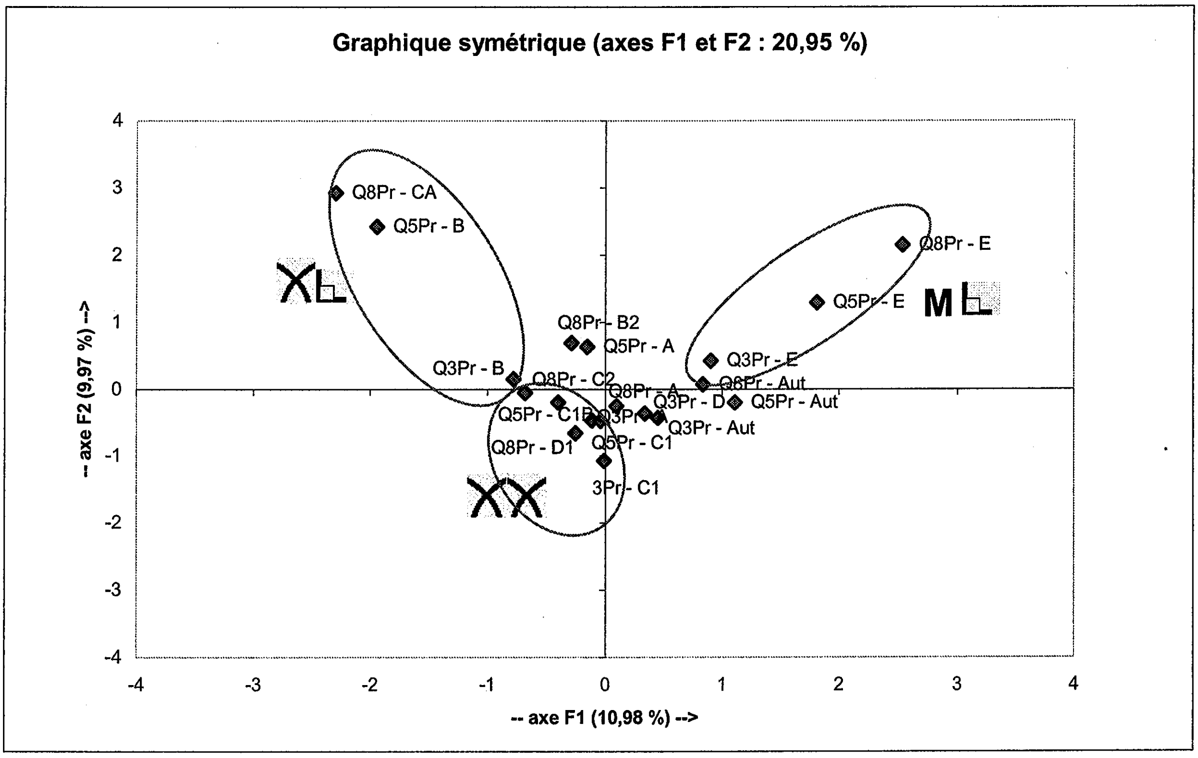
r 14 : il y a un lien entre certaines procédures utilisées dans une situation et celles utilisées dans une autre.

3.2.2. Synthèse des procédures utilisées

Afin de synthétiser l'analyse de ces procédures, une analyse en composantes multiples a été effectuée. L'inertie sur l'axe 1 est de 11 %, et de 10 % sur l'axe 2. Le tableau ci-dessous met en évidence les modalités qui ont une forte contribution sur les axes 1 ou 2, ainsi que les coordonnées sur ces deux axes.

Contributions des modalités (%)					Coordonnées standardisées des modalités		
	Poids abs.	Poids rel.	F1	F2		F1	F2
A	103	3,910	0,089	1,629	Q3Pr - A	-0,151	-0,645
Aut	82	3,113	1,065	1,097	Q3Pr - Aut	0,585	-0,594
B	343	13,022	13,440	0,543	Q3Pr - B	-1,016	0,204
C1	49	1,860	0,000	4,028	Q3Pr - C1	-0,016	-1,472
D	52	1,974	0,383	0,496	Q3Pr - D	0,440	-0,501
E	249	9,453	13,169	3,129	Q3Pr - E	1,180	0,575
Total Q3Pr	878	33,333	28,147	10,922			
A	16	0,607	0,025	0,453	Q5Pr - A	-0,204	0,863
Aut	23	0,873	1,838	0,066	Q5Pr - Aut	1,451	-0,275
B	57	2,164	13,925	23,925	Q5Pr - B	-2,537	3,325
C1	497	18,869	0,051	7,988	Q5Pr - C1	-0,052	-0,651
C1B	185	7,024	1,905	0,524	Q5Pr - C1B	-0,521	-0,273
E	100	3,797	21,272	11,879	Q5Pr - E	2,367	1,769
Total Q5Pr	878	33,333	39,017	44,835			
A	430	16,325	0,247	1,985	Q8Pr - A	0,123	-0,349
Aut	58	2,202	2,623	0,020	Q8Pr - Aut	1,091	0,094
B2	79	2,999	0,422	2,693	Q8Pr - B2	-0,375	0,948
C2	44	1,670	1,320	0,010	Q8Pr - C2	-0,889	-0,077
CA	35	1,329	11,953	21,329	Q8Pr - CA	-2,999	4,006
D1	195	7,403	0,826	6,041	Q8Pr - D1	-0,334	-0,903
E	37	1,405	15,446	12,167	Q8Pr - E	3,316	2,943
Total Q8Pr	878	33,333	32,837	44,244			

L'axe 1 oppose les modalités « **une intersection d'arcs de cercles et angle droit** » des trois items aux modalités « **milieu et angle droit** » tandis que l'axe 2 oppose ces dernières aux modalités « **deux intersections d'arcs de cercles** ». On obtient ainsi le graphique suivant :



Celui-ci met en évidence les trois groupes de modalités cités ci-dessus. Ainsi, si les implications ne sont pas toujours très fortes entre les modalités (dans le graphe implicatif utilisé au début de cette partie, il n'y avait quasiment pas de lien au seuil de 0,95 ; il a fallu descendre au seuil 0,70), il y a néanmoins des « tendances » qui apparaissent dans les procédures utilisées par les étudiants.

3.3. Première approche du degré d'expertise, à partir des tris croisés sur les procédures

L'analyse implicative du paragraphe 3.2.1 a permis de formuler des conclusions en terme de degré d'expertise qui peuvent être affinées, en particulier à partir des tableaux croisés des procédures utilisées à chacun des trois items. Considérons tout d'abord le tableau de tri croisé des procédures utilisées aux items 3 et 8.

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q3Pr=A	Q3Pr=Aut	Q3Pr=B	Q3Pr=C1	Q3Pr=D	Q3Pr=E	ENSEMBLE
Q8Pr=A	59 **57.28** 13.72	29 **35.37** 6.74	151 **44.02** 35.12	21 **42.86** 4.88	42 **80.77** 9.77	128 **51.41** 29.77	430 **48.97** 100.00
Q8Pr=Aut	9 8.74 15.52	10 12.20 17.24	14 4.08 24.14	4 8.16 6.90	2 3.85 3.45	19 7.63 32.76	58 6.61 100.00
Q8Pr=B2	6 5.83 7.59	6 7.32 7.59	44 12.83 55.70	3 6.12 3.80	0 0.00 0.00	20 8.03 25.32	79 9.00 100.00
Q8Pr=C2	4 3.88 9.09	5 6.10 11.36	21 6.12 47.73	4 8.16 9.09	0 0.00 0.00	10 4.02 22.73	44 5.01 100.00
Q8Pr=CA	4 3.88 11.43	0 0.00 0.00	26 7.58 74.29	0 0.00 0.00	2 3.85 5.71	3 1.20 8.57	35 3.99 100.00
Q8Pr=D1	21 20.39 10.77	28 34.15 14.36	84 24.49 43.08	17 34.69 8.72	5 9.62 2.56	40 16.06 20.51	195 22.21 100.00
Q8Pr=E	0 0.00 0.00	4 4.88 10.81	3 0.87 8.11	0 0.00 0.00	1 1.92 2.70	29 11.65 78.38	37 4.21 100.00
ENSEMBLE	103 100.00 11.73	82 100.00 9.34	343 100.00 39.07	49 100.00 5.58	52 100.00 5.92	249 100.00 28.36	878 100.00 100.00

KHI2 = 132.14 / 30 DEGRES DE LIBERTE / 15 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 132.14) = 0.000 / V.TEST = 7.67

Une lecture en colonnes de ce tableau permet de voir que, quand on a utilisé la procédure Q3PFA, on utilise un peu plus souvent la procédure Q8PFA (qui est la procédure experte de l'item 8) que quand on a utilisé la procédure Q3PFB. On peut ainsi conclure que Q3PFA est un peu plus experte que Q3PFB.

Croisons maintenant les procédures des items 3 et 5 pour confirmer ces degrés d'expertise.

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q5Pr=A	Q5Pr=Aut	Q5Pr=B	Q5Pr=C1	Q5Pr=C1B	Q5Pr=E	ENSEMBLE
Q3Pr=A	9 56.25 8.74	2 8.70 1.94	2 3.51 1.94	63 12.68 61.17	21 11.35 20.39	6 6.00 5.83	103 11.73 100.00
Q3Pr=Aut	2 12.50 2.44	12 52.17 14.63	2 3.51 2.44	45 9.05 54.88	12 6.49 14.63	9 9.00 10.98	82 9.34 100.00
Q3Pr=B	1 6.25 0.29	2 8.70 0.58	47 82.46 13.70	188 37.83 54.81	100 54.05 29.15	5 5.00 1.46	343 39.07 100.00
Q3Pr=C1	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	42 8.45 85.71	4 2.16 8.16	3 3.00 6.12	49 5.58 100.00
Q3Pr=D	0 0.00 0.00	2 8.70 3.85	1 1.75 1.92	35 7.04 67.31	6 3.24 11.54	8 8.00 15.38	52 5.92 100.00
Q3Pr=E	4 25.00 1.61	5 21.74 2.01	5 8.77 2.01	124 24.95 49.80	42 22.70 16.87	69 69.00 27.71	249 28.36 100.00
ENSEMBLE	16 100.00 1.82	23 100.00 2.62	57 100.00 6.49	497 100.00 56.61	185 100.00 21.07	100 100.00 11.39	878 100.00 100.00

KHI2 = 255.84 / 25 DEGRES DE LIBERTE / 11 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 255.84) = 0.000 / V.TEST = 13.21

Extrayons quelques cases de ce tableau pour les interpréter.

	Q5PFA	Q5PFB	ensemble
Q3PFA	8,7 %		100 %
Q3PFB		13,7 %	100 %

La procédure Q3PFA est plus adaptable, Q3PFB est plus résistante, puisque quand on a utilisé la première à l'item 3, on change plus volontiers de procédure à l'item 5 que quand on a utilisé la seconde.

	Q5PFC1	Q5PFC1B	ensemble
Q3PFA	61,2 %	20,4 %	100 %
Q3PFB	54,8 %	29,1 %	100 %

La procédure Q3PFA donne plus de rayons quelconques à l'item 5 que Q3PFB, et moins de rayons égaux à MN. Or, la procédure qui utilise deux intersections d'arcs de cercles avec des rayons quelconques est plus experte parce que plus adaptable que celle qui utilise le rayon MN (nous reviendrons un peu plus loin sur cette affirmation).

Continuons ce travail avec le dernier tableau croisé.

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q5Pr=A	Q5Pr=Aut	Q5Pr=B	Q5Pr=C1	Q5Pr=C1B	Q5Pr=E	ENSEMBLE
Q8Pr=A	7 43.75 1.63	5 21.74 1.16	14 24.56 3.26	294 59.15 68.37	69 37.30 16.05	41 41.00 9.53	430 48.97 100.00
Q8Pr=Aut	3 18.75 5.17	11 47.83 18.97	1 1.75 1.72	20 4.02 34.48	11 5.95 18.97	12 12.00 20.69	58 6.61 100.00
Q8Pr=B2	3 18.75 3.80	3 13.04 3.80	11 19.30 13.92	32 6.44 40.51	17 9.19 21.52	13 13.00 16.46	79 9.00 100.00
Q8Pr=C2	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	6 10.53 13.64	27 5.43 61.36	11 5.95 25.00	0 0.00 0.00	44 5.01 100.00
Q8Pr=CA	3 18.75 8.57	0 0.00 0.00	23 40.35 65.71	2 0.40 5.71	5 2.70 14.29	2 2.00 5.71	35 3.99 100.00
Q8Pr=D1	0 0.00 0.00	3 13.04 1.54	0 0.00 0.00	117 23.54 60.00	70 37.84 35.90	5 5.00 2.56	195 22.21 100.00
Q8Pr=E	0 0.00 0.00	1 4.35 2.70	2 3.51 5.41	5 1.01 13.51	2 1.08 5.41	27 27.00 72.97	37 4.21 100.00
ENSEMBLE	16 100.00 1.82	23 100.00 2.62	57 100.00 6.49	497 100.00 56.61	185 100.00 21.07	100 100.00 11.39	878 100.00 100.00

KHI2 = 535.01 / 30 DEGRES DE LIBERTE / 17 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5

PROBA (KHI2 > 535.01) = 0.000 / V.TEST = 20.52

Prenons de même un extrait de ce tableau pour interprétation :

	Q5PFA	Q5PFB
Q8PFA	43,7 %	24,6 %
ensemble	100 %	100 %

Ceux qui ont utilisé la procédure Q5PFA utilisent plus volontiers la procédure experte directe pour l'item 8 que ceux qui ont utilisé Q5PFB.

Ces différents résultats montrent que **la procédure « une intersection d'arcs de cercle et milieu » est plus experte, car plus adaptable, que la procédure « une intersection d'arcs de cercles et angle droit ».**

Prenons un autre extrait du tableau précédent.

	Q5PFC1	Q5PFC1B
Q8PFA	59,1 %	37,3 %
Q8PFD1	23,5 %	37,8 %
ensemble	100 %	100 %

Ce sous-tableau permet de montrer que la procédure **« deux intersections d'arcs de cercles avec des rayons quelconques » pour l'item 5 est plus experte que « deux intersections d'arcs de cercles avec le rayon MN »** ; ceux qui ont utilisé Q5PFC1 sont plus nombreux à utiliser la procédure experte à l'item 8 et moins nombreux à conserver une procédure avec deux intersections d'arcs de cercles ; **Q5PFC1 est donc plus adaptable.** Cette conclusion n'a évidemment rien de surprenant puisqu'il y a plus de degrés de liberté dans Q5PFC1 que dans Q5PFC1B.

3.4. Commentaires effectués sur les constructions de médiatrice

Analysons maintenant la réponse à la consigne : « Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez ». Ces commentaires ont comme intérêt leur confrontation aux procédures utilisées, d'où les tableaux croisés suivants[125] qui croisent les types de commentaires effectués avec les procédures utilisées, pour chacun des items 3 et 5 :

[125] Des lignes ou colonnes de faible effectif ont été retirées pour faciliter la lecture des tableaux

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q3Pr=A	Q3Pr=Autres	Q3Pr=B	Q3Pr=C1	Q3Pr=D	Q3Pr=E	ENSEMBLE
Q3Tr=AE	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	38 11.08 90.48	2 4.08 4.76	0 0.00 0.00	2 0.80 4.76	42 4.78 100.00
Q3Tr=E	6 5.83 8.57	16 19.51 22.86	3 0.87 4.29	13 26.53 18.57	31 59.62 44.29	1 0.40 1.43	70 7.97 100.00
Q3Tr=MA	47 45.63 9.57	31 37.80 6.31	189 55.10 38.49	19 38.78 3.87	10 19.23 2.04	195 78.31 39.71	491 55.92 100.00
Q3Tr=MAE	9 8.74 32.14	1 1.22 3.57	11 3.21 39.29	3 6.12 10.71	2 3.85 7.14	2 0.80 7.14	28 3.19 100.00
Q3Tr=S	22 21.36 11.52	25 30.49 13.09	82 23.91 42.93	12 24.49 6.28	7 13.46 3.66	43 17.27 22.51	191 21.75 100.00
ENSEMBLE	103 100.00 11.73	82 100.00 9.34	343 100.00 39.07	49 100.00 5.58	52 100.00 5.92	249 100.00 28.36	878 100.00 100.00

KHI2 = 436.92 / 30 DEGRES DE LIBERTE / 18 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 436.92) = 0.000 / V.TEST = 18.13

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q5Pr=A	Q5Pr=Autres	Q5Pr=B	Q5Pr=C1	Q5Pr=C1B	Q5Pr=E	ENSEMBLE
Q5Tr=E	1 6.25 0.49	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	174 35.01 85.29	29 15.68 14.22	0 0.00 0.00	204 23.23 100.00
Q5Tr=M	1 6.25 1.75	2 8.70 3.51	3 5.26 5.26	32 6.44 56.14	17 9.19 29.82	2 2.00 3.51	57 6.49 100.00
Q5Tr=MA	4 25.00 1.16	4 17.39 1.16	31 54.39 8.96	164 33.00 47.40	72 38.92 20.81	71 71.00 20.52	346 39.41 100.00
Q5Tr=MAE	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	2 3.51 6.90	21 4.23 72.41	5 2.70 17.24	1 1.00 3.45	29 3.30 100.00
Q5Tr=S	7 43.75 3.41	14 60.87 6.83	16 28.07 7.80	87 17.51 42.44	56 30.27 27.32	25 25.00 12.20	205 23.35 100.00
ENSEMBLE	16 100.00 1.82	23 100.00 2.62	57 100.00 6.49	497 100.00 56.61	185 100.00 21.07	100 100.00 11.39	878 100.00 100.00

KHI2 = 204.54 / 30 DEGRES DE LIBERTE / 18 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 204.54) = 0.000 / V.TEST = 10.88

Ces deux tableaux mettent en évidence les deux propriétés le plus fréquemment citées comme propriétés utilisées pour la construction de la médiatrice : « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants de M et N » (Type de commentaire = E) et « la médiatrice est la droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu » (Type de commentaire = MA). Une lecture en ligne de ces deux tableaux met en évidence que si la première est utilisée pour les procédures basées sur deux intersections d'arcs de cercles, ce qui est correct, la seconde est souvent utilisée pour ces mêmes procédures, ce qui ne l'est pas. Pour beaucoup d'étudiants, c'est « la » définition de la médiatrice, et ils n'ont rien d'autre à proposer à ce sujet. On obtient ainsi un fort taux de commentaires non adéquats :

Modalité	Effectif	%	Modalité	Effectif	%
Q3C-A pas de comment.	184	20,96	Q5C-A pas de comment	179	20,39
Q3C-B adéquat	359	40,89	Q5C-B adéquat	323	36,79
Q3C-C non adéquat	335	38,15	Q5C-C non adéquat	376	42,82

Le nombre important d'étudiants qui utilisent ainsi un commentaire non adéquat (38 % pour l'item 3, 43 % pour l'item 5), « récitant comme une comptine » une définition sans lien avec la procédure utilisée, met en évidence qu'il n'y a pas pour eux de lien entre la technique utilisée pour effectuer le dessin et la technologie qui justifie cette technique. En réponse à hr 15, je peux ainsi formuler :

r 15.1 : dans la situation de la médiatrice en bas de page, environ 40 % des PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux.

Les tableaux suivants permettent de préciser l'affirmation précédente sur le contenu des commentaires non adéquats :

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q3C=A	Q3C=B	Q3C=C	ENSEMBLE
Q3Tr=AE	0 0.00 0.00	35 9.75 83.33	7 2.09 16.67	42 4.78 100.00
Q3Tr=E	0 0.00 0.00	66 18.38 94.29	4 1.19 5.71	70 7.97 100.00
Q3Tr=MA	0 0.00 0.00	208 57.94 42.36	283 84.48 57.64	491 55.92 100.00
Q3Tr=MAE	0 0.00 0.00	9 2.51 32.14	19 5.67 67.86	28 3.19 100.00
Q3Tr=S	184 100.00 96.34	2 0.56 1.05	5 1.49 2.62	191 21.75 100.00
ENSEMBLE	184 100.00 20.96	359 100.00 40.89	335 100.00 38.15	878 100.00 100.00

KHI2 = 961.94 / 12 DEGRES DE LIBERTE / 1 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 961.94) = 0.000 / V.TEST = 30.02

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q5C=A	Q5C=B	Q5C=C	ENSEMBLE
Q5Tr=E	0 0.00 0.00	202 62.54 99.02	2 0.53 0.98	204 23.23 100.00
Q5Tr=M	0 0.00 0.00	3 0.93 5.26	54 14.36 94.74	57 6.49 100.00
Q5Tr=MA	0 0.00 0.00	79 24.46 22.83	267 71.01 77.17	346 39.41 100.00
Q5Tr=MAE	0 0.00 0.00	7 2.17 24.14	22 5.85 75.86	29 3.30 100.00
Q5Tr=S	179 100.00 87.32	13 4.02 6.34	13 3.46 6.34	205 23.35 100.00
ENSEMBLE	179 100.00 20.39	323 100.00 36.79	376 100.00 42.82	878 100.00 100.00

KHI2 =1177.15 / 12 DEGRES DE LIBERTE / 3 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 >1177.15) = 0.000 / V.TEST = 33.38

Ces commentaires non adéquats correspondent le plus souvent à « la médiatrice est la droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu ». Par contre, le commentaire « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants de M et N » est effectué à bon escient.

L'item 8 voit nettement diminuer le taux de réponse du type « la médiatrice est la droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu », tandis qu'apparaissent des réponses liées aux propriétés des triangles isocèles. Nous obtenons ainsi :

Modalité		Effectif	%	
Q8TA	angle droit	11	1,25	
Q8TAE	angle droit et équidistance des points sans citer E et/ou U	6	0,68	
Q8TC	équidistance de E et/ou U sans référence triangle isocèle	191	21,75	
Q8TE	équidistances des points (sans citer E et/ou U)	111	12,64	
Q8TMAE	milieu et angle droit et équidistance des points	10	1,14	
Q8TMA	milieu et angle droit	140	15,95	
Q8TM	milieu	32	3,64	
Q8TB	référence au triangle isocèle	117	13,33	16,6 %
Q8TBF	référence au triangle isocèle et à la bissectrice	29	3,30	
Q8TD	autre commentaire	30	3,42	
Q8TS	sans commentaire	201	22,89	

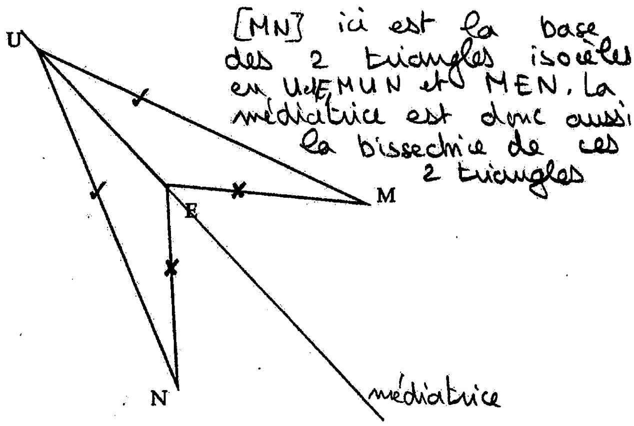
Un tableau croisé permet de savoir si ces commentaires sont adéquats ou non :

On a supprimé sur la variable Q8T les modalités de fréquence inférieure à 3 %

POIDS / % COLONNE / % LIGNE	Q8A=A	Q8A=B	Q8A=C	ENSEMBLE
Q8T=B	0 0.00 0.00	85 18.93 72.65	32 14.04 27.35	117 13.33 100.00
Q8T=BF	0 0.00 0.00	14 3.12 48.28	15 6.58 51.72	29 3.30 100.00
Q8T=C	0 0.00 0.00	182 40.53 95.29	9 3.95 4.71	191 21.75 100.00
Q8T=D	0 0.00 0.00	17 3.79 56.67	13 5.70 43.33	30 3.42 100.00
Q8T=E	0 0.00 0.00	106 23.61 95.50	5 2.19 4.50	111 12.64 100.00
Q8T=M	0 0.00 0.00	4 0.89 12.50	28 12.28 87.50	32 3.64 100.00
Q8T=MA	0 0.00 0.00	26 5.79 18.57	114 50.00 81.43	140 15.95 100.00
Q8T=S	201 100.00 100.00	0 0.00 0.00	0 0.00 0.00	201 22.89 100.00
ENSEMBLE	201 100.00 22.89	449 100.00 51.14	228 100.00 25.97	878 100.00 100.00

KHI2 =1282.82 / 20 DEGRES DE LIBERTE / 7 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 >1282.82) = 0.000 / V.TEST = 34.40

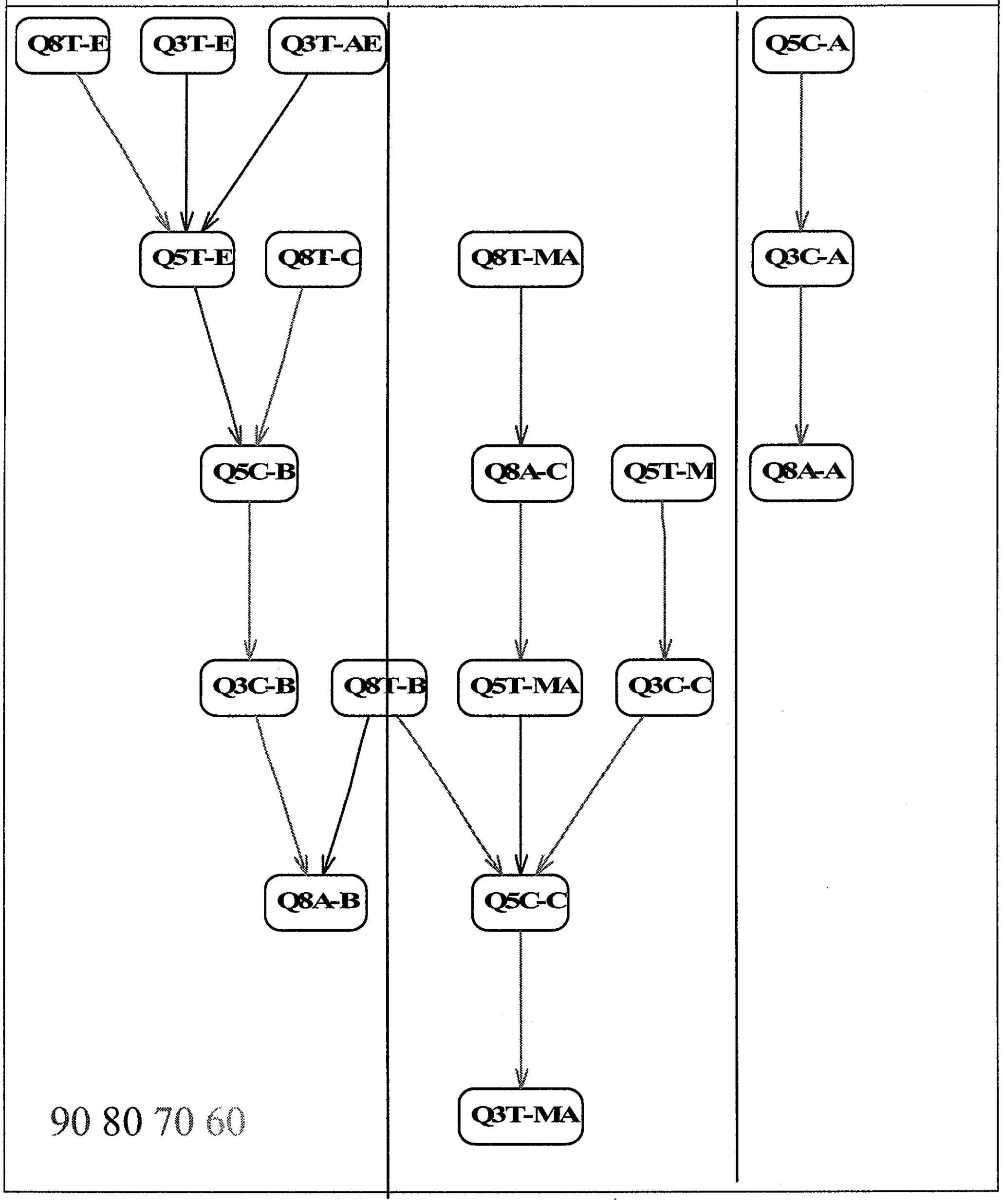
On retrouve un fort taux de commentaires inadéquats parmi les commentaires de type « la médiatrice est la droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu » et un très fort taux de commentaires adéquats parmi les commentaires faisant référence à l'équidistance des points. Les références au triangle isocèle sont plutôt satisfaisantes, mais lorsque les étudiants essaient de donner trop de précisions (en particulier en se référant à la bissectrice), ce n'est pas toujours à bon escient.



Dans la production ci-contre par exemple, ce qui est écrit est exact, mais ne justifie pas la procédure manifestement utilisée, à savoir « tracer directement la droite (EU) ».

On retrouve ces résultats sur le graphe implicatif :

Commentaires d'équidistance : adéquats	Commentaires « milieu et angle droit » : non adéquats	Sans commentaire



Deux groupes principaux apparaissent sur ce graphe implicatif. D'une part, les propriétés du type « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants de M et N », qui sont en général adéquates, et d'autre part les propriétés du type « la médiatrice est la

droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu » qui le plus souvent ne le sont pas.

La variable qui contribue le plus au chemin Q3TE$\rightarrow$Q5TE$\rightarrow$Q5CB$\rightarrow$Q3CB$\rightarrow$Q8AB est bac S avec un risque de 5.10^{-8} : les étudiants scientifiques effectuent un commentaire pertinent. La variable qui contribue le plus au chemin Q8TMA$\rightarrow$Q8AC$\rightarrow$Q5TMA$\rightarrow$Q5CC$\rightarrow$Q3TMA est licence L avec un risque de 0.07 : les étudiants littéraires,eux, effectuent plus souvent un commentaire inadéquat. Ces résultats ne sont pas surprenants et confirment la difficulté déjà signalée des étudiants littéraires dans le travail.

Si l'on considère par ailleurs qu'effectuer un commentaire adéquat est plutôt le signe d'un travail dans G2, tandis qu'un commentaire inadéquat correspond plutôt à un travail dans G1, ces résultats permettent d'affirmer, en réponse à hr1 :

r1 : dans les items 3, 5 et 8, les étudiants ayant une formation scientifique travaillent souvent dans G2, les étudiants avec une formation littéraire travaillent souvent dans G1.

Une modalité se distingue : « référence au triangle isocèle » pour l'item 8 (Q8TB). C'est en général un commentaire adéquat pour l'item 8, mais il correspond souvent à un commentaire du type « la médiatrice est la droite perpendiculaire à [MN] passant par son milieu » pour l'item 3 et à un commentaire (probablement le même) non adéquat pour l'item 5. On peut penser que ces étudiants ont une expertise « moyenne »: d'une part ils utilisent un commentaire (« perpendiculaire et milieu ») très standard dans une situation, elle aussi standard, de tracé de médiatrice (item 5, voire item 3) ; ce commentaire « automatisé » s'avère ici non adéquat. D'autre part, la situation de l'item 8 est suffisamment particulière pour les inciter à réfléchir. Ils sont alors capables d'établir un lien pertinent entre leur tracé de médiatrice et les propriétés des triangles isocèles.

L'étude des procédures et des propriétés utilisées va maintenant être complétée par celles des instruments utilisés.

3.5. Instruments pour tracer une médiatrice

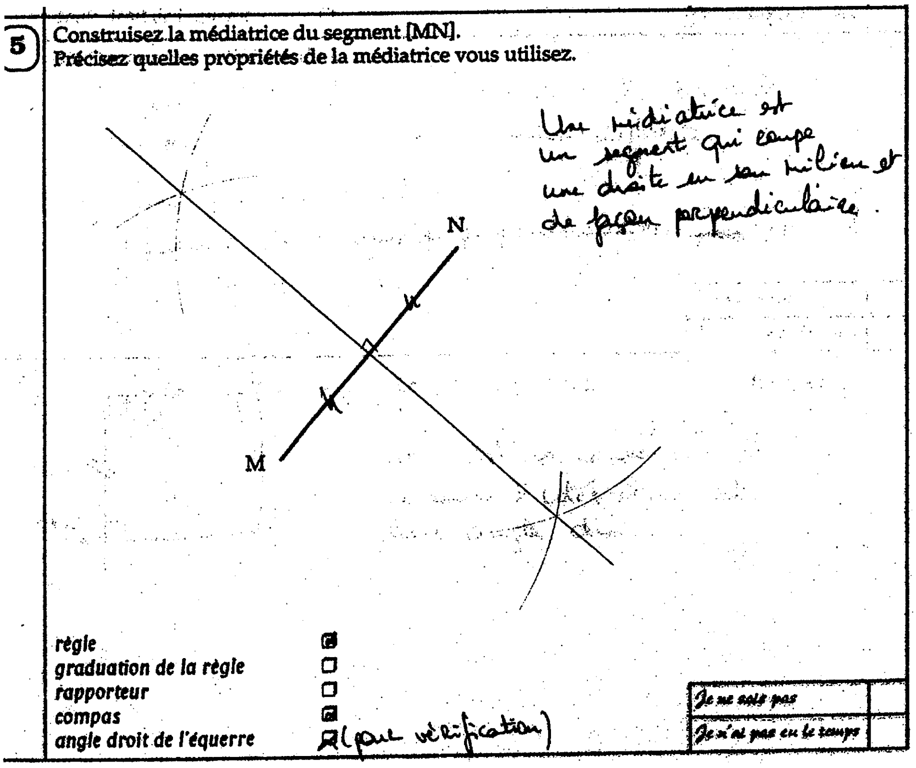
Etudions les effectifs de chacune des modalités possibles. On obtient alors le tableau suivant pour l'item 3 :

	Q3I RIEN	Q3I B	Q3I C	Q3I D	Q3I E	Q3I BC	Q3I BD	Q3I BE	Q3I CD	Q3 ICE	Q3I DE	Q3I BCD	Q3I BCE	Q3I BDE	Q3I CDE	Q3I BDCE	Total
effectif	12	8	1	169	35	11	69	211	4	3	325	0	1	25	2	2	878
pourcentage	1,37	0,91	0,11	19,25	3,99	1,25	7,86	24,03	0,46	0,34	37,02	0,00	0,11	2,85	0,23	0,23	100

Quatre modalités retiennent tout d'abord notre attention. Elles correspondent aux procédures « classiques » attendues.

- D seul, i.e. compas seul : pour les procédures « deux arcs de cercle de part et d'autre du segment » ou « deux arcs de cercle du même côté du segment ».
- B et D, i.e. graduation de la règle et compas : pour la procédure « une intersection d'arcs de cercle et milieu »
- B et E, i.e. graduation de la règle et angle droit de l'équerre, pour la procédure « milieu et angle droit ».
- D et E, i.e. compas et angle droit de l'équerre, pour la procédure « une intersection d'arcs de cercle et angle droit ».

Une autre modalité est à remarquer : BDE. Il s'agit des trois outils : graduation de la règle, compas et angle droit de l'équerre. Théoriquement, il est inutile d'utiliser les trois. Dans la pratique, des étudiants éprouvent le besoin de « vérifier » leur tracé. Deux des outils (voire le compas seul) servent à réaliser le tracé, le troisième servant à vérifier, comme le montre l'exemple suivant (cet exemple est pris pour l'item 5 mais on trouve des commentaires identiques pour l'item 3) :



Par ailleurs, dans un certain nombre de cas, on a pu noter que les étudiants ne font pas la différence entre « règle » et « graduation de la règle ». Il s'ensuit qu'ils ont simplement indiqué avoir utilisé la règle, ce qui n'a pas été codé puisque tous ont utilisé la règle pour tracer les droites. On sous-estime ainsi le nombre d'étudiants qui ont utilisé la graduation de la règle.

Pour l'item 5, on obtient :

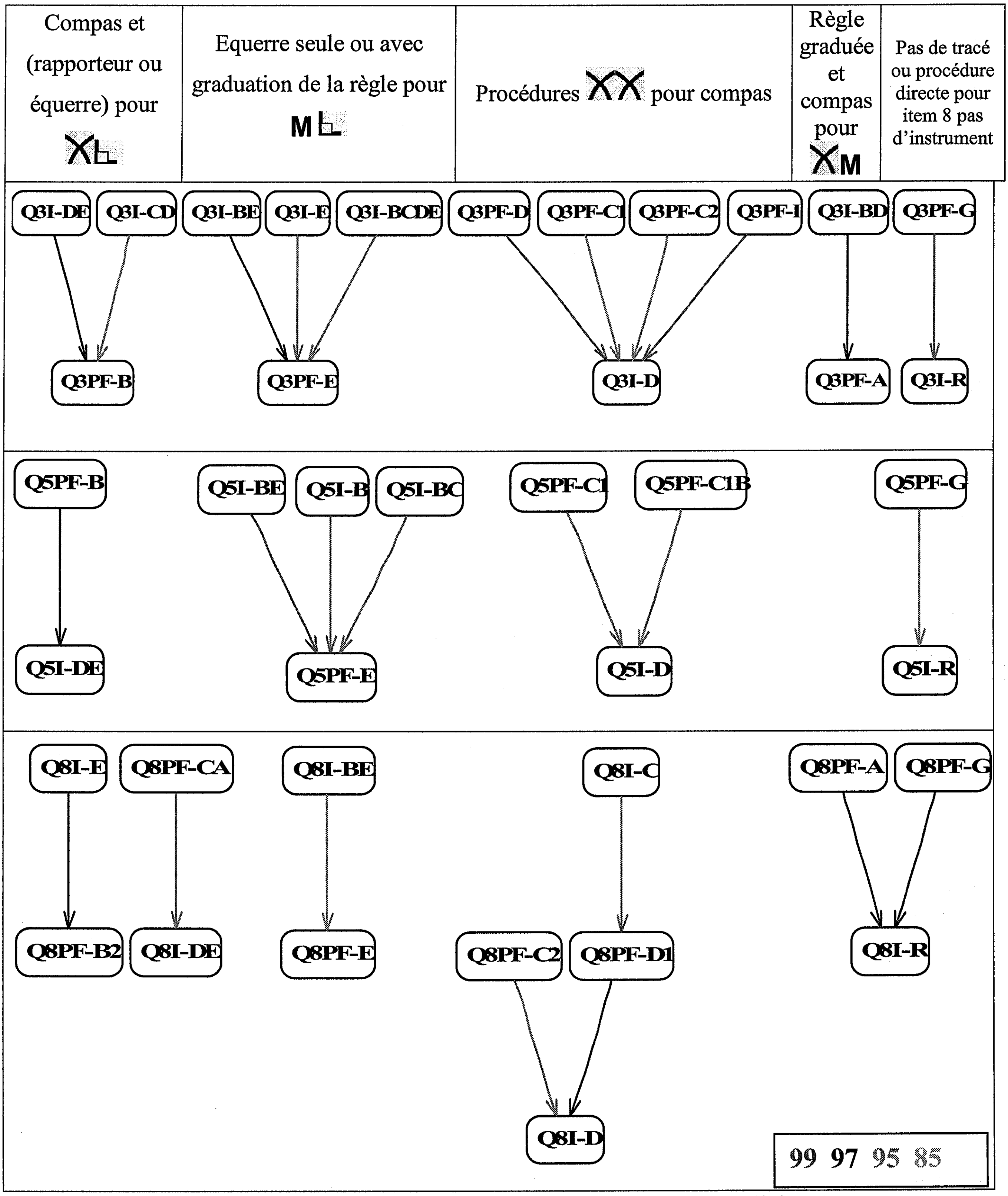
	Q5I RIEN	Q5I B	Q5I C	Q5I D	Q5I E	Q5I BC	Q5I BD	Q5I BE	Q5I CD	Q5I CE	Q5I DE	Q5I BCD	Q5I BCE	Q5I BDE	Q5I CDE	Q5I BDCE	Total
effectif	29	2	1	645	16	2	15	80	0	0	80	0	0	8	0	0	878
pourcentage	3,30	0,23	0,11	73,46	1,82	0,23	1,71	9,11	0,00	0,00	9,11	0,00	0,00	0,91	0,00	0,00	100

Les instruments utilisés ici se réduisent très majoritairement au compas seul, ce qui correspond aux procédures « deux intersections d'arcs de cercle ».
Notons par ailleurs une augmentation du nombre d'étudiants qui n'ont plus précisé quels instruments ils avaient utilisés. Rappelons que les instruments qui ont été codés sont ceux qui ont été cochés par l'étudiant, même s'il en a manifestement oublié. L'aspect répétitif des cases à cocher pour les instruments, en même temps que la position dans un angle inférieur de

l'espace de travail pour cet item peuvent expliquer la diminution du taux de réponse à cette question.

Par ailleurs, la question des instruments n'est plus pertinente pour l'item 8, puisque la procédure standard ne demande que l'utilisation d'une règle non graduée (non codée).

La connaissance des instruments utilisés est intéressante quand on effectue le croisement avec les procédures. Pour éviter une lecture fastidieuse de tableaux croisés, l'analyse implicative permet de mettre en évidence les « quasi-implications » entre procédures et instruments. Le graphe qui suit réunit en fait trois graphes distincts, un pour chacun des items. Les implications sont souvent fortes, les seuils utilisés sont 0,99, 0,97, 0,95 et 0,85.



Graphe implicatif, avec l'analyse entropique et la loi de Poisson, au seuil de 0.85

La lecture de ces graphes implicatifs permet (sans surprise) de constater une grande cohérence des instruments cochés par rapport aux procédures utilisées.

Elle permet également de mettre en évidence certaines omissions. Ainsi, la procédure « milieu et angle droit » nécessite l'utilisation de l'équerre et de la règle graduée, mais cette dernière n'est pas toujours cochée. Les tris croisés Q3PF x Q3I et Q5PF x Q5I, disponibles en annexe 18, permettent d'affiner cette remarque. Par exemple, pour la procédure « une intersection d'arcs de cercles et milieu » de l'item 3 (Q3PFA), la graduation de la règle (B) et le compas (D) sont théoriquement utilisés. Un quart des étudiants néanmoins ne cochent pas la graduation de la règle. Ils ont probablement coché « règle » mais pas « règle graduée ». Ils n'ont pas vraiment conscience de la distinction entre les deux modalités. Cet oubli apparaît également pour la procédure « milieu et angle droit » (E) sur les tris croisés, mais de manière beaucoup moins flagrante (seuls 10 % de ceux qui ont utilisé cette procédure ont oublié de cocher la règle graduée). On peut ainsi affirmer : **Certains PE1 ne font pas la différence entre règle et règle graduée.** Il sera intéressant en formation de travailler sur ce point, afin que les futurs professeurs des écoles puissent envisager de faire utiliser aux enfants des règles non graduées. Des activités autour des quadrilatères, et en particulier autour du rectangle, peuvent être envisagées simplement à la règle (non graduée) et à l'équerre, afin de ne pas utiliser la longueur des côtés mais seulement les propriétés de parallélisme et de perpendicularité.

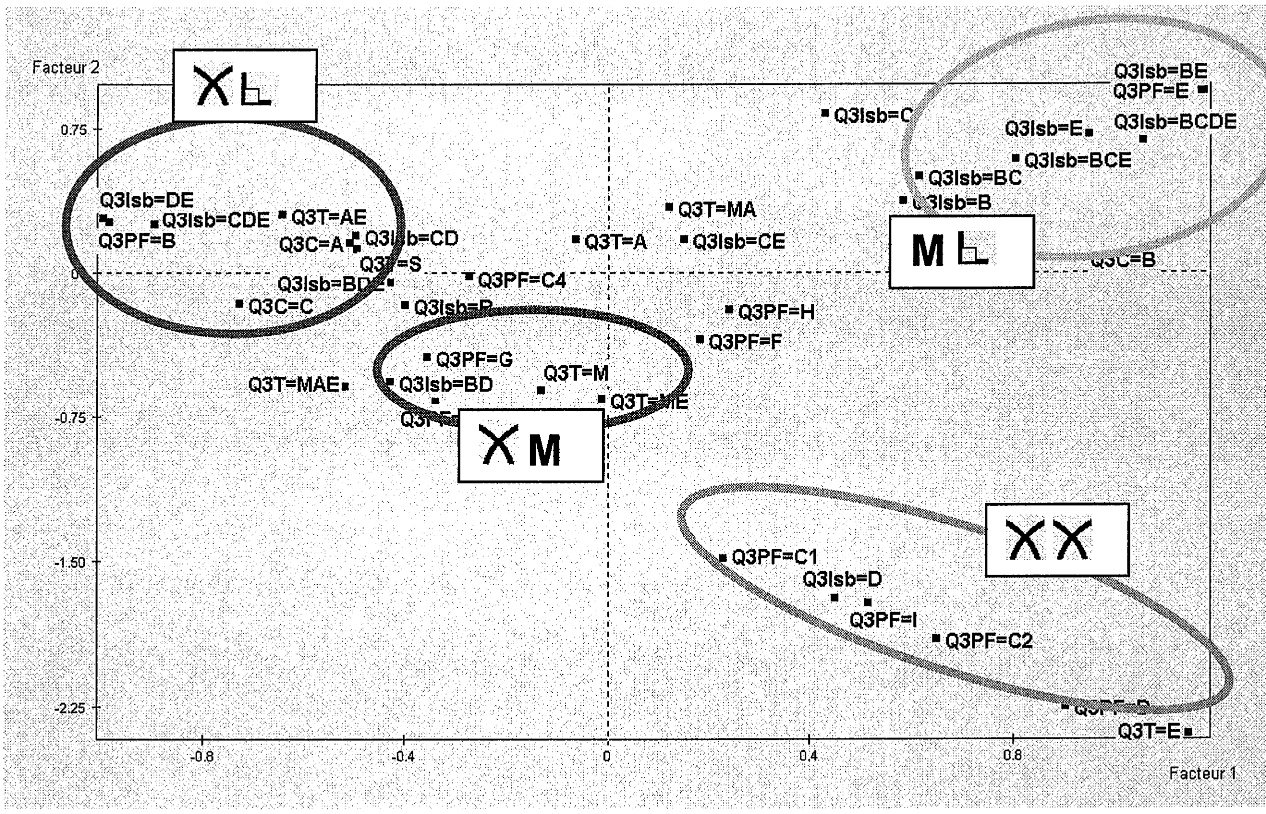
Pour la procédure « une intersection d'arcs de cercle et un angle droit » (Q3PFB, Q5PFB, Q8PFCA), le compas (D) et l'équerre (E) sont généralement bien indiqués. De même pour les autres procédures, il y a une parfaite adéquation entre la procédure utilisée et les instruments cochés.

3.6. Deuxième approche du degré d'expertise, à partir de toutes les informations sur l'item 3

La première analyse du degré d'expertise a été faite en analysant uniquement les procédures utilisées, sur les trois items. Un autre point de vue est exploité ci-dessous : ne prendre en compte qu'un seul item, mais avec l'ensemble des informations dont on dispose. Une analyse en composantes multiples et une analyse implicative sont donc exécutées sur les variables de l'item 3, de même qu'un tableau croisé sur les procédures et l'adéquation ou non des commentaires.

3.6.1. Analyse en composantes multiples sur l'item 3

Le lecteur trouvera en annexe 19 des extraits du fichier de résultats de l'analyse en composantes multiples effectuée sur l'item 3. Le plan factoriel 1 x 2 est représenté sur le graphique suivant :



L'inertie cumulée des deux premiers axes est de 25%. Il faut donc ne pas accorder trop de poids aux conclusions que l'on peut en tirer. Néanmoins, quelques phénomènes apparaissent de manière très claire. Les modalités qui contribuent le plus à la constitution de l'axe 1 sont :

- d'un côté : Q3IBE (instruments : graduation de la règle et angle droit) ; Q3CB (adéquation du commentaire et de la figure), Q3PFE (procédure milieu et angle droit), Q3TE (commentaire : équidistance)
- de l'autre côté :Q3IDE (compas et angle droit), Q3CC (commentaire non en adéquation avec la figure), Q3PFB (procédure intersection d'arcs de cercle et angle droit), Q3TS (sans commentaire)

Cet axe créé ainsi une « échelle d'expertise », des procédures et commentaires les plus experts à droite aux moins experts à gauche.

On peut ainsi, en particulier, ordonner les procédures de la moins experte à la plus experte pour la question 3, en fonction de sa coordonnée sur l'axe 1. On obtient :

- **Q3PFB : une intersection d'arcs de cercle et un angle droit**

- **Q3PFA : une intersection d'arcs de cercles et le milieu**
- **Q3PFH : retraçage du segment**
- **Q3PFC1 : deux intersections d'arcs de cercles de part et d'autre du segment de même rayon**
- **Q3PFC2 : deux intersections d'arcs de cercles de part et d'autre du segment, de rayons différents**
- **Q3PFD : deux intersections d'arcs de cercles du même côté du segment**
- **Q3PFE : milieu et angle droit**

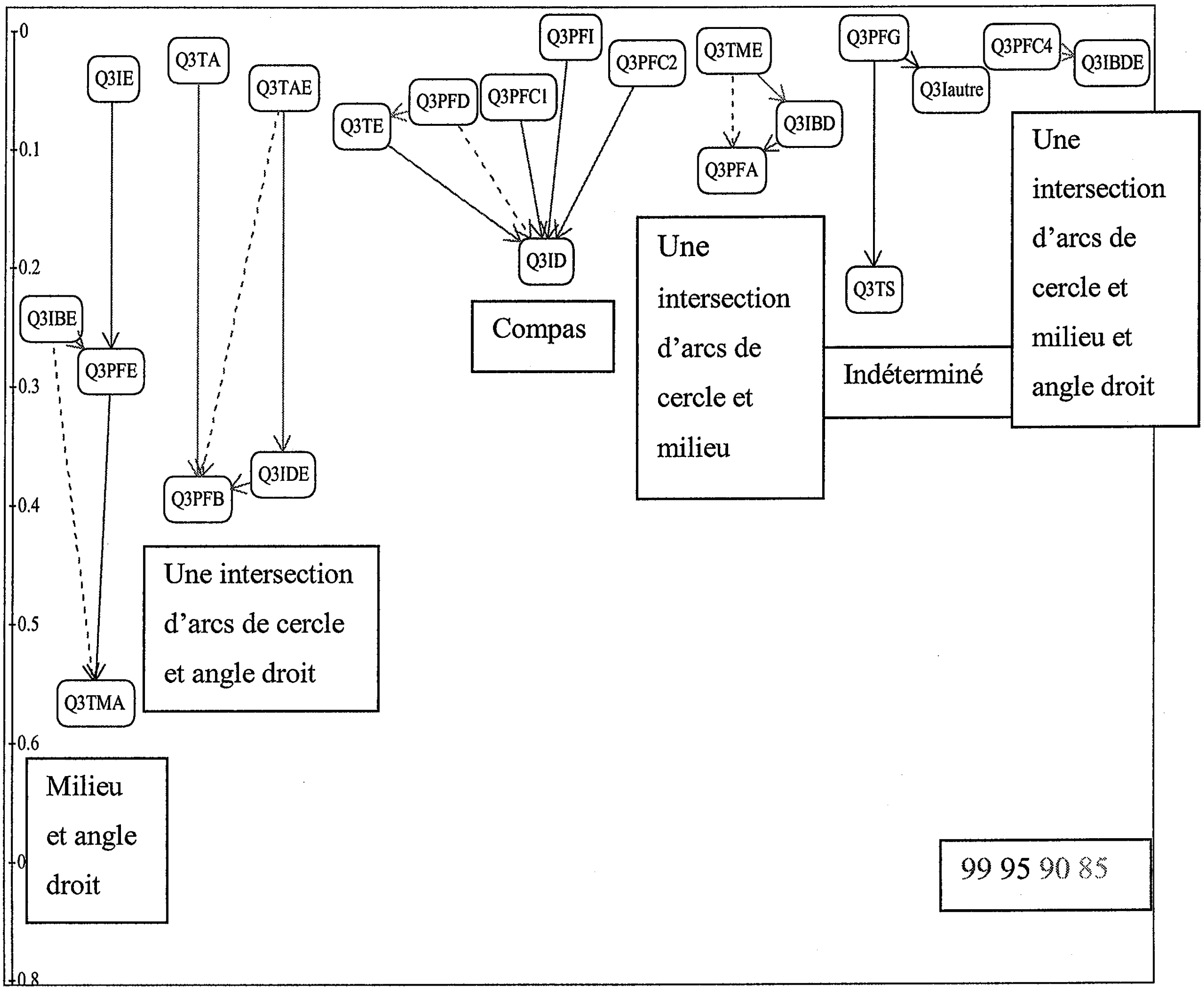
On retrouve le fait que « intersection et angle droit » est moins expert que « intersection et milieu », obtenu précédemment par des croisements de la question 3 avec la question 8 ou la question 5. L'ordre dans lequel sont placées les modalités liées à deux intersections d'arcs de cercle est également assez naturel : il faut avoir compris ce que l'on fait pour s'autoriser à tracer les deux intersections du même côté du segment, tandis que tracer deux intersections de part et d'autre et en utilisant le même rayon montre une incapacité à adapter la procédure standard, celle-ci étant mal adaptée à la situation de l'item 3, compte tenu de la position du segment [MN] en bas de page.

Les modalités qui contribuent à la constitution de l'axe 2 sont :

- d'un côté : Q3ID (instrument : compas), Q3PFD (procédure : 2 intersections d'arcs de cercle du même côté), Q3TE (commentaire : équidistance)
- de l'autre : Q3IBE (instruments : graduation de la règle et angle droit), Q3PFE (procédure : milieu et angle droit)

Cet axe oppose ainsi les procédures, instruments et commentaires liés au compas d'une part et ceux liés à la graduation de la règle et à l'angle droit d'autre part.

Ainsi, le plan factoriel 1-2 met en évidence des groupes que l'on retrouve avec l'analyse implicative :



0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.8
Q3IE
Q3TA
Q3TAE
Q3TE
Q3PFD
Q3PFC1
Q3PFI
Q3PFC2
Q3TME
Q3IBD
Q3PFA
Q3PFG
Q3Iautre
Q3PFC4
Q3IBDE
Q3ID
Q3TS
Q3IBE
Q3PFE
Q3IDE
Q3PFB
Q3TMA
Compas
Une intersection d'arcs de cercle et milieu
Indéterminé
Une intersection d'arcs de cercle et milieu et angle droit
Une intersection d'arcs de cercle et angle droit
Milieu et angle droit
99 95 90 85

3.6.2. Tableau croisé Q3PF – Q3C

Afin de confirmer cette échelle d'expertise, on peut croiser les procédures et l'adéquation aux commentaires, signe d'expertise.

POIDS % COLONNE % LIGNE	Q3C=A	Q3C=B	Q3C=C	ENSEMBLE
Q3PF=A	20 10.87 19.42	25 6.96 24.27	58 17.31 56.31	103 11.73 100.00
Q3PF=B	81 44.02 23.62	52 14.48 15.16	210 62.69 61.22	343 39.07 100.00
Q3PF=C1	11 5.98 22.45	16 4.46 32.65	22 6.57 44.90	49 5.58 100.00
Q3PF=C2	2 1.09 8.33	13 3.62 54.17	9 2.69 37.50	24 2.73 100.00
Q3PF=C4	2 1.09 15.38	1 0.28 7.69	10 2.99 76.92	13 1.48 100.00
Q3PF=D	6 3.26 11.54	33 9.19 63.46	13 3.88 25.00	52 5.92 100.00
Q3PF=E	42 22.83 16.87	204 56.82 81.93	3 0.90 1.20	249 28.36 100.00
Q3PF=F	5 2.72 33.33	5 1.39 33.33	5 1.49 33.33	15 1.71 100.00
Q3PF=G	5 2.72 83.33	1 0.28 16.67	0 0.00 0.00	6 0.68 100.00
Q3PF=H	9 4.89 47.37	6 1.67 31.58	4 1.19 21.05	19 2.16 100.00
Q3PF=I	1 0.54 20.00	3 0.84 60.00	1 0.30 20.00	5 0.57 100.00
ENSEMBLE	184 100.00 20.96	359 100.00 40.89	335 100.00 38.15	878 100.00 100.00

KHI2 = 363.07 / 20 DEGRES DE LIBERTE / 10 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 363.07) = 0.000 / V.TEST = 16.95

Si on range les procédures dans l'ordre croissant de pourcentage de commentaire adéquat, on obtient exactement le même ordre : B, A, H, C1, C2, D. Il apparaît ainsi que **cette expertise ne concerne pas la procédure en elle-même, mais plutôt l'étudiant qui l'utilise, le critère d'expertise pris en compte étant la cohérence entre la procédure utilisée et les propriétés énoncées,** ce qui justifie que la procédure « milieu et angle droit » soit reconnue comme la plus experte.

Dans le paragraphe 3.2.1 (cf. pages 257 et suivantes), l'objectif était de déterminer des procédures stables, ou au contraire des changements de procédures. Si on reprend le graphe implicatif alors effectué et qu'on s'intéresse au degré d'expertise, on peut considérer l'utilisation de la procédure « directe » à l'item 8 comme un critère d'expertise, et repérer les procédures liées à cette modalité. On trouve alors :

Procédures liées à Q8PFA donc expertes	Procédures non liées à Q8PFA donc non expertes
Q3PFA, Q3PFD, Q3PFC2	Q3PFB, Q3PFE, Q3PFC1

et on peut en déduire :

- « une intersection et milieu » (Q3PFA) est une procédure plus experte que « une intersection et angle droit » (Q3PFB)
- « deux intersections du même côté » (Q3PFD) et « deux intersections de part et d'autre de rayons différents » (Q3PFC2) sont plus expertes que « deux intersections de même rayon » (Q3PFC1)

Ces résultats confortent en partie les précédents mais la procédure « milieu et angle droit » (Q3PFE) par exemple, experte parce que les commentaires correspondants sont en général adéquats, n'est pas experte du point de vue de son adaptation dans l'item 8.

3.7. Analyse de la question 8 seule

De même que l'item 3 a été analysé seul, étudions maintenant plus précisément l'item 8. Nous avons déjà analysé les procédures utilisées et fait le lien avec les procédures utilisées dans les deux autres situations, mais il reste des informations dont nous n'avons pas encore tenu compte.

3.7.1. Tris à plat

La première de ces informations concerne la nature du tracé entre les points M et N :

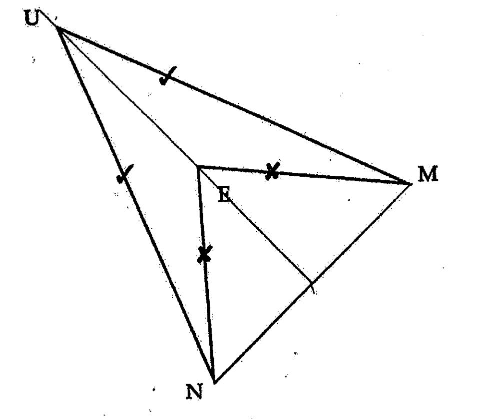
	Modalité	Effectif	%
Q8TSA	la droite (MN) est tracée	131	14,92
Q8TSB	le segment [MN] est tracé	567	64,58
Q8TSC	ni l'un ni l'autre ne sont tracés	180	20,50

Il est demandé de tracer la médiatrice du segment [MN]. Les deux tiers des étudiants tracent d'abord le segment [MN], comme si celui-ci, et a fortiori sa médiatrice, n'existait que s'il était tracé. Ceci est compréhensible pour un étudiant qui se place spontanément dans G1. Dans G1, en effet, le dessin est l'Objet géométrique. S'il n'y a pas de dessin, il n'y a pas d'objet. On peut donc faire l'hypothèse que ceux qui ne tracent ni la droite (MN) ni le segment [MN] se situent plus spontanément dans G2.

La seconde de ces informations concerne la nature de la médiatrice :

	Modalité	Effectif	%
Q8TMA	la médiatrice est une droite	643	73,23
Q8TMB	la médiatrice est considérée comme un segment	67	7,63
Q8TMC	la médiatrice est considérée comme une demi-droite	153	17,43
Q8TMD	interprétation ambiguë	2	0,23
Q8TME	pas de tracé	13	1,48

Les trois quarts des étudiants tracent une droite pour la médiatrice, ce qui n'a rien de surprenant. Il est plus surprenant par contre qu'un peu plus d'un étudiant sur 6 trace une demi-droite. Deux cas de figure correspondent à cette situation :



Cas 1 :

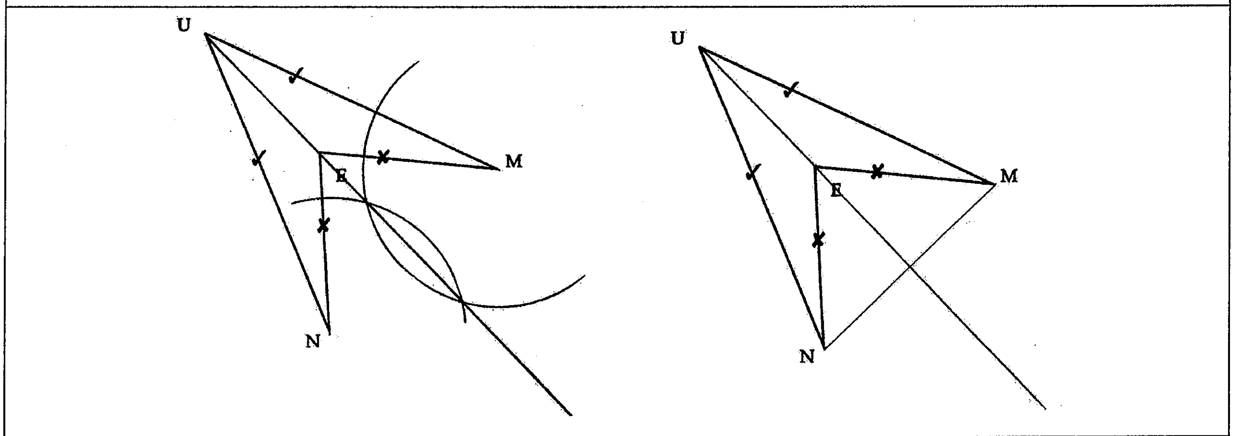
La demi-droite a son origine sur [MN]

L'étudiant a coché angle droit de l'équerre et règle graduée. C'est donc la procédure « milieu et angle droit » qui a été utilisée. **L'utilisation de l'équerre incite à arrêter le tracé sur [MN].**

Cas 2 :

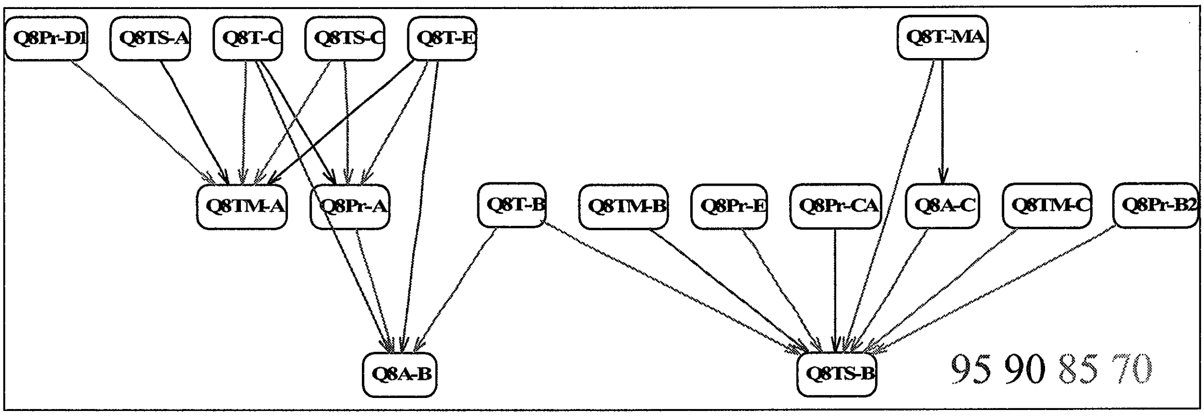
La demi-droite a son origine en U .

Ici, les procédures sont variées, et on peut penser que c'est seulement **le manque de place qui fait arrêter le tracé au point U**.



3.7.2. Graphe implicatif

Un graphe implicatif est effectué avec toutes les variables de la question 8.



Les modalités Q8TM-A[126] (« la médiatrice est une droite ») et Q8TSB (« le segment [MN] est tracé ») y jouent un rôle essentiel : presque toutes les autres modalités sont liées à l'une de ces deux-là, constituant ainsi deux groupes. Dans le premier, on trouve des modalités plutôt expertes : procédure directe pour l'item 8 (Q8PFA), ou « deux intersections d'arcs de cercles » (Q8PFD1), pas de tracé de [MN] (Q8TSC) ou tracé d'une droite (MN) (Q8TSA) (mais pas d'un segment), commentaires d'équidistance, commentaires adéquats. Cette expertise est confirmée par les variables qui contribuent le plus à ces chemins : licence S par

[126] Le risque de confusion entre TM-A et T-MA nécessite de mettre le tiret. Pour les autres modalités, comme il n'y a pas de risque de confusion, je ne le mettrai pas, dans le but d'alléger les notations, comme je l'ai fait depuis le début.

exemple contribue le plus aux chemins Q8TSC→Q8TM-A, Q8TSC→Q8PFA, Q8TE→Q8PFA→Q8AB, avec des risques respectifs de 2.10^{-5}, 1.10^{-6} et 1.10^{-5}.
Dans l'autre groupe, les liaisons sont quasiment toutes uniquement dirigées vers Q8TSB. Les modalités concernées sont moins expertes : la médiatrice est tracée comme un segment (Q8TM-B) ou comme une demi-droite (Q8TM-C), les procédures sont « milieu et angle droit » (Q8PFE), « une intersection d'arcs de cercles et angle droit » (Q8PFCA) ou encore « E ou U et angle droit », les commentaires « milieu et angle droit ». cette moindre expertise est également confirmée par les variables qui contribuent le plus à ces chemins : bac L par exemple contribue le plus aux chemins Q8TMB→Q8TSB et Q8PFA→Q8TSB avec des risques respectifs de 0,1 et 0,02 et bac E au chemin Q8T-MA→Q8AC avec un risque de 0,07. Seul, à nouveau, le commentaire « référence au triangle isocèle » est lié aux deux groupes. Mais on peut penser que ces deux liens ne sont pas liés aux mêmes individus. En effet, la variable qui contribue le plus au chemin Q8TB→Q8TSB est licence SH avec un risque de 0,08, et la variable la plus typique à ce chemin est bac L avec un risque de 0,09 ; tandis que la variable qui contribue le plus au chemin Q8TB→Q8AB est licence S avec un risque de 0,1 et la plus typique à ce chemin est bac S avec un risque de 10^{-8}. On peut donc penser que cette modalité est utilisée par deux types de population différents[127].

Après cette analyse des tracés de médiatrice, intéressons-nous aux deux items portant sur la construction de quadrilatères particuliers, le losange et le parallélogramme.

[127] Ce n'était pas le cas dans l'analyse effectuée au paragraphe 3.4, où l'on avait alors la variable la plus typique au chemin Q8T-B-Q5C-C est LP avec un risque de : 0.0323 et la plus typique au chemin Q8T-B-Q8A-B est BS avec un risque de : 1.37e-008, ce qui ne signifie pas qu'il s'agisse d'étudiants différents, la licence pluridisciplinaire étant fréquemment une licence pluridisciplinaire scientifique, et donc effectuée par des étudiants ayant un baccalauréat scientifique. Les variables qui contribuaient le plus étaient elles incompatibles (licence SH et licence S) mais avec des risques nettement plus élevés, de l'ordre de 0,1.

4. Items de construction de quadrilatères

4.1. Item 6 : le losange

L'item 6 demande d'une part de tracer un losange, d'autre part de donner une définition du losange. Deux types de papier ont été proposés aux étudiants pour cet item : papier uni et papier quadrillé. La population est donc séparée en deux sous-groupes pour cette partie. 1,25 % des étudiants (soit 11 sur 878) n'ont rien tracé ou ont commencé mais n'ont pas terminé, ne dessinant pas un polygone ; ces étudiants sont exclut de l'étude qui suit.
Quel que soit le papier, les étudiants ont le plus souvent tracé un losange non carré, comme le montrent les tableaux suivants :

Papier uni

Modalité	Effectif	%
A polygone non losange	21	5,90
B losange non carré	327	91,85
C carré	8	2,25
total	356	100

Papier quadrillé

Modalité	Effectif	%
A polygone non losange	38	7,44
B losange non carré	443	86,69
C carré	30	5,87
total	511	100

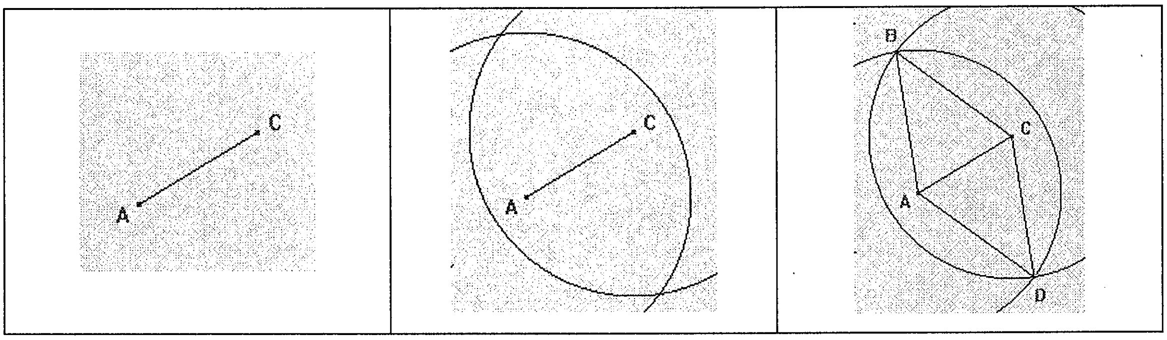
4.1.1. Etude pour le papier uni

Etudions la sous-population qui a travaillé sur papier uni.
Les tris à plat effectués permettent, en réponse à hr 16, de formuler :
r 16.1 : sur papier uni, 75 % des PE1 « posent le losange sur la pointe ».
Des précisions peuvent même être apportées : 13 % le posent avec la petite diagonale verticale, 62 % avec la grande diagonale verticale. C'est la position prototypique bien connue du losange.
En ce qui concerne les procédures sur papier uni, le tracé initial et les instruments doivent nous permettre de les déterminer. Le tableau suivant donne des pourcentages de la population totale ayant travaillé sur papier uni, croisant le tracé initial -côté ou diagonale- avec les instruments utilisés :

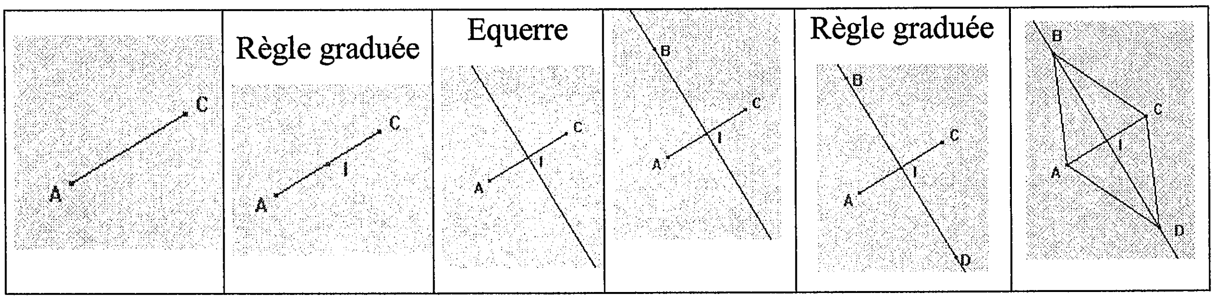
Tracé initial à partir	Q6Ir - Aut	Q6Ir - B	Q6Ir - BD	Q6Ir - BE	Q6Ir - D	Q6Ir - R	Total
Q61T – A : d'une diagonale	6,18	0,84	P3 6,46	P2 12,92	P1 45,79	1,97	74,16
Q61T – B : d'un côté	3,09	1,12	3,93	P5 5,90	P4 8,15	0,56	22,75
Q61T – C : pas de tracé	0,56	0,28	0,00	1,97	0,00	0,28	3,09
Total	9,83	2,25	10,39	20,79	53,93	2,81	100,00

Cinq procédures (P1 à P5) sont ainsi mises en évidence, trois commençant par le tracé d'une diagonale, deux commençant par celui d'un côté. Détaillons tout d'abord celles qui commencent par une diagonale, par ordre décroissant d'effectif. Elles regroupent les trois quarts des étudiants travaillant sur papier uni. Elles sont liées aux propriétés de symétrie du losange, les diagonales étant axes de symétrie du losange.

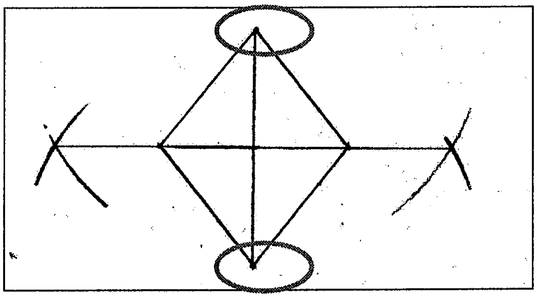
Procédure 1 : Elle utilise uniquement le compas. Elle peut correspondre au tracé de la médiatrice de la première diagonale tracée (cette diagonale étant considérée comme un segment). Le tracé de médiatrice sans contrainte est effectué à l'item précédent, le plus souvent au compas comme nous avons pu le voir, ce qui explique peut-être que près de la moitié des étudiants travaillant sur papier uni aient utilisé cette procédure. Elle est basée sur l'égalité de longueur des quatre côtés du losange.



Procédure 2 : Elle utilise la règle graduée et l'équerre. Il s'agit à nouveau de tracer une médiatrice, mais cette fois à la règle graduée et à l'équerre. Du point de vue de la construction du losange, cela revient à utiliser le fait que les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Elle est utilisée par 13 % des étudiants travaillant sur papier uni.



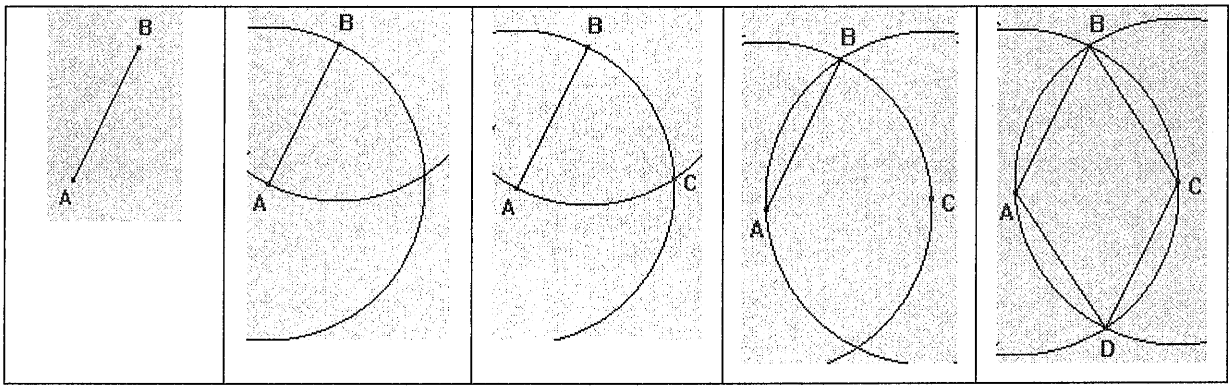
Procédure 3 : Elle utilise la règle graduée et le compas. L'utilisation de la règle graduée est surprenante. La première diagonale est tracée (verticale dans le cas ci-dessous), le compas est utilisé pour tracer la médiatrice de cette diagonale, la règle graduée est ensuite utilisée pour placer deux points à égale distance de l'intersection sur la seconde diagonale. Cette procédure est utilisée par 6,5 % des étudiants travaillant sur papier uni.



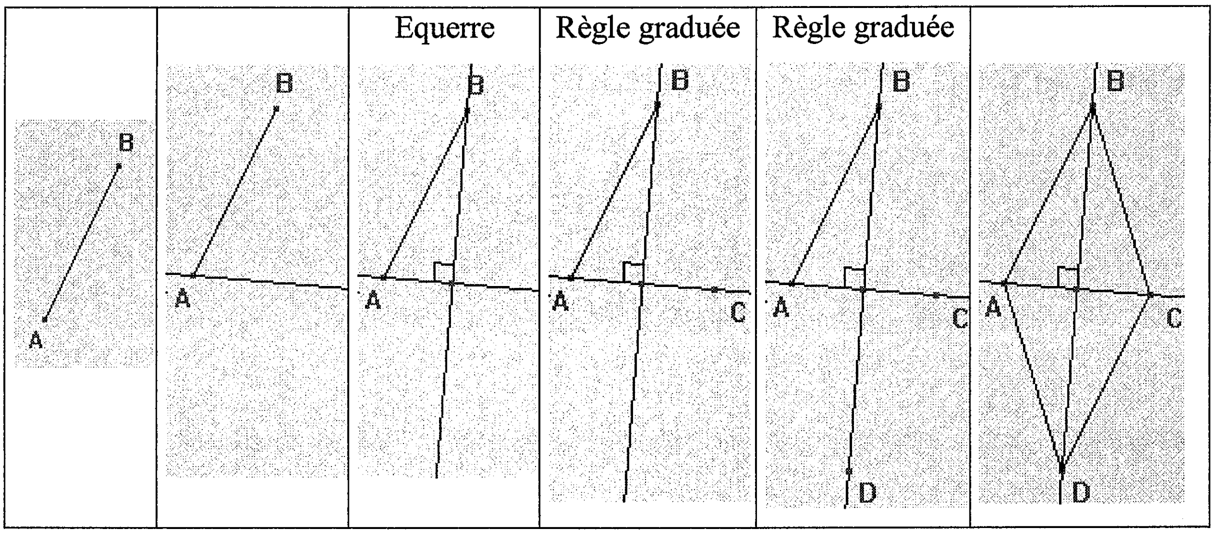
dans l'exemple proposé ci-dessus, on peut penser que deux nouveaux points sont déterminés à la règle graduée (alors que le compas en a déjà déterminé deux), pour éviter d'obtenir un losange « couché », la position « debout » étant souvent privilégiée.

Analysons maintenant les deux procédures le plus souvent utilisées par ceux qui commencent par tracer un côté.

Procédure 4 : Cette procédure est liée à la définition « classique » du losange comme quadrilatère ayant quatre côtés de même longueur. Elle utilise uniquement le compas. Elle est basée sur la construction de deux triangles équilatéraux, donc sur l'égalité des longueurs des côtés. Elle est utilisée par 8 % des étudiants travaillant sur papier uni. Elle produit des losanges tous semblables. C'est la deuxième caractéristique prototypique des losanges : le rapport les longueurs des diagonales ($\sqrt{3}$) est fixé par les propriétés des triangles équilatéraux ; le triangle n'est ni trop aplati, ni trop proche du carré. Cette construction correspond dans le tracé de la médiatrice sans contrainte à ceux qui utilisent la longueur MN comme rayon des cercles.



<u>Procédure 5</u> : Elle utilise à nouveau la règle graduée et l'équerre. Elle est basée sur le fait que les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Elle est utilisée par 6 % des étudiants travaillant sur papier uni.



La question de la définition n'était pas posée, comme pour les médiatrices, directement en lien avec le tracé. Il ne s'agissait pas de donner les propriétés utilisées pour le tracé, mais simplement de « donner une définition du losange ». Un lien entre le tracé effectué et la définition donnée aurait néanmoins pu apparaître. Une colonne supplémentaire est donc ajoutée au fichier de données, codant la procédure utilisée : 1, 2, 3, 4 et 5 pour les cinq procédures décrites ci-dessus, « Autre » pour toutes les autres productions. Un test du Khi2 sur le tableau croisé des procédures et des définitions conclut cependant que « la dépendance entre les lignes et les colonnes n'est pas significative ». Nous reviendrons plus loin sur les définitions proposées.

4.1.2. Etude pour le papier quadrillé

Etudions maintenant la sous-population qui a travaillé sur papier quadrillé.

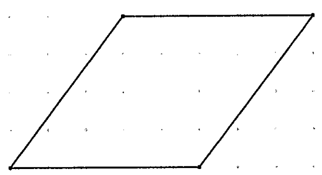
Pour analyser les procédures, nous pouvons cette fois utiliser les instruments seuls : 76 % des étudiants travaillant sur papier quadrillé n'ont pas utilisé d'instrument (à l'exclusion de la règle non graduée, toujours non codée). Ces étudiants ont donc probablement utilisé une procédure spécifique du papier quadrillé. Par ailleurs, 14 % ont utilisé un compas : ils ont dû utiliser une procédure de type « papier uni ». La confirmation de ces deux hypothèses est donnée par le tri croisé entre les instruments et les modalités de la variable Q6.1.S correspondant au papier quadrillé. On obtient en effet le tableau suivant (qui donne des pourcentages de la population totale ayant travaillé sur papier quadrillé) :

	Q6Ir - Aut	Q6Ir - B	Q6Ir - BD	Q6Ir - BE	Q6Ir - D	Q6Ir - R	Total
Q61S – B : utilisation spécifique du papier quadrillé	2,94	2,94	0,00	1,96	0,39	75,54	83,76
Q61S – C : utilisation d'une procédure « papier uni »	0,59	0,00	0,98	0,78	13,50	0,39	16,24
Total	3,52	2,94	0,98	2,74	13,89	75,93	100,00

75,5 % de cette population trace un losange seulement avec la règle non graduée, utilisant une procédure spécifique du papier quadrillé, tandis que 13,5 % utilise une procédure « papier uni » avec le compas.

Du point de vue de la position de ce losange, il n'y a ici plus que 6 % de cette population qui ne pose pas le losange sur la pointe : l'influence du quadrillage est évidente ; sauf à utiliser une procédure « papier uni », il est en effet difficile de ne pas poser le losange sur la pointe sur papier quadrillé[128] ; or nous venons de montrer qu'ils sont nombreux à utiliser une procédure spécifique du papier quadrillé. En réponse à hr 16, on peut cette fois formuler :

128 Même si c'est théoriquement possible, en utilisant la configuration du triangle rectangle de côtés 3, 4 et 5, comme le montre le dessin ci-contre.



r 16.2 : sur papier quadrillé, 94 % des PE1 placent le losange sur la pointe.

66 % posent le losange avec sa grande diagonale verticale, ce qui est proche de la situation sur papier uni, mais 28 % sur l'autre diagonale, ce qui est beaucoup plus que dans la situation précédente. On peut penser que les dimensions de l'espace quadrillé prévu pour la construction, constitué d'un rectangle de 10 carreaux de haut sur 19 carreaux de large (carreaux de 9 x 9 mm), et donc presque deux fois plus large que haut, a une influence sur cette position.

46 % des étudiants travaillant sur papier quadrillé commencent par un côté, tandis que 48 % commencent par une diagonale. Mais il est bien difficile d'en déduire que les premiers utilisent plutôt une procédure basée sur l'égalité de longueur des côtés tandis que les seconds utilisent une procédure basée sur des diagonales perpendiculaires et se coupant en leur milieu : rien ne nous permet de vérifier cette hypothèse. Ce début du tracé n'est pas lié non plus à la définition qu'ils donnent ensuite du losange : les test du Khi2 entre cette variable indiquant le début du tracé et celle de la définition montre que la dépendance n'est, là non plus, pas significative.

4.1.3. Etude de la définition

Sur les deux sous-populations, il n'y a pas de lien entre la procédure de tracé utilisée et la définition donnée. Certes, la formulation des questions ne demandait pas de faire un tel lien mais ceci conforte l'idée que les PE1 disposent d'une part de techniques de tracés, d'autre part de définitions et propriétés, mais qu'il n'y a pas de lien immédiat entre les deux.

En ce qui concerne la définition formulée, voici le tableau de tri à plat sur l'ensemble de la population :

Modalité	Effectifs	%
A quadrilatère ayant quatre côtés isométriques	40	4,56
B parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires	149	16,97
C autre définition correcte du losange	22	2,51
D définition redondante	412	46,92
E définition fausse	244	27,79
F non-réponse	11	1,25

Ce tableau permet tout d'abord de formuler, en réponse à hr 18 :

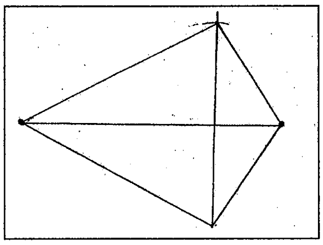
r 18 : près de la moitié des PE1 proposent une définition du losange redondante.

On peut lire par exemple :

un losange est un parallélogrammequi a ses 4 cotés égaux et parallèles 2 à 2. Ses diagonales forment un angle droit.

Les étudiants semblent ainsi donner toutes les propriétés qu'ils connaissent sur le losange, ils ne cherchent absolument pas à limiter le nombre de propriétés, c'est-à-dire à donner une définition « minimale », au sens défini au chapitre précédent (cf. chapitre 4, § 3.7.2, pages 198 et suivantes)

Par ailleurs, le taux de dessins ne correspondant pas à un losange sur l'ensemble de la population est faible : 87,7 % de la population totale dessine un losange non carré. Néanmoins, 28 % des étudiants donnent une définition fausse. L'écart entre les deux est important et peut être explicité. Trois cas se présentent.



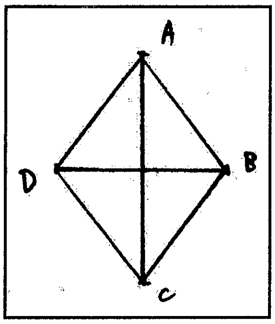
Cas 1

La représentation que l'étudiant se fait du losange n'est pas correcte, il y a confusion avec un autre objet géométrique, le plus souvent le parallélogramme ou le rhomboïde[129], comme c'est le cas dans cet exemple[130] qui correspond à une définition « partielle » du losange.

Un losangle est un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, et dont 2 côtés consécutifs sont égaux.

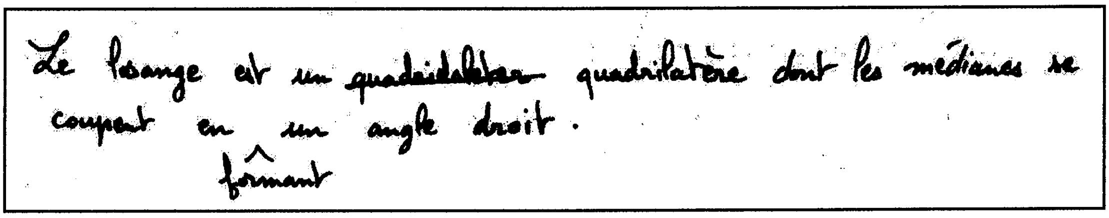
[129] Le rhomboïde est défini dans [Bouvier & al., 1993, p. 737] par : *« quadrilatère orthodiagonal symétrique par rapport à une de ses diagonales »*, ce qui correspond au dessin proposé ici. Je ne retiendrai pas la définition donnée par Euclide dans le premier livre de ses Eléments : *« parmi les figures quadrilatères est ...un rhomboïde celle qui a les côtés et les angles opposés égaux les uns aux autres mais qui n'est ni équilatérale ni rectangle ... » ([Euclide, 1990*,p.164], ce qui correspond dans le langage moderne à un parallélogramme. On notera que ce mot rhomboïde est remplacé dans les instructions officielles de mathématiques de cycle 3 par l'expression « cerf-volant » [Appl. Maths C3. 2002, p. 32] pour désigner l'objet ici représenté.

[130] Pour chacun des trois cas, le tracé et la définition sont bien sûr proposés par le même étudiant.



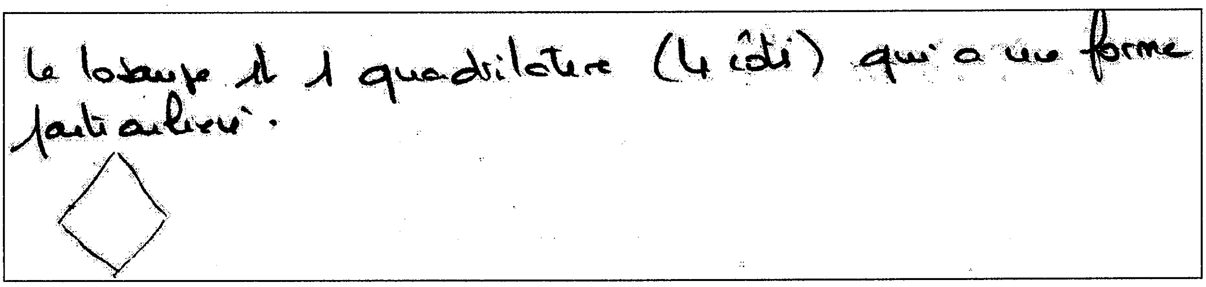
Cas 2

Le dessin est correct. La représentation que se fait l'étudiant du losange est correcte, mais la formulation de la définition ne l'est pas : l'étudiant ne maîtrise pas le langage géométrique. On peut par exemple lire :

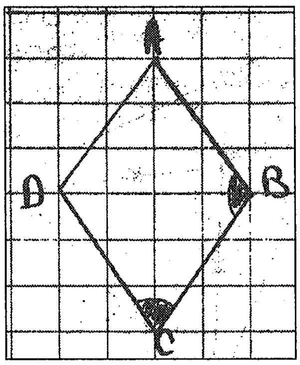


où le mot « médiane » est utilisé à la place de « diagonale » d'une part et où la définition, telle la précédente, est incomplète. Mais il y a de nombreuses autres formulations également incorrectes.

Cette difficulté de langage est parfois très importante :



Ainsi, certains étudiants sont capables de tracer un losange, mais pas d'en formuler une définition : leurs compétences dans le registre discursif géométrique ne correspondent pas à leurs compétences dans le registre graphique.



Cas 3

Le dessin est correct mais la définition proposée est de type exclusif : elle exclut le carré de la catégorie des losanges, affirmant ainsi que « le losange n'est pas carré ». Ce type de définition, nous l'avons vu au chapitre 2 (cf. § 1.7, pages 93 et suivantes) se rattache au paradigme G1.

Le losange est un quadrilatère dont les côtés opposés
sont parallèles et dont les quatres côtés ont la même mesure.
Ses diagonales se coupent en leur milieu et ~~sont~~ perpendicu
laire : par contre, contrairement au carré, ses diagonales
n'ont pas la même mesure.

Ce type de production avait été repéré par le codage, qui permet ainsi d'affirmer, en réponse à hr 17 :

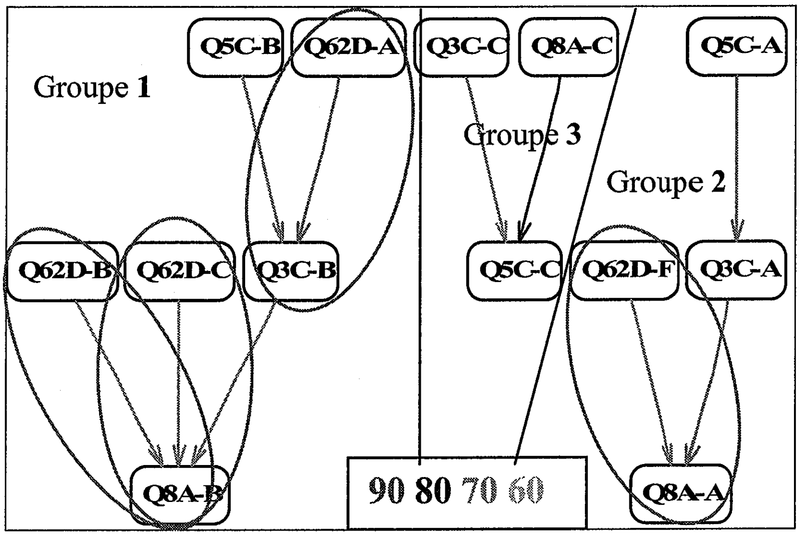
r 17 : 9 % des PE1 considèrent que le carré n'est pas un losange.

Par ailleurs, si l'on s'intéresse aux définitions correctes, on constate que la définition à partir des diagonales apparaît quatre fois plus souvent que celle à partir des côtés isométriques, alors que sur papier uni, on a montré que la procédure avec le compas basée sur les côtés isométriques est quatre fois plus fréquente que la procédure avec l'équerre et la règle graduée basée sur les diagonales ! Ceci conforte encore une fois l'hypothèse de l'absence de lien entre les procédures de tracé et les définitions et propriétés.

Cette étude autour des tracés de losange d'une part, et de définitions de losange d'autre part, permet de confirmer notre hypothèse hr 15 et d'affirmer :

r 15.2 : au sujet du losange, certains PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux.

Une question se pose alors : s'agit-il des mêmes étudiants qui disposent ainsi d'une part de techniques de tracé et d'autre part de définitions et propriétés, sans effectuer de lien entre les deux, dans les situations de médiatrice et dans celle du losange. Pour y répondre, un graphe implicatif (toujours avec l'analyse entropique et la loi de Poisson, puisque l'on travaille sur le fichier des 878 étudiants) est effectué :



Trois groupes apparaissent très clairement :

- le groupe 1 des commentaires adéquats pour les médiatrices (Q5CB → Q3CB → Q8AB) et des définitions exactes pour le losange (Q62DA, Q62DB, Q62DC) qui montre notamment que quand on donne une définition correcte du losange, on est capable d'expliciter la propriété de la médiatrice utilisée dans le tracé de l'item 8. Il s'agit là du groupe des commentaires « experts »
- le groupe 2 des non réponses, pour les médiatrices comme pour le losange.
- le groupe 3 des commentaires non adéquats pour les médiatrices mais dans lequel n'apparaît pas de modalité relative au losange : ne pas être capable de justifier de la construction de la médiatrice dans un des items 3, 5 ou 8 n'implique pas de donner une définition incorrecte du losange, et réciproquement. Ces modalités, que nous pouvons qualifier « d'échec », ne sont pas liées.

Ainsi, d'une part certains liens apparaissent, mais avec un indice qui n'est pas très élevé, d'autre part les modalités d'échec ne sont pas liées. Ainsi, il est difficile de conclure à un lien très fort entre la compétence de justification de propriétés liées à une construction de médiatrice et celle de formulation d'une définition de losange. Cela peut s'expliquer par le fait que dans le cas du losange, il s'agit de tester une connaissance (la définition du losange), tandis que pour les médiatrices, il s'agit d'évaluer une compétence (être capable de faire le lien entre une procédure de tracé et une définition). Il est donc difficile de comparer les deux, d'autant plus que le sujet (losange ou médiatrice) n'est pas le même.

4.2. Item 9 : tracer un parallélogramme

Le dernier item du test 1 ne demandait pas de commentaire, mais simplement le tracé d'un parallélogramme, deux côtés consécutifs étant déjà tracés. Le tri à plat donne le tableau suivant :

Modalité	Effectif	%
Q9PA côtés opposés de même longueur	632	71,98
Q9PB côtés opposés parallèles	136	15,49
Q9PC deux côtés parallèles et isométriques	29	3,30
Q9PD diagonales se coupant en leur milieu	27	3,08
Q9PE autres procédures	28	3,19
Q9PF non réponse	26	2,96

Une procédure de construction apparaît massivement employée : 72 % des étudiants utilisent la procédure basée sur l'égalité de longueur des côtés opposés, qui est une construction classique, tandis que 15,5 % utilisent le parallélisme des côtés.
Ces informations sont confirmées par les instruments utilisés : 72,5 % des étudiants utilisent le compas seul (donc pour la première procédure) tandis que 12,5 % des étudiants utilisent l'équerre et la règle non graduée (donc pour la seconde).
La procédure basée sur les diagonales est ainsi très peu utilisée, alors que les propriétés des diagonales étaient très souvent citées dans la définition du losange. En formation, mes PE1 savent souvent donner une définition du parallélogramme à partir des diagonales. Ainsi, encore une fois, on voit se confirmer le fait que les PE1 disposent d'une part de techniques de construction automatisées, d'autre part de définitions et de propriétés, mais qu'ils n'utilisent pas ces définitions et propriétés pour mettre en place des procédures de construction dans des situations connues.
Par ailleurs, à peine 3 % des étudiants n'ont pas effectué le tracé du parallélogramme. Ce peut être parce qu'ils ne savent pas ce qu'est un parallélogramme, ou ils ne savent pas le construire, ou ils n'ont pas eu le temps, cet item étant le dernier. Mais de toutes façons, ils sont très peu nombreux. Ainsi, on peut affirmer que quasiment tous les PE1 savent tracer un parallélogramme.

De la même manière, on a pu constater que la majorité des constructions demandées a été correctement effectuée. C'est toujours au niveau des commentaires que les problèmes sont apparus. Ainsi, les compétences de construction des PE1 dans G1 sont relativement satisfaisantes. C'est bien sûr dans G2 que les difficultés apparaissent pour bon nombre d'entre eux, mais ce n'est pas une surprise !

5. Synthèse

L'analyse qui vient d'être effectuée a permis de répondre à presque toutes les hypothèses de recherche proposées dans le chapitre précédent. Les « réponses » sont rassemblées en annexe 15. Une seule hypothèse n'a pas pu être confirmée ou infirmée : l'expérience d'enseignement concernait trop peu d'étudiants et n'a pas pu être prise en compte ni par conséquent mise en lien avec les autres éléments de l'étude ; tandis qu'une seule a été infirmée : les PE1 maîtrisent en fait le codage de l'angle droit et des côtés de même longueur.

Nous avons en outre pu mettre en évidence des éléments qui incitent à travailler plutôt dans G1 ou dans G2 :

- le contrat didactique (item 2 : il « faut » répondre)
- la règle d'exhaustivité (item 4 : « il faut dire tout ce que l'on sait »)
- la nature du dessin proposé (item « carré ABCD : figure « bâtarde » → G1 ou G2, dessin à main levée → G2)
- les compétences et connaissances disponibles voire mobilisables (item « Carré et Thalès », ou items médiatrices)

Ce sera un des objectifs de l'ingénierie proposée au chapitre 7 que d'expliciter un nouveau contrat didactique et d'aider les étudiants à remettre à niveau leurs connaissances et compétences nécessaires pour que soit disponible tout ce qui doit l'être pour un futur professeur des écoles.

Nous pouvons également maintenant préciser un des pseudo-paradigmes dans lequel les étudiants travaillent. Il s'agit d'un pseudo-paradigme dans lequel les objets sont physiques, et qui fait fonctionner simultanément des validations de type perceptif et de type hypothético-déductif. Un cas particulier fréquemment rencontré consiste à prélever perceptivement des informations sur le dessin (G1) puis à appliquer des technologies de G2, que ce soit sous forme de déduction et/ou de procédure de construction. La particularité de ces pseudo-paradigmes est qu'ils sont personnels mais aussi locaux : ils dépendent certes de chaque étudiant, mais aussi de la situation dans laquelle se situe l'étudiant.

Ces affirmations confirment l'hypothèse générale de recherche HR1 :

> **HR1** : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : objets de la géométrie (G1) ou représentants d'un objet géométrique théorique (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.

En fait, la plupart des PE1 n'ont tout simplement pas conscience de l'existence de différents paradigmes géométriques. Ce sera un des objectifs de l'ingénierie proposée au chapitre 7 que d'aider les étudiants à prendre conscience de cette existence.

Si les items de reconnaissance de figure ont mis en évidence le caractère local des pseudo-paradigmes, les items sur la médiatrice ont en revanche permis de mettre en évidence des liens entre certains comportements. Nous avons pu repérer le degré d'adaptabilité ou d'expertise des procédures. L'analyse des commentaires effectués a permis de mettre en évidence que beaucoup d'étudiants disposent d'une part de techniques de tracé, dans G1, et d'autre part de connaissances dans G2, mais n'effectuent pas de lien entre les deux. Ce sera un des autres objectifs de l'ingénierie proposée au chapitre 7 que d'aider les étudiants à effectuer ces liens.

Mais avant cela, je vais exploiter un autre environnement, l'environnement informatique matérialisé par Cabri-géomètre, pour affiner quelques-uns des résultats qui viennent d'être obtenus.

Chapitre 6

Chapitre 6 : Expérimentation sous Cabri-géomètre II

Le travail précédent sur le test initial est basé sur un effectif important et nous a permis d'obtenir des résultats quantitatifs, d'une part sur le positionnement des PE1 par rapport à G1/G2, d'autre part sur certaines de leurs connaissances et compétences en géométrie plane. Les tests ultérieurs ont donné la possibilité de préciser les résultats du test initial. Il s'agit maintenant d'utiliser un autre support et, au-delà du support matériel, un autre milieu[131], Cabri-géomètre II, pour éclairer d'un regard différent les résultats précédents et les affiner. Il n'est pas question ici de formation des étudiants, mais d'état des lieux en début de formation. Autrement dit, Cabri-géomètre n'est pas utilisé ici en vue de faire évoluer le positionnement des étudiants dans G1 ou G2, mais comme outil pour observer d'une autre manière leurs productions et leur relation aux objets géométriques.
Cabri-géomètre et les paradigmes G1I et G2I ont été présentés au chapitre 2 à partir des travaux de Colette Laborde et de Jean-Jacques Dahan. Dans ce chapitre, je décrirai tout d'abord l'organisation de l'expérimentation ; dans la deuxième partie, je présenterai l'adaptation du test précédent à l'environnement Cabri et les résultats obtenus. Dans les troisième et quatrième parties, j'étudierai une nouvelle situation proposée aux étudiants, situation de résolution de problème qui permettra d'analyser dans quel paradigme les étudiants se situent.

L'analyse des tests papier a permis de mettre en évidence d'une part que le positionnement d'un étudiant dans G1 ou G2 dans une situation donnée était peu lié à ce même positionnement dans une autre situation et, d'autre part, que dans certains cas, les étudiants avaient bien conscience que l'on attendait d'eux autre chose que se situer dans G1, mais n'avaient pas les connaissances et compétences suffisantes pour se situer dans G2, soit qu'elles n'étaient pas mobilisables, soit qu'elles n'étaient pas disponibles. Les Cabri-vérifications sont une alternative à la seule perception (G1) ou à la démonstration (G2). Il est

[131] Le terme de milieu est utilisé au sens de Brousseau, tel qu'il le définit dans son glossaire :

> *« le milieu est le système antagoniste de l'actant. dans une situation d'action, on appelle « milieu » tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit.*
>
> *...*
>
> *Le milieu d'un concept mathématique est l'agrégat des milieux des situations où les connaissances liées à ce concept apparaissent comme moyen de résolution. Exemple : la feuille de papier, la règle graduée et le compas engendrent le milieu de la géométrie plane euclidienne. » [Brousseau. 2002]*

donc intéressant d'étudier dans quelle mesure les types de validation perceptif, caractéristique de G1, ou hypothético-déductif, caractéristique de G2, résistent ou au contraire vont être supplantés par ce nouveau type de validation, selon les différentes situations proposées, autrement dit quelle place va prendre G2I par rapport à G2 et à G1I, celui-ci remplaçant G1 dès lors que Cabri est utilisé.

1. Organisation de l'expérimentation Cabri

1.1. Le public concerné : des volontaires, pas les meilleurs !

L'expérimentation avec Cabri a eu lieu avec des étudiants PE1 volontaires[132] du CFP d'Avrillé, durant l'année 2000-2001. La proposition que je leur ai faite est la suivante : « Je vous initie à un logiciel de géométrie dynamique et vous propose quelques exercices, pendant quatre séances d'une heure et demie, le soir après les cours. Cela vous intéresse du point de vue de la formation professionnelle : vous pourrez dans un avenir proche disposer de ce type de logiciel pour l'utiliser en classe avec des élèves de cycle 3. Vous aurez aussi l'occasion de faire autrement des exercices de géométrie, ce qui ne peut qu'être bénéfique dans le cadre de la préparation au concours. De mon côté, j'enregistrerai vos travaux, qui me serviront dans le cadre de ma thèse. Vous pouvez librement être ou non volontaires, mais ceux qui acceptent s'engagent à être présents aux quatre séances ». Les étudiants sont sensibles à l'aspect formation professionnelle : le choix du CFP est très clairement celui d'une formation professionnelle sur deux années, la première n'étant donc pas uniquement tournée vers le concours[133]. Par ailleurs, les difficultés de certains en mathématiques, et tout particulièrement en géométrie, les rendent prêts à s'investir en plus du temps prévu dans l'emploi du temps pour renforcer leurs connaissances et compétences dans ce domaine. A cette annonce, presque tous les étudiants étaient donc volontaires, mais concrètement, quand il s'est agi de s'inscrire,

[132] Les programmes de l'école alors en vigueur ne justifiaient pas une modification du plan de formation pour y insérer une initiation à Cabri, d'autant que le volume horaire total de mathématiques en première année était limité (environ 70 heures annuelles). De toutes façons, les contraintes matérielles, en temps et en matériel, ne permettaient pas d'envisager à ce moment-là une formation pour les 120 étudiants de première année.

[133] L'effectif des étudiants en première année, très proche du nombre de postes au concours, et le très faible, voire nul, nombre de candidats extérieurs, permet à cette époque-là de maintenir ce choix malgré la présence du concours en fin de première année.

l'engagement fut beaucoup moins net ! Finalement, quatre groupes ont fonctionné, avec les effectifs suivants :

Groupe	Effectif
A	8
B	4
C	4 puis 3 puis 2
D	10

Ce faible effectif total ne permet donc pas de faire une étude statistique, mais seulement des « études de cas ».
Des étudiants de niveaux très variés sont concernés, mais avec néanmoins une majorité d'étudiants peu à l'aise avec les mathématiques, qui espèrent une aide supplémentaire par rapport à leurs difficultés en géométrie, dans le cadre de la préparation au concours.

1.2. Le planning

Quatre séances sont prévues. Les deux premières consistent en une initiation à Cabri. Il s'agit de permettre aux étudiants d'être autonomes dans leur utilisation du logiciel.

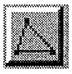
La troisième séance commence par le test sous Cabri. Il s'agit du questionnaire papier que nous avons précédemment analysé qui est ici adapté pour être traité sous Cabri. Cette partie occupe la moitié de la séance. Un bilan sur la médiatrice est alors effectué, sur les différentes définitions possibles, en lien avec les divers modes de tracé. Quelques exercices complémentaires d'appropriation de Cabri sont alors proposés, directement en lien avec les connaissances exigibles d'un PE1 : triangle inscrit dans un cercle, angle inscrit et angle au centre par exemple. L'objectif est ici de satisfaire une part du contrat, en leur faisant travailler, à l'aide de Cabri, des théorèmes par ailleurs étudiés en cours en vue de la préparation au concours.

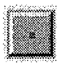
La « situation PARC », qui sera étudiée en détail plus loin, est l'objet de la quatrième séance. Dans le premier groupe, les étudiants travailleront constamment seuls. A la fin de la séance, une seule étudiante ayant réussi à démontrer la solution, les 7 autres étudiants viendront auprès d'elle, soucieux d'avoir la réponse au problème qu'ils n'ont pas su résoudre. Dans les autres groupes, deux phases seront systématiquement mises en place, une première (1/2 h) individuelle, puis une seconde (3/4 h) par groupes de 3 ou 4, où la consigne est de produire une réponse commune à la question traitée auparavant individuellement. Ce fut l'occasion d'un travail de groupe parfois extrêmement riche.

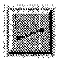
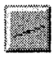
1.3. Les deux séances d'initiation à Cabri

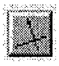
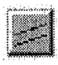
Les commandes suivantes seront explorées durant les 2 séances d'initiation[134] :

Aide (F1)

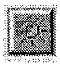
 tracer un triangle

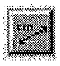
 placer un point

 tracer un segment,  tracer une droite

 tracer une droite perpendiculaire à une autre,  parallèle à une autre

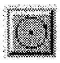
 utiliser le curseur pour sélectionner et déplacer les objets

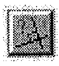
 cacher, montrer

 mesurer un segment

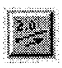
 mesurer un angle

 marquer un angle

 tracer un cercle

 interroger sur le parallélisme de deux droites,  ou sur la perpendicularité

utiliser un nombre

 effectuer un report de mesure

Une des caractéristiques des logiciels de géométrie dynamique, Cabri en particulier, est la possibilité de manipuler directement le dessin. L'accent est donc mis, dans les premiers exercices, sur la possibilité de bouger ou non les éléments. Pourquoi tel point peut-il être

---

[134] Le lecteur trouvera en annexe 20 le document distribué aux étudiants pour leur permettre d'effectuer la découverte de Cabri.

bougé et pas tel autre ? Il s'agit de faire prendre conscience aux PE1 du fait que certains points ont plus de degrés de liberté que d'autres, voire pas du tout, selon l'ordre dans lequel ils ont été construits, de leur dépendance les uns par rapport aux autres. Cela m'est apparu nécessaire pour pouvoir ensuite bouger les dessins, le contrat sous Cabri étant, rappelons-le, de bouger les éléments d'un dessin géométrique pour vérifier que celui-ci conserve ses propriétés géométriques, c'est-à-dire qu'il est « Cabri-résistant ».
Une question est ainsi souvent posée dans les énoncés d'exercices de ces deux séances : que se passe-t-il quand on bouge tel point ? Cette répétition aura une incidence dans la suite, les étudiants ayant comme réflexe de faire bouger les points et de repérer ce qui bouge et ce qui ne bouge pas, et en fonction de quoi. Mais le pourquoi se résumera en général à « parce qu'il dépend de tel point, de telle construction », sans référence aux propriétés géométriques des objets construits.

Par ailleurs, l'outil médiatrice n'est jamais mis en évidence dans ces séances d'initiation, pour éviter de trop influencer les deux séances suivantes qui vont beaucoup l'utiliser. Il n'est pas non plus supprimé des menus pendant la phase d'initiation. Les étudiants sont en effet invités à « se promener dans les barres de menus », et à tester eux-mêmes les différentes icônes, en ayant recours à l'aide. Ils n'utilisent cependant pas beaucoup cette possibilité, préférant pour la plupart suivre pas à pas le document proposé. Celui-ci est assez détaillé et directif, afin que les étudiants puissent travailler seuls sans avoir trop souvent besoin de mon intervention. De ce fait, peu d'étudiants exploiteront d'autres outils que ceux imposés.

2. Le test sous Cabri

2.1. Présentation du test et analyse a priori

La troisième séance est, comme nous l'avons signalé, l'objet du test dans l'environnement Cabri. Il s'agit d'une version adaptée à Cabri du test papier que nous avons étudié aux chapitres précédents. Le lecteur trouvera en annexe 21 le document papier distribué aux étudiants ainsi que les feuilles de travail Cabri s'ouvrant pour chacun des exercices proposés. Une disquette avec différents fichiers, correspondant à chacun des items du test, est en effet fournie à chaque étudiant en même temps qu'un document papier.

Par rapport au test papier initial, les questions de reconnaissance d'objets sont supprimées car elles ne sont pas adaptées à l'environnement Cabri. Il s'agit des items :

- Q2 : l'angle $x\widehat{O}y$ est-il droit ?
- Q4 : Quelle est la nature du triangle ECO ?
- Q7 : Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Deux items de construction ont apporté peu d'informations du point de vue G1/G2 et sont donc supprimés :

- Q6 : Construisez un losange ABCD.
- Q9 : Compléter le dessin du parallélogramme ABCD.

Les trois items sur la médiatrice sont conservés, la médiatrice sans contrainte étant proposée en premier, afin que la première procédure utilisée soit la première qui leur vient à l'esprit. Ces items sont proposés avec un menu dans lequel l'outil médiatrice a été supprimé. Dans l'analyse, je me suis centrée sur deux aspects :

- la procédure utilisée
- l'adéquation entre la procédure utilisée et les propriétés énoncées

Il s'agit bien évidemment d'étudier si les résultats dans l'environnement Cabri sont ou non identiques à ceux obtenus dans l'environnement papier-crayon.
Les procédures attendues sont les procédures utilisées dans la version papier. L'utilisation habituelle du compas en version papier-crayon doit néanmoins être adaptée. La version de Cabri utilisée est en effet une version maintenant ancienne, dans laquelle le compas trace un cercle de centre donné et de rayon défini par un segment ou deux points, mais pas par une longueur. La démarche proposée dans les deux séances d'introduction pour tracer un cercle de centre A et de rayon r utilise alors plutôt le report de mesure :

- Placer un point A
- Editer la valeur n
- Reporter la distance n à partir du point A, dans n'importe quelle direction. On obtient un point (nommons-le B pour faciliter le scénario)
- Tracer le cercle de centre A passant par B.

Le compas n'a pas été présenté.

L'item de la construction d'un triangle de dimensions 13 cm, 8 cm et 5 cm est également conservé avec l'énoncé suivant :

> Construisez sous Cabri un triangle (ABC) tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm.
> Que pouvez-vous dire de (ABC) ? (répondez ici)

Un autre item proche est ajouté, qui consiste cette fois à construire un triangle rectangle :

> Tracer un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm.
> Ce triangle est-il rectangle ?
> Comment faîtes-vous pour répondre à cette question ?
> Répondez ici à ces deux questions.

Cet item sera utilisé dans les tests papier des années suivantes, mais avec les valeurs numériques 7,5 , 6 et 4,5 , faisant ainsi moins directement penser au théorème de Pythagore. Du point de vue des procédures de construction, l'exercice 6 de la première séance d'initiation fait tracer un triangle de côtés 3,5 cm, 4,8 cm et 5,2 cm en utilisant des cercles de rayons fixés construits avec le report de mesure. On peut donc s'attendre à ce que les étudiants réutilisent le même scénario.

Un dernier item, qui ne se trouve pas dans le test initial, mais dans des versions ultérieures, est par ailleurs utilisé. Il s'agit de l'item nommé « Carré et Thalès » :

> ABCD est un carré de côté 5 cm.
> Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3 cm.
> Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) (répondez ici) ?

Le carré de 5 cm de côté est déjà construit et les trois valeurs numériques éditées dans le fichier donné aux étudiants. Il reste à tracer des cercles par report de mesure pour placer les points I et J puis la droite (IJ).

Ces trois items sont proposés pour étudier le type de validation effectué. Trois types de validation sont a priori possibles, comme nous l'avons signalé :

- perceptif, dans G1I : « je ***vois*** les points alignés, le triangle rectangle, les droites parallèles (ou non) »
- basé sur une Cabri-vérification, dans G2I : soit utilisation de l'oracle pour savoir si les points sont alignés, les droites ou segments perpendiculaires ou parallèles, soit mesure ou marquage d'un angle pour savoir s'il est droit, soit encore mesure de distances pour vérifier un milieu

- hypothético-déductif, dans G2 : utilisation de l'égalité $8+5=13$, de la réciproque du théorème de Pythagore, de la contraposée du théorème de Thalès selon le cas

Il est bien sûr envisageable que des étudiants utilisent plusieurs types de validation pour des items distincts, voire pour un même item.

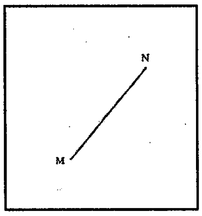
2.2. Analyse des résultats concernant les médiatrices

14 étudiants dans les différents groupes ont finalement effectué ce test. Un groupe ne l'a pas fait parce que le planning des séances a été décalé par rapport aux prévisions et une partie du cours de géométrie plane, notamment celle où les définitions et propriétés de la médiatrice ont été revues avait alors eu lieu, ce qui rendait a priori le test sans intérêt. Le lecteur trouvera le détail des productions de ces 14 étudiants dans l'annexe 22[135].

2.2.1. Procédures et justifications pour tracer une médiatrice avec Cabri

Etudions les procédures utilisées et les commentaires effectués dans chacune des trois situations de construction de médiatrice qui sont proposées. Rappelons qu'il ne s'agit plus d'une analyse statistique, compte tenu des effectifs, mais plutôt d'une étude de cas.

Médiatrice sans contrainte

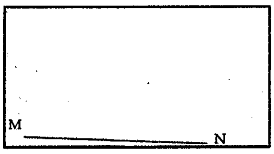


12 étudiants sur 14 utilisent la procédure « milieu et perpendiculaire » pour tracer la médiatrice dans la situation sans contrainte. Ils placent un point au milieu du segment puis la droite perpendiculaire au segment passant par ce milieu. Le langage utilisé par Cabri correspond exactement aux formulations qu'ils utilisent pour citer les propriétés, qui sont ainsi en parfaite adéquation avec la procédure utilisée. La procédure compas « standard » rencontrée précédemment semble comme oubliée. Louis, par contre, place d'abord le milieu du segment, puis trace deux cercles de rayon AB de centres A et B, ainsi qu'un point à l'une des intersections. Enfin, il trace la droite perpendiculaire au segment passant par le milieu. Finalement, c'est la procédure « milieu et perpendiculaire » qui est utilisée ; la procédure avec deux intersections de cercles de rayon

[135] Les prénoms ont été changés ; ils ont été choisis de sorte de respecter le genre de l'étudiant et qu'il n'y ait qu'un(e) étudiant(e) par lettre de l'alphabet.

AB est sous-jacente, mais il n'arrive pas à la mener à son terme. Son commentaire est habituel : « la médiatrice est la droite perpendiculaire au segment passant par son milieu ».
Emma quant à elle utilise la procédure « standard », avec des cercles de rayon 5 cm (la distance AB étant d'environ 7,4 cm) et son commentaire est adéquat, même si elle cite la perpendicularité non utilisée en plus de l'équidistance.

Médiatrice en bas de page

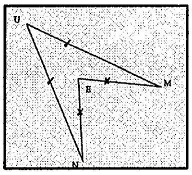


Sur 14 étudiants, 11 utilisent à nouveau la procédure « milieu et perpendiculaire » pour tracer la médiatrice quand le segment est positionné en bas de page. Ils avaient déjà utilisé cette procédure dans la situation sans contrainte. Carole et Gala, alors qu'elles avaient utilisé la fonction « milieu » dans la situation précédente, ont cette fois **mesuré avec Cabri la longueur AB**, puis ont calculé la moitié et ont édité cette moitié pour effectuer un report de mesure. Il s'agit de deux étudiantes plutôt à l'aise en géométrie. Il est ici possible de faire l'hypothèse d'un effet de contrat didactique, qui tient à la fois de « il ne faut pas utiliser deux fois la même méthode » et de « je vais montrer autre chose que je sais faire[136] ».
Une autre de ces 11 étudiants, Dévi, dans cette situation comme dans la précédente, **mesure avec sa règle la longueur AB sur l'écran**, avant de la diviser par deux et d'éditer cette valeur pour utiliser le report de mesure. Elle n'a jamais utilisé la fonction « milieu ». Celle-ci n'apparaît pas dans le document d'initiation et elle n'est manifestement pas allée chercher d'autres outils que ceux qu'elle connaissait. Sa procédure apparaît calquée sur une procédure que l'on peut utiliser dans l'environnement papier-crayon. Il n'y a en effet pas d'outil particulier pour placer un milieu dans l'environnement papier-crayon : la procédure la plus habituelle consiste à mesurer la distance entre les deux points dont on veut le milieu et à diviser cette distance par deux pour placer ce milieu à la règle graduée. Cette étudiante travaille dans un pseudo paradigme qui tient à la fois de G1I et de G1, peut-être par manque de maîtrise de l'environnement Cabri.
Les commentaires de ces onze étudiants sont en adéquation avec la procédure qu'ils ont utilisée, même s'ils sont éventuellement incomplets.
Irène utilise la procédure « une intersection de cercles et perpendiculaire » et justifie correctement sa construction par les propriétés du triangle isocèle ; Emma utilise la procédure

[136] Ceci peut tout à fait être fait dans un esprit de collaboration : les étudiants savent que je vais utiliser leurs productions dans le cadre de ma thèse, que je m'intéresse aux procédures qu'ils utilisent. Ils peuvent ainsi vouloir montrer d'autres procédures qu'un PE1 peut utiliser.

« une intersection de cercles et milieu », et ne fait référence qu'au milieu dans son commentaire. Ces adaptations de procédures ont par ailleurs été rencontrées dans le test papier. Béa utilise la procédure standard avec comme rayon la distance AB mais elle retrace le segment en milieu de page. Elle a dans la situation précédente utilisé la procédure « milieu et perpendiculaire ». Son commentaire décrit mais ne justifie pas sa construction. Dans ces trois cas, les commentaires ne font pas référence à l'équidistance des points. On a vu que cette référence était rare dans le test papier et l'environnement Cabri ne modifie pas la situation.

Médiatrice et quadrilatère



Dans la situation présentant un quadrilatère concave ayant deux paires de côtés consécutifs de même longueur, 7 étudiants sur les 14 utilisent à nouveau la procédure « milieu et perpendiculaire », dont Emma qui ne l'avait pas encore utilisée dans les deux situations précédentes (elle utilise une procédure chaque fois différente). Leurs commentaires sont en adéquation avec la procédure utilisée.
4 étudiants tracent directement la droite (EU) : on peut penser qu'ils se situent dans G2 et savent pourquoi ils effectuent ce tracé. En fait, les commentaires correspondants énoncent tous des propriétés vraies mais deux d'entre eux ne donnent pas effectivement une propriété susceptible de justifier la construction, autrement dit, en adéquation avec la procédure utilisée.
Il s'agit de :
Kédy : *« La médiatrice de la base dans un triangle isocèle passe par le sommet et le milieu de la base »*, alors que ni E ni U ne sont au milieu de [MN]
et Gala : *« M est l'image de N par l'axe de symétrie UE »*. Ici, la formulation est maladroite et de toutes façons, cela n'explique pas directement pourquoi (UE) est la médiatrice de [MN].
Kédy et Gala sont justement les seules des 14 étudiants à effectuer des Cabri-vérifications. Toutes deux utilisent l'outil « perpendiculaire ? » de l'oracle pour s'assurer que la droite tracée est perpendiculaire au segment d'origine, Kédy place en plus l'intersection de (EU) et de [MN] et demande à l'oracle si ce point est équidistant de M et de N, s'assurant ainsi que (EU) coupe [MN] en son milieu. On peut ainsi considérer que ces deux étudiantes se situent dans G2I et que leur démarche implicite est :

- Tracer la droite (EU) : perceptivement, elles voient où doit se situer la médiatrice et utilisent les points E et U qui semblent sur cette droite
- Ne disposant comme définition de la médiatrice que celle qui repose sur milieu et perpendiculaire, effectuer des Cabri-vérifications pour vérifier que leur construction est correcte.

Remarquons qu'alors elles essaient de trouver une justification autre, conscientes de ne pas avoir utilisé milieu et perpendiculaire pour le tracé, ce qui est déjà très intéressant. Ceci montre en particulier que Cabri ne les a pas enfermées dans ses paradigmes : il leur permet de se convaincre, mais ne les empêche pas de se situer ensuite dans G2, même si leurs connaissances ne leur permettent finalement pas d'aboutir à une justification correcte.

Dévi trace la perpendiculaire au segment passant par E (et non par le milieu comme les autres), Béa fait apparaître la droite (EU) qui avait été construite pour effectuer la figure, puis cachée. L'outil médiatrice a été supprimé des menus, mais pas l'outil bissectrice. Anne en profite pour tracer la bissectrice de $\widehat{MEN}$. Les commentaires correspondants sont corrects.

2.2.2. Interprétation des résultats

La procédure standard (arcs de cercles de même rayon, avec un rayon différent ou non de la longueur du segment), plébiscitée dans le test papier, a presque disparu, le plus souvent remplacée par la procédure « milieu et perpendiculaire ». Plusieurs explications peuvent être avancées :

- La procédure standard avec des rayons différents de la longueur du segment est plus complexe à mettre en œuvre. Compte tenu de la version de Cabri utilisée et des fonctions étudiées dans les séances d'initiation, elle peut en effet se décomposer ainsi :
    - Editer un nombre r
    - Placer un point C à une distance r de A par report de mesure
    - Tracer le cercle de centre A passant par C
    - Placer un point D à une distance r de B par report de mesure
    - Tracer le cercle de centre B passant par D
    - Placer un point aux deux intersections des deux cercles
    - Tracer la droite contenant ces points

  tandis que la procédure « milieu et angle droit » n'utilise que deux fonctions de Cabri :
    - Déterminer le milieu de A et B
    - Tracer la droite perpendiculaire à (AB) passant par ce milieu

  Même la procédure standard avec des cercles ayant pour rayon la longueur du segment est un peu plus complexe :
    - Tracer le cercle de centre A passant par B
    - Tracer le cercle de centre B passant par A

   - Tracer la droite passant par les intersections des deux cercles
- La complexité de la procédure standard est non seulement liée au nombre d'actions à exécuter, mais aussi à la nature de ces actions. En effet :
   - Il faut explicitement choisir une valeur numérique pour le rayon dans la version avec un rayon différent de la longueur du segment, ce qui n'apparaît pas quand on ouvre le compas, et utiliser l'outil « report de mesure », souvent mal maîtrisé par les étudiants.
   - On ne peut tracer que des cercles complets et non des arcs de cercles. Ceci déstabilise beaucoup les étudiants parce qu'ils sont habitués à ne tracer que des arcs de cercles, et non des cercles, et ils n'ont pas nécessairement conscience des cercles qui portent leurs arcs de cercles. D'autre part, quand ils tracent des cercles, ils ont l'impression de tracer des éléments qui ne servent à rien et trouvent le dessin trop chargé.
- Enfin, la situation nouvelle dans laquelle se trouvent les étudiants par la manipulation d'un outil qu'ils ne maîtrisent pas encore bien les incite peut-être à réfléchir. Ils ne peuvent en effet appliquer une routine, puisqu'ils n'en ont aucune avec Cabri, et sont ainsi amenés à revenir à la définition de l'objet qu'ils construisent en se posant la question : qu'est-ce qu'une médiatrice ? La définition qui leur vient à l'esprit étant : « droite perpendiculaire au segment passant par son milieu », elle peut tout naturellement être la source des fonctions utilisées, d'autant plus que la syntaxe Cabri s'y prête bien.

Du point de vue des commentaires, nous avons pu remarquer que leur nature était très proche de celle des commentaires obtenus dans la version papier du test. « Perpendiculaire et milieu » est l'élément qui revient le plus souvent, mais comme il correspond ici à la procédure la plus fréquemment utilisée, il se retrouve en général en adéquation avec la procédure. Ainsi, on peut considérer ici que la plupart des étudiants se situent dans G2, à l'exception de Gala et Kédy qui se situent, comme nous l'avons montré, dans G2I pour l'un des items.

2.3. Les autres items

Trois autres items constituaient ce test ; nous allons maintenant les analyser.

2.3.1. Tracé d'un triangle de côtés 13 cm, 8 cm et 5 cm.

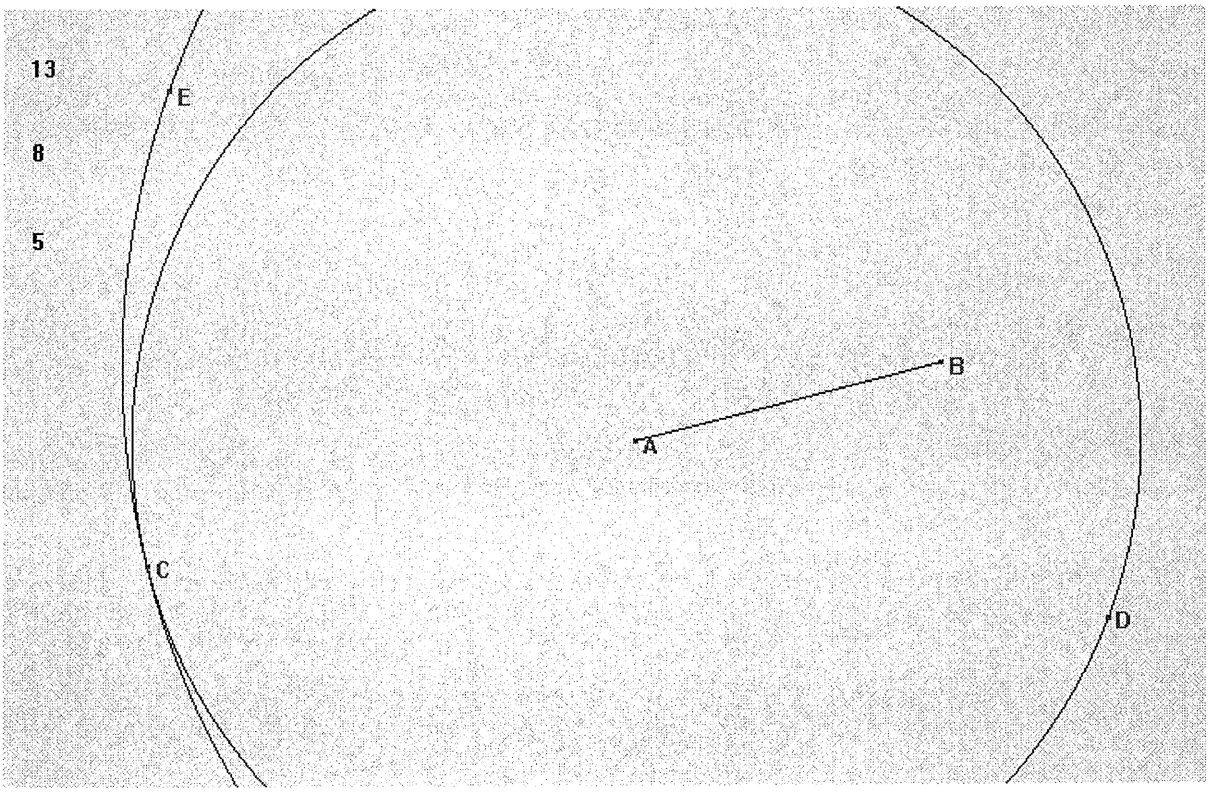
Gala et Noémie tracent un segment de 13 cm et utilisent dans la construction le fait que les points sont alignés. Gala explicite en outre dans ses commentaires que $AB + AC = BC$. Elle se situe donc dans G2, sa construction étant basée sur des déductions qu'elle a effectuées à partir des informations initiales. Noémie ne fait pas d'autre commentaire que *« Il est plat »*. On peut néanmoins considérer qu'elle se situe également dans G2, dans la mesure où elle utilise, on peut penser de manière consciente, une information déduite des informations initiales pour tracer directement un segment. **Ces 2 étudiantes se situent donc d'emblée dans G2.**

5 étudiants tracent un segment puis deux cercles de rayons adéquats et placent un point à leur intersection. Ils concluent que le triangle est plat, sans effectuer de Cabri-vérifications. Ils **se situent donc dans G1I**, utilisant la perception pour conclure.

Irène utilise la même procédure de construction mais justifie le triangle plat par la relation $5 + 8 = 13$ cm. **Irène se situe donc dans G2 pour conclure, mais après avoir utilisé G1I pour trouver la réponse.**

3 autres étudiants, France, Hélène et Louis, utilisent la même procédure mais, lorsqu'ils demandent à Cabri de placer l'intersection des cercles, ils ne voient rien apparaître. La procédure qu'ils ont utilisée est la suivante :

- éditer les trois nombres 13, 8 et 5
- placer un point A
- reporter la longueur 5 à partir de A et placer un point B (Louis commence par un segment de longueur 13 mais effectue une construction analogue)
- reporter la longueur 8 à partir de A et placer un point D
- tracer un cercle de centre A passant par D (on a ainsi tracé le cercle de centre A et de rayon 8)
- reporter la longueur 13 à partir de B et placer un point E
- tracer un cercle de centre B et passant par E (on a ainsi tracé le cercle de centre B et de rayon 13)
- placer un point C à l'intersection des deux cercles



On s'aperçoit que, selon la position des points D et E, Cabri arrive ou non à placer le point C à l'intersection des deux cercles, et ce problème se produit aussi bien lorsqu'on commence par le segment de longueur 5 cm que par celui de longueur 13 cm. Dans certains cas extrêmes, les deux cercles ne sont même pas tangents perceptivement. Le lecteur en trouvera un exemple en annexe 23. Cette difficulté n'avait pas été prévue car elle ne se produit pas à chaque fois et n'avait pas été repérée avant l'expérimentation[137].

France ne conclut pas tandis que les deux autres concluent néanmoins :

- pour Hélène, que les points sont alignés,
- pour Louis, que le triangle est plat.

On peut penser que ces deux derniers se situent dans G1I, ayant malgré tout repéré perceptivement le point où les cercles sont tangents. Mais on ne peut complètement rejeter l'hypothèse que, ne pouvant visualiser l'intersection recherchée sur l'écran, ils se sont aperçus de la relation sur les distances et se sont situés dans G2 pour conclure. Néanmoins, aucune trace écrite ne permet de confirmer cette hypothèse.

[137] On a là un exemple supplémentaire qui montre que G2I n'est pas G2. Evidemment, dans G2, les deux cercles sont tangents et possèdent un point d'intersection, unique et parfaitement défini. Mais cette intersection n'est manifestement pas toujours définie dans G2I, ou tout du moins dans ce qu'on en voit représenté à l'écran.

3 étudiants n'aboutissent pas à une construction correcte. Deux d'entre eux, Dévi et Jeanne, utilisent le report de longueur en positionnant visuellement un point sur un cercle avec la procédure suivante :

- éditer les trois nombres 13, 8 et 5
- placer un point A
- reporter la longueur 5 à partir de A et placer un point B
- reporter la longueur 13 cm à partir de B et placer un point E
- tracer un cercle de centre B et passant par E
- reporter la longueur 8 cm à partir de A sur le cercle de rayon 13 cm pour obtenir le point C

Le problème est que, la position de C sur le cercle étant obtenue perceptivement, Cabri ne reconnaît pas les points comme alignés et l'étudiant pas toujours non plus !

Ce positionnement perceptif des points relève du paradigme G1I. Dans le cas présent, il peut cependant également dénoter une maîtrise des outils de Cabri encore mal assurée, en particulier de l'outil « report de mesure ». Il est en effet difficile pour les étudiants dans cette phase d'initiation de comprendre que Cabri ne peut placer un point sur un objet avec l'outil « report de mesure », alors qu'il le fait avec d'autres de ses outils, comme par exemple placer un point, tracer un cercle, une droite, etc.

De tous les étudiants, Jeanne est la seule à effectuer des Cabri-vérifications. Elle se situe donc a priori dans G2I, mais un G2I mal maîtrisé à cause du report de mesure. Cabri permet de vérifier si des points sont alignés ; il permet également de tracer une droite passant par deux points et vérifier si le troisième appartient à cette droite. Ces fonctions n'ont pas été explicitement utilisées dans les séances d'initiation, seules les vérifications de parallélisme et de perpendicularité ont été rencontrées. De ce fait, les étudiants n'ont pas utilisé les autres Cabri-vérifications disponibles, seule Jeanne a utilisé l'outil « points alignés ? ».

Apparaît ainsi une autre conclusion concernant l'utilisation de Cabri avec ces PE1 : une initiation très courte (ici, deux séances de deux heures, ou une heure et demie selon les groupes) s'avère insuffisante pour rendre les étudiants vraiment autonomes. Ils n'utilisent que les fonctions qu'ils ont explicitement utilisées dans les exercices d'initiation. Il faudrait alors, soit leur faire rencontrer tous les outils au cours d'exercices, soit - et cela semble largement préférable – les faire travailler dans un milieu (au sens de Brousseau), qui les amène à découvrir les outils par eux-mêmes, ce qui faciliterait l'utilisation ultérieure de nouveaux outils. En outre, certains outils, plus délicats à utiliser, sont encore mal maîtrisés sur une période si courte.

Par ailleurs, il est à noter que sur les 14 étudiants, 4 seulement tracent d'abord le plus grand segment, de longueur 13 cm, dont Gala, qui se situe directement dans G2. Les 10 autres, soit la grande majorité des étudiants, commencent par le segment [AB], donc effectuent la construction dans l'ordre alphabétique des points, ou encore dans l'ordre dans lequel les segments apparaissent dans l'énoncé, au lieu de commencer par le segment le plus long, comme il est conseillé de le faire en situation papier-crayon pour augmenter la précision du tracé.

Du point de vue des commentaires, sur les 14 étudiants, 4 écrivent que les points sont alignés (ou presque alignés pour Jeanne qui a mal utilisé le report de mesure dans la construction : *« Je ne sais pas si le point C appartient aux deux cercles vu que les points sont pratiquement alignés »*) et 8 que le triangle est plat (ou que l'angle est plat), ou aplati. Deux d'entre eux formulent une remarque qui pose le problème de la nature du triangle :

Hélène :

> *« Les points A, B et C sont alignés. L'angle CÂB mesure 180° à lui tout seul. (est-ce toujours un triangle ?) »*

Kédy :

> *« Le triangle (ABC) est plat, les côtés CA et AB sont superposés à CB. Est-ce un triangle ? Peut-on parler de figure à trois côtés ? »*

Nous avons explicité au chapitre 5 (cf. chapitre 5, § 2.1.2, pages 223 et suivantes), en étudiant ce même item pour le test papier, une conception fréquente chez les PE1 : « un triangle doit être un « vrai » triangle, c'est-à-dire ne pas être aplati ». On a notamment montré que 28 % des PE1 indiquent qu'il n'est pas possible de tracer un tel triangle. Cette conception du triangle, qui correspond à une définition de type exclusif (cf. chapitre 2, § 1.7, pages 93 et suivantes), a été analysée comme étant le révélateur d'un positionnement des étudiants dans G1. On peut par les remarques de Kédy et Hélène préciser cette conception du triangle à partir de leurs conceptions de chacun des trois éléments caractéristiques du triangle :

- les points, sommets du triangle, ne doivent pas être alignés
- les angles ne doivent pas être nuls. Hélène explique en effet que l'un des angles « *mesure 180° à lui tout seul* ». Cette remarque laisse supposer qu'elle sait que la

somme des angles dans un triangle vaut 180°. Les deux autres angles sont donc nuls, et c'est ce qui semble la perturber.

- les côtés ne doivent pas être superposés.

Ces conceptions sont naturelles dans G1, mais erronées dans G2.

Le changement d'environnement ne semble pas ici modifier le comportement des étudiants du point de vue des procédures de construction ni du point de vue des types de commentaires, mais en améliorant la précision des dessins, il modifie pour une part les conclusions : une procédure qui donnait parfois un « vrai » triangle dans l'environnement papier-crayon, donne ici trois points alignés. De ce fait, seuls les étudiants ayant effectué une construction erronée (dans G2I) obtiennent un « vrai » triangle. Cela ne les amène cependant pas à une remarque sur la somme des longueurs des côtés : seules Irène et Gala font référence à l'égalité : $8+5=13$.

En résumé,

Les étudiants ...	... se situent dans le paradigme ...
Gala et Noémie	G2
Irène	G1I puis G2
Jeanne	G1I - G2I
Anne, Carole, Emma, Kédy, Marie	G1I
Dévi	G1I avec erreur de construction
Hélène et Louis	G1I avec problème « cercles tangents sans intersection »
France	Ne conclut pas : problème « cercles tangents sans intersection »
Béa	Erreur de construction. Ne conclut pas

2.3.2. Tracé d'un triangle de côtés 5 cm, 4 cm et 3 cm.

7 étudiants seulement ont répondu à cette question qui n'a été ajoutée au test qu'après qu'un groupe l'eut déjà passé.

Tous effectuent une construction correcte.

Kédy et Noémie justifient le fait que le triangle est rectangle en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore, Noémie ayant en outre commencé par faire mesurer l'angle droit par Cabri. Autrement dit, **Noémie se situe dans G2I puis dans G2, Kédy dans G2** (peut-être après G1I, mais il est difficile de savoir l'influence qu'a eue la construction. Kédy a-t-elle reconnu le triangle rectangle par ses dimensions « classiques » souvent utilisées (triangle égyptien), avant d'effectuer la construction – G2 – ou après, en regardant le dessin obtenu – G1I – ?).

Les cinq autres font seulement mesurer l'angle droit par Cabri et cela leur suffit pour conclure. **Ces cinq étudiants se situent dans G2I.** Notons que les Cabri-vérifications ici utilisées ne sont pas liées à l'oracle, mais à une **mesure** (d'angle). En effet, aucun ne demande si deux droites sont perpendiculaires, du fait probablement que les droites n'ont pas été tracées ni suggérées, tandis que la question explicitement formulée porte sur le triangle. Ainsi, il semble que la formulation « le triangle est-il rectangle ? » appelle immédiatement une vérification d'angle droit par la mesure de l'angle plutôt que la vérification de la perpendicularité.

Il semble par ailleurs sur cet exemple que les Cabri-vérifications renforcent la perception, qui elle-même est prégnante compte tenu de la précision du dessin avec Cabri. Les étudiants n'ont plus alors aucune raison de proposer une justification experte, et pour eux jugée « compliquée », en utilisant la réciproque du théorème de Pythagore. Ils n'ont plus de doute, donc plus besoin d'une autre preuve.

Il faut néanmoins rester très prudent sur ces affirmations compte tenu du très faible effectif étudié. Il s'agit surtout de pistes qui demanderaient à être explorées de façon plus systématique.

En résumé dans cette situation,

Les étudiants …	… se situent dans le paradigme …
Hélène, Irène, Jeanne, Louis, Marie	G2I
Kédy	(G1I ? puis) G2
Noémie	G2I puis G2

2.3.3. Carré et Thalès

Les 14 étudiants tracent correctement la droite (IJ) ou le segment [IJ], dont l'un en utilisant cependant le report de mesure de manière perceptive.

4 étudiantes, effectuant seulement des validations perceptives, se situent dans G1I.

- Béa et France se contentent de « regarder » les droites
- Kédy fait mesurer les longueurs CJ, JB, DI et IB, puis écrit :

  « Visuellement.
  C'est probablement en rapport avec le théorème de Thalès.
  On trouve 2/3=2,8/4,27 JB/CJ=IB/DI »

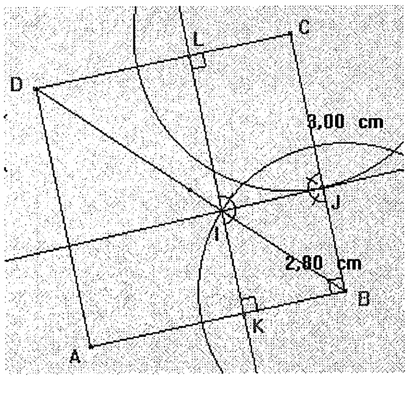
  Elle a conscience que « visuellement » est insuffisant. Elle essaie alors de travailler dans G2, mais ne réussit pas véritablement à appliquer la réciproque du théorème de Thalès et reste en fait dans G1I. Elle semble lire le parallélisme sur le dessin et utiliser le théorème de Thalès pour en déduire une égalité de rapports. On peut penser qu'il s'agit d'une étudiante qui voudrait travailler dans G2 mais qui, n'en possédant pas suffisamment connaissances et compétences, n'arrive pas à imaginer et à mettre en œuvre une stratégie de résolution adéquate.
- Hélène effectue une construction supplémentaire

  « [IJ] et [DC] sont parallèles à l'œil nu. Pour vérifier, je trace un nouveau point K tel que : K appartient à [DA] et DK=3cm. Je trace [KJ], le point I se trouve sur ce segment qui est lui-même parallèle à [DC] donc si [DC] est parallèle à [KJ] alors [DC] est parallèle à [IJ] »

  avant de conclure perceptivement. En effet, le fait que I se trouve sur le segment [KJ] est uniquement obtenu de manière perceptive.

Ces quatre étudiantes concluent que les droites sont parallèles.

Louis effectue un raisonnement correct, appliquant un théorème de G2 :
« J'ai tracé une perpendiculaire à (IJ) passant par le point I. Cette droite est également perpendiculaire à (DC) donc (IJ) et (DC) sont parallèles », mais sur une construction erronée : il a pris la perpendiculaire à [AB] (et non à (IJ) comme il le prétend) passant par I.



D'ailleurs, Cabri lui montre bien les angles qui sont droits et ceux qui ne le sont pas quand il lui demande de marquer les angles en I et J, comme le montre le dessin ci-dessus, mais il n'en tient pas compte. Il effectue des Cabri-vérifications qui pourraient le faire se situer dans G2I mais l'aspect perceptif l'emporte. Il est convaincu que les droites sont parallèles, tente - en vain - de le démontrer, et conclut qu'elles sont parallèles malgré les conclusions de Cabri. **Il se situe, malgré ses Cabri-vérifications, dans G1I.** L'aspect perceptif est trop prégnant.

7 étudiants utilisent des Cabri-vérifications ; ils se situent dans G2I :

- 5 utilisent l'oracle avec la fonction « parallèles ? »
- Irène fait mesurer l'angle $\widehat{IJC}$ et constate qu'il n'est pas droit
- Marie construit un point F à l'intersection de (IJ) et de [DA], puis fait mesurer les longueurs DF et CJ. Ces longueurs sont différentes.

Même quand, dans un premier temps, les étudiants perçoivent les droites parallèles, ces Cabri-vérifications leur font finalement dans tous les cas conclure que les droites ne sont pas parallèles, contrairement à ce qui s'est passé pour Louis. Irène, qui était au départ très sûre que les droites étaient parallèles :

« (IJ) et (DC) sont parallèles, car (IJ) est perpendiculaire à [BC] en J et (BCD) est un triangle rectangle en C d'où (IJ) et (DC) dont parallèles ».

garde un doute, en suggérant qu'elle a fait une erreur de construction :

« je pensais que ces droites étaient parallèles mais en mesurant l'angle $\widehat{IJC}$*, je trouve 90,6° donc les droites ne sont pas parallèles.* ***(j'ai peut-être fait une erreur de construction !)*** *»*

Ce doute montre à nouveau la prégnance du perceptif.

Gala n'est pas non plus convaincue par ce que l'oracle de Cabri lui affirme. Après avoir utilisé l'outil « parallèles ? », elle trace la parallèle à (DC) passant par J pour vérifier perceptivement le non-parallélisme. Elle a besoin de « voir » pour se convaincre. **Elle se situe donc dans G2I puis dans G1I**, ce qui est assez inhabituel, mais qui montre que G2I, comme G2 par ailleurs, n'est pas toujours efficace pour convaincre, quand ses résultats sont en contradiction avec la perception première.

Les deux autres étudiantes utilisent le théorème de Thalès.

- Carole (étudiante titulaire d'un baccalauréat D) affirme dans un premier temps que les droites sont parallèles (**elle se situe dans G1I**), puis effectue une Cabri-vérification avec l'oracle et l'outil « parallèles ? » (**elle se situe alors dans G2I**). La réponse de Cabri étant contraire à sa perception, elle utilise les théorèmes de Pythagore et Thalès pour démontrer qu'elles ne sont pas parallèles (**elle se situe ainsi pour finir dans G2**). C'est la seule pour qui Cabri a permis de se situer dans G2, plus pour se convaincre elle-même que pour des raisons de contrat didactique de type « il faut démontrer ». Dans la suite, elle montrera régulièrement ce besoin de démontrer pour se convaincre, elle n'acceptera jamais de se contenter de travailler dans G1I ou G2I, et dans les autres cours, elle cherchera toujours à travailler dans G2, ne semblant jamais convaincue par une explication dans G1. Elle utilisera G1, G1I ou G2I selon les situations pour construire sa conjecture, et cherchera toujours à démontrer – en général avec succès – pour terminer son travail, se situant ainsi systématiquement dans G2. Sa démarche correspond à ce qu'on attend des étudiants – souvent en vain ! – en fin de formation.

- Noémie affirme que les droites sont parallèles :

  « 1) J'ai observé la figure obtenue et supposé que (IJ) et (DC) sont parallèles. 2) J'ai cherché une justification. Or on sait d'après le théorème de Thalès, si [IB]/[BD]=[BJ]/[BC] alors on peut dire que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles. »

  Elle fait mesurer à Cabri chacune des longueurs dont elle a besoin, puis constate qu'il n'y a pas exactement égalité mais *« ça se rapproche quand même beaucoup, donc je peux considérer que c'est égal »*. **Elle se situe dans G1I.**

Cette dernière production reprend certains éléments rencontrés dans la version papier du test :

- Les mesures nécessaires à l'utilisation du théorème de Thalès ne sont pas obtenues en utilisant le théorème de Pythagore mais mesurées sur le dessin. Cette mesure étant effectuée par Cabri, elle est encore plus fiable pour l'étudiant et ne risque pas d'être remise en question.
- Les calculs effectués montrent qu'il n'y a pas égalité mais la faible différence des valeurs n'empêche pas de conclure au parallélisme. Cette démarche, comme je l'ai montré au chapitre précédent, relève alors de G1 (ici G1I), avec sa problématique de la précision.

Pour conclure, cette fois encore, il ne semble pas que Cabri aide les étudiants à travailler dans G2, puisque seule Carole s'y situe. Pourtant, cette situation est la seule dans laquelle l'aspect perceptif dans G1I entre en conflit avec G2I. Cabri est alors ici particulièrement intéressant, puisque, mettant ce conflit en évidence, on aurait pu penser qu'il allait inciter les étudiants à se situer dans G2 pour trancher. Or la moitié des étudiants, se situant dans G2I, vont se satisfaire de la réponse proposée par Cabri, sans chercher à effectuer une démonstration. On

comprend alors que dans les autres situations, exemptes d'un tel conflit (cf. les deux situations précédentes de tracé de triangle), les étudiants se cantonnent volontiers dans G1I ou G2I.
En résumé dans cette situation,

Les étudiants …	… se situent dans le paradigme …
Béa, France, Hélène, Kédy, Louis, Noémie	G1I
Anne, Dévi, Emma, Irène, Jeanne, Marie	G2I
Gala	G2I puis G1I
Carole	G1I puis G2I puis G2

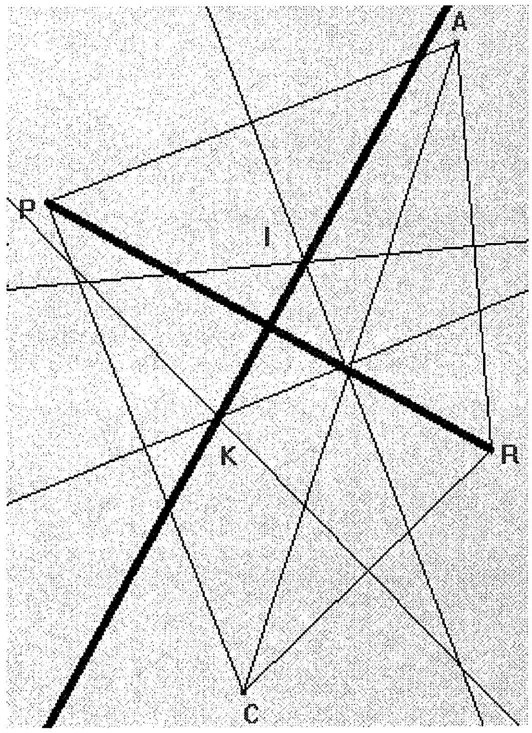
Rappelons qu'après le test, un point est fait avec les étudiants sur les réponses attendues, et en particulier les définitions et propriétés de la médiatrice sont rappelées, avant d'aborder à la séance suivante la situation PARC.

3. La situation PARC

La situation PARC est l'objet de la quatrième séance. Voici son énoncé définitif[138] :

[138] Nous analyserons un peu plus loin les différentes versions de cet énoncé qui ont été utilisées.

Placer 4 points quelconques P, A, R, C. Tracer les segments [PA], [AR], [RC], [CP], [PR], [AC]. Tracer les médiatrices de [PA] et de [AR]. Elles se coupent en un point I. Tracer les médiatrices de [RC] et de [CP]. Elles se coupent en un point K. Déplacer les points P, A, R et C dans le plan. Que peut-on dire de la droite (IK) ? (Répondez ici)
Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)



Chaque étudiant dispose d'un document papier comportant cet énoncé et où il répond aux questions, et d'une disquette sur laquelle il enregistre sa construction.

3.1. Analyse a priori : les caractéristiques de la situation

Le problème proposé ici se rapproche des « problèmes ouverts » au sens défini par l'équipe de l'IREM de Lyon, qui définit le problème ouvert ainsi :

« Nous appelons « problème ouvert », un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires, ni de questions du type « monter que »). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. » [Arsac. 1999, page 7]*

Compte tenu de ces caractéristiques, la situation PARC peut être considérée comme un problème ouvert. En effet :

- Long – court est un concept subjectif, mais on peut considérer que l'énoncé ci-dessus de la situation PARC n'est pas long, puisque, en dehors de la procédure de construction, il ne comporte que deux questions.
- *« L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution ».* En effet, ni la conjecture « la droite (IK) est la médiatrice du segment [PR] », ni la manière de la justifier, ne sont suggérées dans l'énoncé. Il y a en outre plusieurs manières de justifier la conjecture, par des Cabri-vérifications ou par une démonstration mathématique, chacun de ces chemins se déclinant en plusieurs possibilités, comme je vais le montrer au paragraphe suivant. Ceci renforce l'aspect « ouvert » de la situation. Par ailleurs, cette situation est proposée en amont du cours de géométrie, les différents théorèmes ou définitions utiles n'ont pas été travaillés ensemble. Il ne s'agit donc en aucun cas d' *« application immédiate des derniers résultats présentés en cours ».* De même, *« il n'y a pas de questions intermédiaires, ni de question du type « montrer que » ».*
- *« Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les étudiants ont assez de familiarité »* : les connaissances et compétences nécessaires relèvent de la géométrie du collège et sont en principe mobilisables, à défaut d'être disponibles, pour une majorité de PE1, d'autant plus que la médiatrice a fait l'objet de rappels après le test Cabri pour les uns, en cours pour les autres.

En même temps, la conjecture n'est pas triviale, il y a donc un véritable enjeu de vérification ou de démonstration[139].

Il s'agit donc bien de mettre les étudiants dans une situation d'apprentissage qui leur permette d'« essayer, conjecturer, tester, prouver », l'objectif étant justement ici d'analyser la nature de leur preuve, validation perceptive, Cabri-vérification ou démonstration mathématique.

[139] De ce point de vue, l'expérience va montrer que la conjecture était peut-être même trop cachée ! Avant de pouvoir poser cette conjecture, il faut en effet repérer que I et K ne dépendent pas de A ni de C, mais de P et de R, puis repérer la position de (IK) par rapport à [PR]. Néanmoins, cela a permis un vrai travail dans les groupes.

3.2. Des preuves variées : analyse de la situation mathématique

Après avoir établi la conjecture « la droite (IK) est la médiatrice du segment [PR] », les étudiants peuvent utiliser des preuves de natures différentes : perception visuelle (relevant de G1I), Cabri-vérifications (relevant de G2I), ou démonstration (relevant de G2).

Du point de vue G2I des Cabri-vérifications, les étudiants peuvent :

- Placer le milieu du segment [PR] puis vérifier qu'il appartient à la droite (IK)
- Placer un point M à l'intersection de (IK) et de [PR] puis mesurer les distances PM et MR pour vérifier que M est le milieu de [PR]
- Vérifier grâce à l'oracle que (IK) et [PR] sont perpendiculaires
- Placer un point M à l'intersection de (IK) et de [PR] puis mesurer ou faire marquer les angles $P\widehat{M}I$ ou $I\widehat{M}R$ ou $P\widehat{M}K$ ou $K\widehat{M}R$ pour vérifier la perpendicularité de la droite et du segment.
- Mesurer les distances IP et IR d'une part, KP et KR d'autre part, pour montrer que ces points sont à égale distance de P et de R, donc sur la médiatrice de [PR]
- Tracer des cercles de centres I et K et de même rayon, puis vérifier que les intersections de ces cercles appartiennent à la droite (IK).

Du point de vue G2 du raisonnement hypothético-déductif, aux moins deux démonstrations sont a priori accessibles aux étudiants. Etudions ces deux démonstrations en détaillant les connaissances et compétences qui leurs sont associées.

Démonstration 1 :

Texte de la démonstration	Connaissances associées	Compétences associées
		Etre capable d'appliquer les théorèmes de la colonne ci-contre et pour cela :
I est sur la médiatrice de [PA] donc IP = IA I est sur la médiatrice de [AR] donc IA = IR	Les points de la médiatrice d'un segment sont à égale distance des extrémités du segment	Faire le lien entre médiatrice et distance et non seulement entre médiatrice, perpendicularité et milieu.
Ainsi IP = IR donc I est sur la médiatrice de [PR]. On fait le même raisonnement sur le point K pour démontrer que K est aussi sur la médiatrice de [PR].	Tout point à égale distance des extrémités d'un segment est sur la médiatrice du segment.	**Faire le lien entre égalité de distances et médiatrice.**
Ainsi (IK) est la médiatrice de [PR].	La médiatrice est une droite. Deux points distincts définissent une droite.	Accepter que si les deux points I et K vérifient la propriété d'équidistance de P et R, alors, les autres points de la droite (IK) vérifient cette propriété.

Démonstration 2 :

Texte de la démonstration	Connaissances associées	Compétences associées
		Etre capable d'appliquer les théorèmes de la colonne ci-contre et pour cela :
Dans le triangle PAR, deux médiatrices se coupent en I. I est donc sur la troisième médiatrice du triangle, celle de [PR]. De même, dans le triangle PCR, deux médiatrices se coupent en K, K est donc sur la troisième médiatrice du triangle, celle de [PR].	Dans un triangle, les trois médiatrices des côtés du triangle sont concourantes.	Mobiliser spontanément ce théorème avec pour seul indice les mots « médiatrices » et « coupent », alors notamment qu'aucun triangle n'est cité dans l'énoncé. *
Ainsi (IK) est la médiatrice de [PR]	La médiatrice est une droite. Deux points distincts définissent une droite.	Accepter que si les deux points I et K sont sur la médiatrice de [PR], alors la droite (IK) est la médiatrice.

* : Si on reprend le langage de Duval, il s'agit là de faire fonctionner l'appréhension opératoire des figures par une modification méréologique consistant dans le partage d'une figure en parties pour les recombiner en une autre figure (cf. : [Duval .1994, page 126]) : faire apparaître les deux triangles PAR et PCR dans l'enchevêtrement des différentes droites.

Cette description montre que les connaissances associées à chacune de ces démonstrations font bien partie de la géométrie du collège. L'analyse des productions des étudiants permettra de savoir si ces connaissances, ainsi que les compétences qui leur sont associées, sont effectivement disponibles.

3.3. Du texte de manuel à la formulation pour Cabri : analyse de la situation didactique

La situation mathématique étant choisie, il est utile d'analyser les choix qui ont été faits dans sa formulation pour la présentation aux étudiants dans l'environnement Cabri. Voici le texte initial de la situation PARC :

PARC est un quadrilatère quelconque. Les médiatrices de [PA] et de [AR] se coupent en I. Les médiatrices de [RC] et de [CP] se coupent en K. Que se passe-t-il pour les points I et K lorsque les points A et C se déplacent dans le plan ?

Une première adaptation est effectuée pour une mise en œuvre avec Cabri :

Placer 4 points quelconques P, A, R, C. Tracer les médiatrices de [PA] et de [AR]. Elles se coupent en un point I. Tracer les médiatrices de [RC] et de [CP]. Elles se coupent en un point K. Que se passe-t-il pour la droite (IK) lorsque les points A et C se déplacent dans le plan ? (Répondez ici) Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)

Ces modifications sont multiples :

- Il est explicitement exprimé de placer des points ou tracer des médiatrices. Certes, l'étudiant ne peut pas faire autre chose, mais il s'agit de mettre cet énoncé sous la forme rencontrée par les étudiants dans les exercices des séances d'initiation[140]. Dans la perspective « problème ouvert », il s'agit de faciliter la dévolution du problème aux étudiants afin de leur permettre de s'engager dans des essais ou des conjectures.

[140] L'analyse précédente du test, faite a posteriori, montre que les étudiants ont développé peu d'autonomie lors de ces séances d'initiation. C'est peut-être dû à leur courte durée, mais aussi à ces consignes très fermées, ou très peu d'initiative n'est laissée à l'étudiant. Il serait sûrement intéressant de refaire cette expérimentation en modifiant la forme des énoncés, de sorte que les étudiants découvrent plus par eux-mêmes les différents outils de Cabri et soient ainsi plus autonomes par la suite.

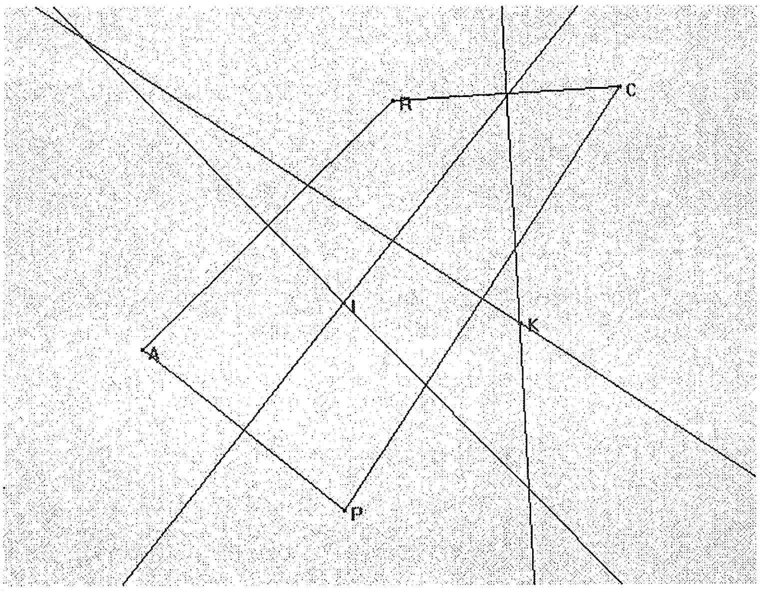
- Le quadrilatère est remplacé par 4 points. Une hypothèse est en effet que placer 4 points indépendants permet d'obtenir une plus grande variété de dessins, représentants de quadrilatères croisés ou non croisés, convexes ou concaves, alors que les quadrilatères proposés spontanément par les étudiants risqueraient d'être systématiquement convexes. Cet aspect n'a pas d'effet sur la solution du problème, mais il paraît inutile de restreindre la situation quand il est possible de l'ouvrir sans augmenter sa complexité.
- Mais surtout, introduire le mot quadrilatère, alors que ce sont les triangles PAR et PCR ou seulement le segment [PR] qui sont pertinents[141], risque de brouiller un peu plus les pistes. Il semble plus facile de penser aux triangles ou aux segments à partir de points qu'à partir d'un quadrilatère. En effet, si on reprend l'analyse proposée par Duval dans [Duval. 1995, page 183], la résolution des deux présentations proposées ci-dessus mobilise strictement les mêmes connaissances. Dans un cas comme dans l'autre, les unités figurales pertinentes, en particulier le segment [PR] dont (IK) est la médiatrice, ne sont ni plus ni moins visibles sur le dessin. Mais dans la seconde version, l'énoncé au moins, à défaut de citer le segment [PR], n'attire pas l'attention sur le quadrilatère par ailleurs inutile. Autrement dit, il s'agit de favoriser l'appréhension opératoire du dessin par une modification méréologique de celui-ci en diminuant la non-congruence entre les objets cités dans l'énoncé (points et droites) et les objets qui vont permettre la résolution du problème (médiatrices, triangles, segments).
- Par ailleurs, les points I et K sont remplacés par la droite (IK), afin de faciliter également la conjecture. Il s'agit de faire apparaître explicitement l'objet sur lequel la conjecture va porter[142] : la droite (IK).
- Enfin, une question est ajoutée : « Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)». La formulation est choisie de sorte qu'il ne soit explicitement fait référence à aucun type de vérification : ni visuel, ni démonstration, ni Cabri-vérification. C'est cette partie qui est susceptible de nous donner des informations du point de vue des paradigmes dans lesquels ces étudiants se situent pour résoudre ce problème avec Cabri.

---

[141] Cf. le détail des démonstrations 1 et 2 au paragraphe précédent.

[142] Malgré cela, de nombreux étudiants observeront les points et non la droite. Certains ne la tracent même pas ! On peut penser que la situation aurait été pire si la droite n'avait même pas été citée dans l'énoncé.

Voici le type de figure que les étudiants obtiennent :



Les segments [PA], [AR], [RC], [CP] sont tracés car, pour tracer la médiatrice d'un segment, il semble indispensable aux étudiants de tracer le segment. Ce phénomène a déjà été rencontré dans le test papier lors du tracé de médiatrice du segment [MN] avec les points E et U, où le segment [MN] ou la droite (MN) ont été tracés dans 80 % des cas, comme si la médiatrice n'existait que si le segment était tracé ! Par contre, la droite (IK) n'est pas systématiquement tracée, sans qu'on puisse vraiment expliquer pourquoi.

Cet énoncé est utilisé avec le premier groupe. Mais les étudiants n'établissent aucune conjecture : *« ils ne voient rien «*. Le texte est alors modifié pour les groupes suivants :

Placer 4 points quelconques P, A, R, C. Tracer les segments [PA], [AR], [RC], [CP], [PR], [AC],

Tracer les médiatrices de [PA] et de [AR]. Elles se coupent en un point I.

Tracer les médiatrices de [RC] et de [CP]. Elles se coupent en un point K. Enregistrez.

Déplacer les points P, A, R et C dans le plan. Que peut-on dire de la droite (IK) ? (Répondez ici)

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)

Là encore, plusieurs modifications sont effectuées :

- Le fait de tracer tous les segments est explicitement demandé. En effet, certains étudiants de ce premier groupe, peu habitués encore à Cabri, n'ont tracé que ce qui était demandé et n'ont « rien vu » du tout. Or, il est pertinent de tracer le segment [PR] pour au moins deux raisons :

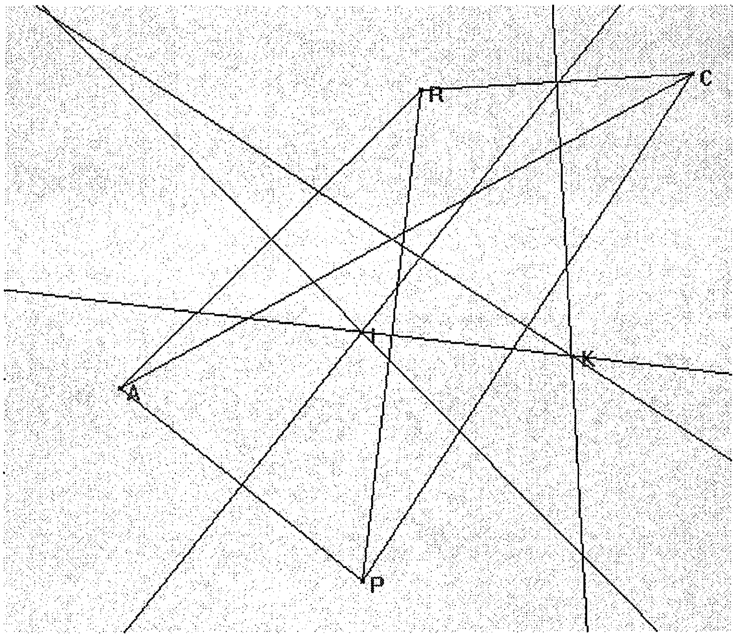
- A défaut de percevoir immédiatement l'existence d'une médiatrice, on peut percevoir la perpendicularité de la droite (IK) et du segment [PR] si celui-ci est tracé, ou le fait que (IK) passe par le milieu de [PR]
- Le segment [PR] met en évidence deux triangles dans le quadrilatère PARC. La perception de ces triangles et le mot médiatrice peuvent aider l'étudiant à penser aux médiatrices d'un triangle, donc au centre du cercle circonscrit et, par-là, à la troisième médiatrice qui nous intéresse (cf. démonstration 2).

Bien sûr, le tracé du segment [AC] est inutile. Il a pour seule fonction de ne pas focaliser l'attention sur le segment [PR] s'il avait été seul à être tracé[143].

- Par ailleurs, il est demandé de déplacer non seulement les points A et C comme dans la version précédente, mais aussi les points P et R. Ainsi, la droite (IK) qui était immobile va certes le rester lors des déplacements de A et C, mais va devenir mobile lors de ceux de P et R. L'hypothèse est que la conjecture sera alors plus facile à repérer. Il semble en effet plus facile de s'interroger sur les déplacements que sur les invariants. Repérer la perpendicularité de (IK) et de [PR] par exemple, peut être plus facile quand les deux objets se déplacent. En outre, le fait que la droite (IK) soit immobile lorsque les points A et C se déplacent mais mobile lorsque se sont les points P et R peut suggérer un lien entre la droite (IK) et les points P et R. Or, les étudiants, peu familiers de l'environnement Cabri, ne pensent pas à déplacer les points par eux-mêmes, d'où la modification de la consigne. Enfin, en bougeant tous les points, il peut arriver que le segment [PR] devienne vertical ou horizontal ; dans cette position, la perpendicularité de (IK) et de [PR] peut être plus facilement repérée.

Les productions peuvent alors ressembler à :

[143] Toute la difficulté est bien sûr de trouver le « juste milieu » entre un énoncé qui suggère trop la solution et celui qui la cache tellement que personne ne la trouve !



3.4. Exploitation des spécificités de Cabri

Ce n'est évidemment pas la peine de travailler avec Cabri si cet environnement n'apporte rien, notamment si la situation est analogue, voire plus simple, avec un papier et un crayon ! La situation a donc été choisie pour exploiter une des caractéristiques essentielles de Cabri : la manipulation directe du dessin. L'hypothèse qui est faite est que l'aspect dynamique de Cabri facilite ici la conjecture[144]. Pour reprendre à nouveau la terminologie de Duval, il s'agit de faire fonctionner l'appréhension opératoire des figures en s'appuyant sur des modifications positionnelles de ces figures.

Par ailleurs, Cabri permet de tracer directement des médiatrices. Mais ici cet outil « médiatrice » est supprimé. Ce choix est fait afin de :

- Contraindre les étudiants à avoir une procédure de tracé en tête
- Garder une trace de cette procédure de tracé, par l'intermédiaire de l'enregistrement de leur travail et de l'outil « revoir la construction »

---

[144] Une question se pose néanmoins. Les étudiants étaient quasiment obnubilés par leurs remarques du type « tel point bouge, tel autre ne bouge pas,… », et finalement, ils ne voyaient rien d'autre. Est-ce un effet pervers inhérent à l'utilisation de Cabri, où à la manière dont l'initiation à Cabri a été faite ? J'ai, comme il a été expliqué précédemment, attiré beaucoup leur attention sur ce qui se passait quand on bougeait les points dans les exercices d'initiation. Ils ont donc pris l'habitude de s'y intéresser, même si cela ne les incitait pas à se poser des questions pertinentes.

- Analyser si possible, par la suite, les effets de la procédure de construction choisie sur les observations, les raisonnements ou les Cabri-vérifications effectués.
- Là encore, des caractéristiques de Cabri sont exploitées :
- La possibilité de supprimer des outils
- La possibilité de garder trace de la procédure utilisée.

4. Productions des groupes et analyse

L'analyse des tests a été faite avec tous les groupes confondus mais, pour celle de la situation PARC, je vais au contraire conserver la répartition par groupes pour deux raisons :

- Les groupes ne sont pas homogènes sur cette situation :
    - Le premier groupe a une formulation d'énoncé différente
    - le dernier groupe termine, contrairement aux autres, après que trois heures de géométrie plane ont été effectuées en cours (pour les autres groupes, l'expérimentation Cabri est terminée avant que ne commencent les séances de géométrie plane).
    - Des consignes orales ont parfois été ajoutées, en fonction du déroulement de la séance dans le groupe
- Un travail de groupe a parfois eu lieu.

Je vais étudier successivement les quatre groupes. Le lecteur trouvera toutes les productions des étudiants en annexe 25 avec un tableau récapitulatif en annexe 26. Les prénoms fictifs des étudiants utilisés pour l'analyse du test ont été conservés, de sorte que l'on puisse faire le lien entre les productions d'un même étudiant lors du test et de la situation PARC.
Pour faciliter la construction et la lecture des tableaux récapitulatifs, je vais coder les différentes procédures utilisées.

L'outil « médiatrice » a été supprimé. Les différentes procédures de construction des médiatrices utilisées par les étudiants sous Cabri ont été les suivantes :

MP : **M**ilieu et **P**erpendiculaire

CC : **2** intersections d'arcs de **C**ercles

CP : pour la médiatrice d'un segment [AB], construction des **C**ercles de centre A et B de rayon AB, repérage d'une intersection des deux cercles, puis **P**erpendiculaire au segment passant par l'intersection trouvée

En définitive, les différentes conjectures et validations de cette conjecture suivantes ont été rencontrées :

A. Ne repère pas la médiatrice. Décrit ce qui bouge ou ne bouge pas et en fonction de quoi. On se situe ici dans G1I, mais sans réellement aboutir à une conclusion pertinente par rapport à la question posée.

B. (IK) est médiatrice. Pas de vérification ni de démonstration. On se situe ici dans G1I.

C. (IK) est médiatrice. Vérification à partir de milieu et perpendiculaire (ou angle droit). On se situe ici dans G1I si l'on vérifie perceptivement par exemple que le milieu de [PR], tracé par Cabri, est sur la droite, ou encore si on trace la perpendiculaire à [PR] passant par le milieu de [PR], et que l'on vérifie perceptivement que cette droite se superpose à (IK). On se situe dans G2I si l'on vérifie à l'aide de Cabri par exemple que le milieu de [PR] tracé par Cabri appartient à la droite (IK), ou encore si on demande à Cabri de vérifier que (IK) et [PR] sont perpendiculaires, c'est-à-dire si l'on effectue uniquement des Cabri-vérifications, à l'exclusion de toute validation perceptive.

E. [145](IK) est médiatrice, démonstration par l'intersection des 3 médiatrices d'un triangle. On se situe alors dans G2, même si pour cela on s'est situé auparavant dans G1I ou G2I pour effectuer la conjecture.

F. autre conjecture. On se situe alors dans G1I ou dans G2I, selon les cas.

Pour la modalité F, les deux conjectures rencontrées sont : (IK) est perpendiculaire à [PR], et (IK) est axe de symétrie de [PR].

Avant d'analyser les productions de chaque groupe, intéressons-nous à la modalité A.

[145] Un code D avait initialement été prévu mais correspondait en fait à une réponse qui n'a jamais été donnée par les étudiants : il s'agissait d'affirmer que (IK) est médiatrice et d'effectuer des vérifications par tracé de cercles de rayons identiques et de centres respectifs P et R. Cette réponse, de même que la précédente, aurait pu a priori donner lieu à un comportement dans G1I ou dans G2I selon la nature des vérifications.

4.1. Les conjectures de déplacements de points

Pour les productions de type A (Ne repère pas la médiatrice. Décrit ce qui bouge ou ne bouge pas et en fonction de quoi), je ne reprendrai pas dans la suite le détail des productions des étudiants. En fait, dans ces situations, les étudiants n'identifient pas la forme de la réponse attendue. Ce type de production est fréquent : il concerne 17 productions sur les 23 étudiants ayant effectué cette activité. Ils décrivent avec force détails les déplacements des points, des droites, etc. En voici deux exemples :

Béa :

« Quand je déplace le point A, le point I glisse sur la droite (IK) ; celle-ci reste immobile. *Quand je déplace le point C, le point K glisse sur la droite (IK). La droite reste immobile.* *Le point I reste toujours le point d'intersection des médiatrices de [PA] et [AR] ; K est le point d'intersection des médiatrices de « [RC] et [CP] »*

Les deux premières informations sont pertinentes et auraient pu permettre de conclure que la droite (IK) est indépendante de la position des points A et C, puisqu'elle reste immobile lorsque A ou C bougent, elle ne peut donc dépendre que des points P et R. Le chemin vers la conjecture attendue aurait alors été en partie effectué. Il n'en est rien. La phrase suivante n'est qu'une redite de l'énoncé. Une grande partie de la réponse d'ailleurs porte sur les points I et K alors que la question porte sur la droite (IK). On peut penser que pour Béa, la droite (IK) étant immobile, il n'y a rien à dire de cette droite.

Dévi :

« IK « grandit », s'allonge. *Lorsque l'on bouge A, IK s'allonge par I* *Lorsque l'on bouge C, IK s'allonge par K* *Lorsque l'on bouge A, PC et CR ne bougent pas* *Lorsque l'on bouge C, PA et AR ne bougent pas* *Lorsqu'on superpose C sur A, K se superpose sur I, idem pour A sur C »*

Notons tout d'abord que Dévi utilise la notation des longueurs, mais veut probablement parler des segments eux-mêmes, et que, comme Béa, elle ne répond pas exactement à la question posée qui porte sur la droite (et non sur le segment). Par ailleurs, s'il est vrai que I bouge sur la droite (IK), elle-même immobile, quand A bouge, le segment [IK] ne s'allonge pas forcément pour autant : cela dépend évidemment du déplacement appliqué à A. Il en est de même pour C. Les deux informations suivantes ne sont pas très pertinentes : les points P, A, R et C sont indépendants les uns des autres, il est donc normal que [PC] et [CR] ne bougent pas quand A bouge (idem pour la phrase suivante). La dernière remarque est cependant intéressante, Dévi y étudie un cas particulier : elle superpose les points C et A. Cette démarche est pertinente du point de vue de la recherche d'une conjecture, mais ici elle n'est pas productive, la droite (IK) ne dépendant ni de A ni de C.

Il est possible – probable ? – que ce type de productions soit lié au fait d'avoir beaucoup insisté sur le déplacement des points dans les séances d'initiation. Par exemple :
Emma :

> *« Lorsque A se déplace dans le plan, le point I se déplace sur la droite (IK). I est dépendant de A car il est le point d'intersection de [PA] et de [AR]. »*

Bien que, comme Béa, Emma répond au sujet des points (ici le point I) au lieu de la droite (IK), cette remarque correspond exactement au type de remarque attendu dans les premiers exercices d'initiation. Il s'agissait alors de leur faire prendre conscience

- d'une part que, lorsqu'un objet est défini par des propriétés et des relations à d'autres objets, ces propriétés et relations sont conservées par déplacement (ce qui est une manière de vérifier que les objets ont bien été définis par leurs propriétés et relations aux autres objets – donc dans G2 – et non pas de manière perceptive par positionnement visuel avec la souris – donc dans G1I –)
- et que d'autre part, de ce fait, certains points ne peuvent pas être déplacés, ou seulement en étant assujettis à rester sur un cercle ou une droite, par exemple parce qu'ils ont été définis comme appartenant à ce cercle ou cette droite.

L'objectif était alors de leur faire s'approprier une des caractéristiques de Cabri : la manipulation directe des objets, avec la règle de contrat didactique qui lui est associée et que nous avons déjà citée :

> *« le tracé à l'écran d'un dessin attaché à un objet géométrique doit garder au cours du déplacement ses propriétés spatiales rendant compte des propriétés géométriques de cet objet » [Laborde & Capponi, 1994, p. 174]*

Les étudiants, ayant repéré que ce type de remarque m'intéressait, ont éprouvé des difficultés à observer d'autres propriétés. Ils sont restés comme « prisonniers » de ce type de réponse, dans l'impossibilité de changer de point de vue sur le dessin présent à l'écran, dans l'impossibilité également d'exploiter ce type de réponse pour produire une conjecture, comme nous avons montré que Béa aurait pu le faire. Il faut dire que ce type de question « Que se passe-t-il lorsque le point X varie ? » est courant en géométrie dynamique, ou à un niveau de travail dans G2, notamment dans la recherche de lieux géométriques, que ces étudiants n'ont pour la plupart jamais abordé. Le type de tâche correspondant « déplacer le point X pour découvrir les propriétés de l'objet géométrique dont X fait partie » est totalement nouveau, et ils ne disposent d'aucune technique pour y faire face.

Ce type de production peut également s'expliquer par le fait que la question « que se passe-t-il pour la droite (IK)… ? », inhabituelle en mathématiques, amène les étudiants à s'interroger plus sur le « comment ? » que sur le « pourquoi ? », c'est-à-dire à élaborer une description des positions de la droite et des points I et K plutôt qu'un repérage et une démonstration des propriétés de cette droite.

Par ailleurs, il est possible d'interpréter la question « Déplacer les points P, A, R et C dans le plan. Que peut-on dire de la droite (IK) ? » sous la forme : « Que se passe-t-il pour la droite (IK) quand les points P, A, R et C se déplacent ? ». Or, que l'on déplace les points ou non, la droite (IK) est toujours la médiatrice du segment [PR] ! Ainsi, la formulation de la consigne a peut-être eu une incidence sur ce type de réponse.

Du point de vue des paradigmes géométriques, la situation est particulière puisque les étudiants ne résolvent pas le problème posé, ou en tous cas pas de la façon attendue. Néanmoins, on peut considérer que **ces 17 étudiants se situent dans G1I**, puisqu'ils se contentent de faire bouger les objets à l'écran et d'observer.

Du point de vue de la résolution de problème individuelle, cette situation est un échec, compte tenu du nombre d'étudiants qui n'aboutissent pas à effectuer la conjecture attendue[146]. Mais

[146] En fait, puisque l'objectif n'était pas de travailler sur l'établissement d'une conjecture, mais sur les validations proposées pour valider cette conjecture, on aurait pu formuler la question de manière plus fermée pour guider les étudiants, en proposant par exemple : « Que peut-on dire de la droite (IK) par rapport au segment [PR] ? »

cette situation a néanmoins permis d'étudier la position des étudiants par rapport aux paradigmes géométriques, et, si le travail individuel a souvent été limité, le travail de groupe qui a suivi a souvent été riche, comme nous allons le voir plus loin.

Enfin, les formulations sont parfois malhabiles ou mettent en évidence des concepts géométriques insuffisamment maîtrisés :
Hélène :

> *« Je pense que la droite (IK) diminue ou s'agrandit car les points I et K sur cette droite se modifient (se rapprochent ou s'éloignent) ».*

Il semble ici y avoir confusion entre le segment [IK] et la droite (IK).

4.2. Les productions du groupe A

La situation est testée avec le premier énoncé travaillé pour Cabri. Le travail est uniquement individuel. Seulement sept étudiantes sont présentes à cette séance.
La procédure utilisée pour construire les médiatrices est cette fois exclusivement la procédure « milieu et perpendiculaire » (cf. annexe 25, groupe A). Il en est d'ailleurs presque toujours ainsi dans les autres groupes : au total, 20 productions sur les 23 utilisent cette procédure. Les trois étudiantes qui n'utilisent pas cette procédure sont dans le groupe D, nous y reviendrons lors de l'étude des productions de ce groupe.

Les étudiantes ne repèrent rien de particulier dans un premier temps, sauf Carole : l'énoncé induit tellement peu la solution que seule une étudiante sur sept émet une conjecture. Des indications sont alors données oralement au fur et à mesure des besoins. Par exemple : « Trace la droite (IK), trace le segment [PR] », ou bien « Cache toutes les droites hormis (PR) et (IK)[147] », ou encore, « vous pouvez mettre des droites en couleur ou cacher des droites pour y voir plus clair ». Cette dernière formulation, qui laisse plus d'autonomie à l'étudiant et suggère moins directement la réponse attendue, sera utilisée le plus souvent dans les autres groupes, pour débloquer la situation quand personne ne repère la propriété de la droite (IK). L'objectif est en effet d'analyser les types de validations proposées par les étudiants, plus que

[147] Cette remarque pose une question à laquelle se heurte fréquemment tout enseignant : jusqu'où, ou plutôt comment, peut-on aider sans tomber dans l'effet « Topaze » ?

d'analyser leur production de conjectures. Il est donc inutile de laisser un groupe entier déplacer les points à l'écran sans être à même d'observer de propriété particulière.

Tous finissent ainsi par repérer la médiatrice. Plusieurs types de vérifications apparaissent :

- Carole (seule étudiante à se situer correctement dans G2 dans l'item « Carré et Thalès ») a rapidement vu qu'il s'agissait de la médiatrice ; elle cherche et trouve une démonstration, basée sur le concours des médiatrices d'un triangle. **Elle se situe à nouveau, avec réussite, dans G2.**
- France se contente d'une vérification visuelle, comme dans l'item « Carré et Thalès ». **Elle reste ainsi à nouveau dans G1I.** Sa réponse : « *(IK) est médiatrice de [PR]. Je ne sais pas pourquoi* » laisse néanmoins supposer qu'elle souhaiterait une explication qu'elle n'arrive pas à trouver. On peut faire l'hypothèse qu'elle souhaiterait travailler dans G2 (c'est le contrat habituel), mais qu'elle n'en a pas les moyens, faute, d'une part, de connaissances mobilisables sur la médiatrice, et, d'autre part d'imaginer une stratégie de résolution. On ne sait pas si elle n'effectue pas de Cabri-vérifications parce qu'elle n'y pense pas, parce qu'elle ne maîtrise pas suffisamment Cabri (elle avait eu des difficultés dans le test par exemple dans l'item du triangle 13 – 8 – 5), parce qu'elle est déjà convaincue, ou parce qu'elle cherche à se situer dans G2.
- Anne trace le symétrique de P par rapport à (IK). Il se superpose à R mais elle ne comprend pas pourquoi il ne se passe apparemment rien. Elle trace ensuite le milieu de [PR] et s'assure visuellement qu'il est bien sur (IK). Elle se situe ainsi dans G1I. Elle utilise ensuite l'oracle pour vérifier que (IK) et [PR] sont perpendiculaires, puis fait mesurer les longueurs IP et IR pour vérifier qu'elle sont égales. Elle se situe alors ainsi dans G2I. De même, Dévi vérifie dans G1I que le milieu de [PR] est sur (IK), puis dans G2I que (IK) et [PR] sont perpendiculaires. Ces deux vérifications conjointes seront relativement fréquentes. **Ces deux étudiantes se situent indifféremment dans G1I et G2I selon les vérifications à effectuer**. Elles ne semblent pas faire de différence entre les deux types de validation. Cela confirme que G2I est plus proche pour l'étudiant de G1 (ou G1I) que de G2, mais aussi l'absence de conscience pour les étudiants de l'existence de différents paradigmes.
- Béa, Emma et Gala n'effectuent que des Cabri vérifications. **Ces trois étudiantes se situent exclusivement dans G2I**. Elles vérifient la perpendicularité avec l'oracle et le milieu de deux manières différentes : Béa et Emma placent l'intersection de (IK) et [PR] et font afficher les longueurs correspondantes pour vérifier leur exacte égalité,

Gala place le milieu de [PR] et utilise à nouveau l'oracle pour vérifier que ce point appartient à (IK). Ces productions montrent que l'initiation courte proposée permettait néanmoins de rendre disponibles les procédures de vérification de milieu de G2I.

Gala, qui effectue ces Cabri-vérifications, explicite, comme France, que (IK) est médiatrice mais qu'elle ne sait pas pourquoi : *« (IK) est médiatrice de [PR] car ? »*. Elle se situe ainsi dans G2I, probablement parce que, comme France, elle n'arrive pas à se situer dans G2.

Les quatre autres étudiantes, par contre, travaillent dans G2I (et éventuellement G1I) et apparemment s'en satisfont : elles ne cherchent pas à produire une autre démonstration, leur contrat leur paraît rempli.

Du point de vue des procédures de construction d'une médiatrice, ces productions confirment les résultats déjà obtenus : « la médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à [AB] qui passe par son milieu » est une connaissance bien maîtrisée. Cette définition permet la construction des médiatrices citées dans l'énoncé, mais aussi la reconnaissance visuelle de (IK) comme médiatrice et enfin la mise en place de Cabri-vérifications. Mais ces propriétés de milieu et perpendiculaire ne peuvent pas être obtenues directement par démonstration[148] dans le cas présent, les deux démonstrations possibles étant basées, la première sur l'équidistance des points d'une médiatrice d'un segment aux extrémités de ce segment, et la seconde sur le concours des médiatrices d'un triangle. Ainsi, aucune démonstration n'est envisageable sur cette base pour les étudiants. Seules des Cabri-vérifications peuvent être mises en place. Le changement de point de vue sur la médiatrice qui consiste à penser « ensemble de points équidistants de P et R » plutôt que « milieu de [PR] et perpendiculaire à [PR] » et qui est utile dans la démonstration 1 (cf. paragraphe 3.2, pages 325 et suivantes), n'est pas mobilisable, et Cabri n'y change rien.

4.3. Les productions du groupe B

Le fonctionnement du groupe B est différent : le travail est effectué d'abord individuellement, pendant environ une demi-heure, puis en groupe (un seul groupe de 4 compte tenu de l'effectif), pendant à nouveau à peine une demi-heure. Pour cette deuxième étape, une feuille est remise au groupe avec la consigne écrite :

---

[148] sauf bien sûr à exploiter le lien entre les deux caractérisation de la médiatrice, perpendiculaire et milieu d'une part, équidistance des extrémités du segment d'autre part.

Que peut-on dire de la droite (IK) ? (Répondez ici)

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)

et la consigne orale :

Fournissez une réponse commune aux deux questions.

Dans le temps de travail individuel, Hélène et Kédy n'ont pas repéré la médiatrice (conjecture et validation de type A), et ont même refait le dessin. Ce sont elles qui étaient restées dans G1I dans l'item « Carré et Thalès », comme le rappelle le tableau ci-dessous (le lecteur trouvera ce tableau avec tous les étudiants en annexe 27). Elles semblent en difficulté dès que la situation est mathématiquement un peu complexe.

Prénom	Triangle 13 / 8 / 5	Triangle 3 / 4 / 5	Carré et Thalès	Situation PARC
Hélène	G1I	G2I	G1I	
Irène	G1I G2	G2I	G2I	G2I
Jeanne	G1I G2I	G2I	G2I	G2I
Kédy	G1I	G2	G1I	

Irène et Jeanne ont repéré la médiatrice et ont fait des Cabri-vérifications (conjecture et validation de type C) : **elles se situent dans G2I,** comme pour l'item « Carré et Thalès ». C'est également elles qui avaient montré le comportement le plus expert à l'item « triangle 13 / 8 / 5 ». Irène semble déçue de ne pas pouvoir se situer à nouveau dans G2, comme Gala précédemment : *« J'ai fait des mesures, je pense que c'est ça, mais je ne peux rien prouver ».* Il semble donc que pour elle, Cabri permette d'effectuer des conjectures, mais ne l'empêche pas d'essayer de se situer dans G2 ; c'est plutôt son manque de maîtrise de la médiatrice qui l'en empêche.

Je n'ai pas cherché à faire trouver la conjecture à toutes puisqu'un travail de groupe allait cette fois suivre, assurant à toutes le repérage de la propriété attendue.

Décrivons la demi-heure de travail de groupe qui suit.

Déroulement	Commentaires
Dans un premier temps, Irène et Jeanne, qui ont repéré la médiatrice, montrent aux autres cette médiatrice en bougeant les divers points	
Irène demande aux autres de venir devant son ordinateur, car elle a peur de ne pas retrouver la même conclusion sur les autres écrans	elle a encore besoin de se convaincre
Il faut alors un certain temps pour convaincre Hélène et Kédy de la propriété : *« Ah bon, tu es sûre ? »*	
Jeanne parle de médiatrice qui se coupent, de triangle circonscrit ou inscrit. On en restera là.	La connaissance nécessaire pour effectuer la démonstration 2 n'est pas loin, mais n'est pas opérationnelle.
« Tu l'as montré par Cabri, maintenant, il faut le démontrer »	Toutes semblent néanmoins convaincues qu'il **faut** effectuer une démonstration, sans que l'on sache si cette nécessité est liée au contrat didactique ou à leur besoin d'une démonstration pour comprendre ou se convaincre.
Elles font des essais en essayant de superposer P et R, puis découvrent les boutons symétrie et essaient de les utiliser. Elles vérifient que le milieu du segment [PR] est bien l'intersection de la droite (IK) et du segment [PR].	
Jeanne revient sur son ordinateur pour montrer les triangles. *« Comme les triangles ont un côté commun, ils ont une médiatrice commune »*	
Kédy commence à oraliser une démonstration correcte. Hélène l'interrompt pour continuer. Kédy termine. Applaudissements.	On sent un vrai plaisir à avoir réussi une démonstration qui ne leur paraissait pas du tout évidente au départ.
La rédaction se fait ensuite à quatre pour l'écrit.	
Dans ce travail de groupe, chacune retourne sur son poste de travail à un moment ou à un autre, pour vérifier que « ça marche ».	

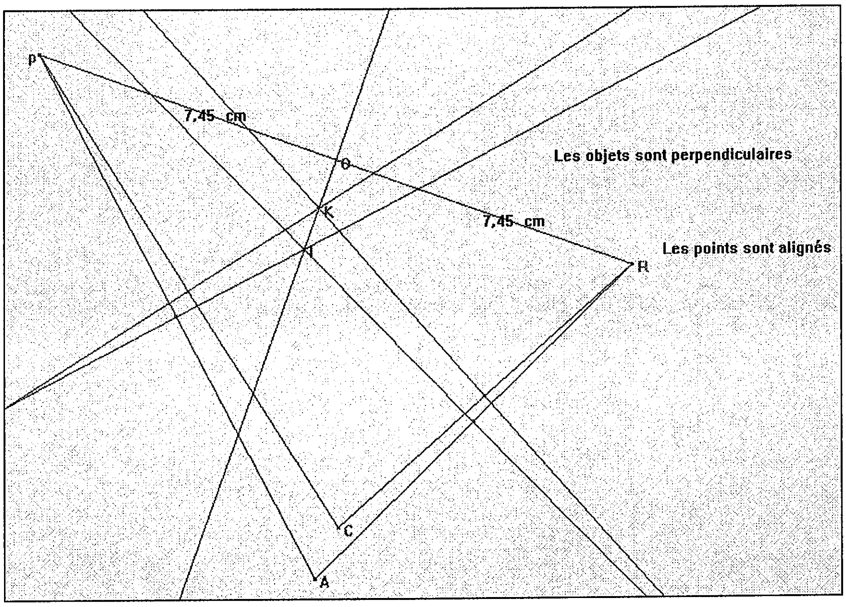
Il s'agit ici d'un travail de groupe idéal. Une partie du groupe a repéré individuellement la propriété, l'autre non. Aucune étudiante n'a effectué de démonstration. Dans le travail de groupe, celles qui ont trouvé la propriété convainquent dans un premier temps les deux autres du résultat, puis toutes ensemble essaient de démontrer.

Cette démonstration n'est pas le fruit d'une étudiante, mais de trois au moins. Une en particulier ramène plusieurs fois l'idée des médiatrices concourantes, sans pouvoir en conclure quoi que ce soit. Une autre se saisit de l'idée pour amorcer une démonstration qui est ensuite précisée par une troisième. Il y a vraiment collaboration entre les quatre étudiantes et on peut vraiment penser que, seules, aucune d'elles ne serait arrivée au résultat.

Par ailleurs, elles sont très nettement conscientes du fait qu'« avec Cabri, on voit bien que ça marche », mais que ça ne constitue pas une démonstration. Elles cherchent à se situer dans G2, ce qu'elles vont faire en groupe, même si, individuellement, elles n'en ont pas les moyens. On ne sait pas si ce besoin de démonstration est lié

- au contrat didactique : « on démontre parce que, dans la classe de mathématiques, on a appris qu'il ne fallait jamais rien affirmer sans démontrer et qu'au concours, c'est ce qu'on nous demande »,
- ou au fait que Cabri nous montre une propriété mais ne nous explique pas pourquoi elle est vérifiée : « on voit que « ça marche » mais on ne comprend pas pourquoi ». **Cabri apparaît alors comme un lanceur de défi, montrant une propriété mais laissant le soin à l'utilisateur de la démontrer pour comprendre pourquoi elle est vérifiée.**

Cabri ne les a pas enfermées dans ses paradigmes mais a bien joué son rôle en permettant, par son aspect dynamique, de découvrir la conjecture. Jeanne, en particulier, repère la perpendicularité à un moment où les points A et C sont très proches et la perpendicularité se voit bien :



Pour conclure, notons que les procédures utilisées pour construire les médiatrices et pour montrer sous Cabri ont été du type milieu et perpendiculaire (alors que la démonstration repose sur le théorème de concours des trois médiatrices d'un triangle). Les égalités de distance n'ont jamais été exprimées.

4.4. Les productions du groupe C

Deux élèves seulement sont présents dans ce groupe à la dernière séance (ils étaient 4 au départ des 4 séances). Le déroulement est identique à celui du groupe précédent : travail individuel avec production d'un écrit puis travail de groupe avec pour consigne de rendre une réponse commune aux deux questions posées (cf. annexe 25, groupe C).

Après le travail individuel sur la figure, Louis a repéré que (IK) est la médiatrice de [PR], et pour s'en assurer propose de vérifier que (IK) est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu. Pour cela, il vérifie visuellement que le point T (milieu de [PR]) est sur (IK) puis il mesure l'angle $\widehat{PTI}$ (T étant le milieu de [PR]) et il écrit :

« (IK) est la médiatrice de [PR].   *Vérifier que (IK) est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu : mesurer l'angle* $\widehat{PTI}$ *»*

Louis se situe ainsi dans G1I (vérification visuelle du milieu) et dans G2I (mesure de l'angle pour conclure à la perpendicularité).

Après le travail individuel sur la figure, Marie a peu d'éléments :

« Quand on bouge C et A, la droite (IK) ne bouge pas
Quand on bouge P et R, elle bouge
I : intersection des médiatrices de [AR] et de [PA]
K intersection des médiatrices de [RC] et de [CP]
Tous les points issus de la médiatrice (elle utilisera toujours cette expression au lieu de dire simplement « les points de la médiatrice ») *sont équidistants des extrémités du segment donc quand je bouge R ou P, la droite bouge. »*

Dans le travail de groupe, Louis s'arrête longtemps à ses premières constatations : il vérifie la perpendicularité en mesurant un angle, place le milieu de [PR] et vérifie à l'œil qu'il est sur (IK). Et comme la séance s'éternise, il cherche autre chose, essaie notamment de repérer des parallèles, de positionner les points PARC en rectangle, en carré, …
Très vite, Marie : *« I est sur la médiatrice de [AR] et de [PA], donc IA = IR. »* Elle n'a pas alors encore vu que (IK) est la médiatrice de [PR].
Sa remarque, pourtant essentielle, ne sera pas reprise avant un bon moment.
Louis montre qu'il a repéré la médiatrice. Marie (*« J'avais pas vu ça »*) va alors sur son écran pour voir si ça marche. Ils resteront à discuter, chacun sur sa machine dans la suite pour faire des essais séparément. Marie marque sur son écran le milieu de [PR], elle fait bouger les points et se convainc.
Louis : *« Y a 3 médiatrices qui se rejoignent en I. Y a pas une histoire de... En fait, le point d'intersection, c'est le point I. »* (la mémoire lui fait défaut : il se souvient bien qu'il y a un théorème avec des intersections de médiatrices mais ne peut le formuler. Il abandonne très vite cette piste qui ne sera jamais reprise ensuite)

(Long blanc)
Louis : « *Alors, on met ça ?* »
Marie : « *oui* »
Et Louis écrit sur la feuille du groupe :

« (IK) est la médiatrice de [PR]
et dans la case « Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? » :
1 - Montrer que (IK) passe par le milieu de [PR]
2 - Montrer que (IK) est perpendiculaire à [PR]

3 - Montrer que l'ensemble des points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment »

Ce troisième point reste flou pour Louis. Il l'écrit à la demande de Marie mais ne semble pas convaincu

Louis : *« Justifier qu'une droite est médiatrice... il faut prouver qu'elle passe par le milieu de [PR] et qu'elle est perpendiculaire à [PR] ».* On voit apparaître ici « la » définition classique de la médiatrice.

Marie : *« il faut mesurer l'angle »*

Dans le dialogue qui suit, malgré l'utilisation du mot « démontrer » par Louis, il s'agit pour Marie de démontrer dans G2, mais pas pour Louis qui se satisfait pleinement de sa preuve dans G2I. Marie essaie ensuite de démontrer, Louis cherche à peine à comprendre ce qu'elle dit.

Marie finit par prendre sous Cabri les mesures des segments [IA], [IP], [IR]. Elle constate l'égalité. Elle fera ensuite de même avec le point K.

(Ils parlent bas entre eux, très peu sûrs d'eux.)

Marie essaie de démontrer que (IK) est la médiatrice de [PR]. Elle produit finalement le raisonnement suivant sur la feuille commune :

« I intersection des médiatrices [AR] et [PR] (il s'agit en fait des médiatrices **de** [AR] et **de** [PR]) »

***Donc [IA]=[IP]=[IR]* (il s'agit sans doute pour elle de distances)**

[IP]=[IR] donc I milieu de [PR]*

K intersection des médiatrices [RC] et [CP]
Donc [KC]=[KR]=[KP]
*[KR]=[KP] donc K milieu de [PR]**
donc (IK) passe par le milieu de [PR] et elle est médiatrice de [PR] car tous les points issus de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment.

* : ces conclusions sont erronées mais elle ne s'en aperçoit pas.

Le travail en équipe s'arrête là.

J'interviens alors pour un entretien. Il s'agit pour moi de leur faire préciser certains éléments de leur production et de leur faire prendre conscience de leur rapport à l'objet géométrique « médiatrice ».

Louis explique alors qu'il a montré (avec Cabri) qu'il s'agit de la médiatrice et il n'éprouve pas le besoin de démontrer mathématiquement. Il cherche donc autre chose que le fait que (IK) soit la médiatrice de [PR] mais ne trouve pas.

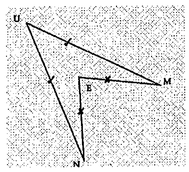
On arrive ensemble à la conclusion que :

Pour Louis, les mesures sur le dessin Cabri permettent de montrer la médiatrice et il pense que s'il faut continuer, c'est qu'il y a autre chose à trouver, mais il ne sait pas bien quoi.

En ce qui concerne Marie, l'entretien met en évidence que la première définition de la médiatrice (droite perpendiculaire au segment passant par son milieu) est mobilisable : *« je vois une droite perpendiculaire passant par le milieu, je la reconnais comme étant une médiatrice. Si je veux montrer que c'est une médiatrice, je dois prouver qu'elle est perpendiculaire et passe par le milieu. Si je sais qu'une droite est médiatrice, elle est perpendiculaire et passe par le milieu ».* Néanmoins, dans le débat entre les deux étudiants, jamais n'ont été avancés d'arguments du genre « telle droite est la médiatrice de ..., donc elle est perpendiculaire à ... et passe par leur milieu » (peut-être parce que les droites qui sont construites comme des médiatrices ne sont pas nommées, seules leurs intersections sont nommées, peut-être aussi parce que de toutes façons, cela ne débouche sur rien).

La deuxième définition (la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment) est par contre plus problématique : *« Si I est sur la médiatrice de [AR], je peux dire que* $IA = AR$ (autrement dit, utiliser la définition pour conclure en termes de distance), *je peux dire que tous les points de la médiatrice sont à égale distance des extrémités du segment* (autrement dit, réciter la définition), *comme une comptine apprise par cœur, mais je ne peux dire que si IP=IR, alors il est sur la médiatrice de [PR]* (autrement dit utiliser une information d'égalité de distance pour conclure sur l'appartenance à une médiatrice), *et encore moins que si I et K sont à égale distance de P et R, alors (IK) est la médiatrice de [PR]* (autrement dit démontrer qu'une droite est médiatrice en utilisant cette définition) *»*.

Ceci est à rapprocher des résultats obtenus dans le test papier à l'item 8 où il s'agit de tracer une médiatrice dans la situation du quadrilatère convexe avec deux paires de côtés consécutifs de même longueur : seulement la moitié des étudiants tracent directement la droite (UE), c'est-à-dire sont capables de décoder que $NE = ME$ et $NU = MU$ et d'en déduire que (UE) est la médiatrice de [MN].



Marie fait alors remarquer que si K avait été à la même distance de P et R que I, elle aurait probablement vu que (IK) était la médiatrice de [PR], parce que cela correspond à la construction type qu'elle a l'habitude de faire pour construire une médiatrice : deux arcs de cercles de chaque côté de [PR], de même rayon. Ainsi, les points tracés pour obtenir la médiatrice sont toujours tous les deux à une même distance des extrémités du segment.

Du point de vue des paradigmes géométriques, Louis se situe dans G2I, même s'il utilise l'expression « démontrer ». Il semble même avoir du mal à comprendre ce que fait Marie quand elle cherche une démonstration. Marie, quant à elle, se situe dans G2, même si ses connaissances et compétences ne lui permettent pas d'aboutir à une démonstration correcte. Elle effectue par contre de nombreuses Cabri-vérifications pour se convaincre du résultat avant d'effectuer cette démonstration.

Du point de vue de la médiatrice, cette analyse de cas permet de mettre en évidence plusieurs faits déjà rencontrés :

- La définition de la médiatrice par milieu et perpendiculaire est bien maîtrisée. Elle peut être utilisée dans les deux sens :
  - d est la médiatrice de $[PR] \Rightarrow$ d est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu
  - d est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu] $\Rightarrow$ d est la médiatrice de [PR]
- La définition portant sur l'équidistance des points est mal maîtrisée. Dans le cas de Marie, elle peut être utilisée sous la forme :

  $$\left\{\begin{array}{c}\text{d est la médiatrice de }[PR]\\ \text{I est un point de d}\end{array}\right\} \Rightarrow IP = IR$$

  mais pas sous la forme :

  $$IP = IR \Rightarrow \text{I est sur la médiatrice de } [PR]$$

- Une autre conclusion concernant la médiatrice apparaît ici. L'implication :

  $$\text{I et K sont sur la médiatrice de } [PR] \Rightarrow (IK) \text{ est la médiatrice de } [PR]$$

  n'est pas mobilisable pour Marie.

  Cette implication se heurte en effet à la définition de la médiatrice : « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment », qui fait référence à une infinité de points, tandis que l'implication précédente ne porte que sur deux points. La question sous-jacente semble être : I et K sont équidistants des extrémités du segment mais pourquoi est-ce le cas des autres points de la droite ? Or cet aspect n'est quasiment jamais abordé dans les manuels scolaires, comme je l'ai montré au chapitre 3, § 4.3 (cf. pages 152 et suivantes).

4.5. Les productions du groupe D

Si pour les autres groupes, le travail en cours et travaux dirigés sur la géométrie plane débute après ces séances avec Cabri, ce n'est pas le cas du groupe D, à cause de difficultés dans la gestion du planning des séances. Le chapitre « géométrie plane » commence par une séance pendant laquelle les étudiants travaillent seuls, sans enseignant mais sur une plage horaire prévue dans l'emploi du temps, à partir du document disponible en annexe 28. Ce dispositif pédagogique permet de mettre en place des temps de co-formation où les étudiants progressent grâce à leurs pairs afin d'optimiser le temps de face à face avec l'enseignant. Il s'agit pour cette séance d'effectuer une classification des quadrilatères, ensuite de suivre des scénarios de construction, et enfin de rédiger un scénario de construction. Le travail ensemble en cours commence par un point sur une classification des quadrilatères, puis l'activité suivante est proposée :

Activité : Polygones réguliers.

1. Tracer tous les polygones réguliers que l'on peut tracer à la règle et au compas
2. Tracer d'autres polygones réguliers à la règle, au compas et au rapporteur

Pendant toute cette séance, il sera systématiquement mis en évidence pourquoi les tracés effectués produisent la figure attendue. En particulier, les étudiants tracent sans hésiter des arcs de cercles pour obtenir une perpendiculaire. Je m'attache alors à faire expliciter aux étudiants pourquoi on obtient bien des perpendiculaires. Je leur fais expliciter les deux propriétés caractéristiques de la médiatrice et comment on utilise l'une pour construire (ensemble des points équidistants des extrémités du segment) et l'autre pour conclure (droite perpendiculaire au segment). Cette remarque sera faite plusieurs fois pendant la séance, d'autres du même type seront faites pour chaque construction, en particulier dans le cadre de la construction de l'hexagone régulier ou de l'octogone régulier.

Les hasards du calendrier font que cette séance de cours a lieu, pour le groupe D, avant la séance de travail sur la situation PARC ou même celle sur de la passation du test. Je supprime alors la séance de test, mais, tout en imaginant que la situation PARC ne va plus poser aucun problème aux étudiants, je décide de la conserver. Ainsi, nous n'avons pas eu l'occasion de reparler de médiatrice lors des séances sous Cabri, le point sur ce sujet fait à l'issue du test avec les autres groupes n'ayant pas eu lieu puisque le test a été supprimé pour eux.

Ce groupe est constitué de 10 étudiantes, séparées en trois sous-groupes D1, D2 et D3. Comme dans les deux groupes précédents, la situation est d'abord proposée en travail individuel pendant environ une demi-heure, pendant laquelle les étudiantes effectuent la construction sous Cabri et doivent répondre aux deux questions sur leur feuille personnelle : « Que peut-on dire de la droite (IK) ? » puis : « Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible) ». Un travail en trois sous-groupes est ensuite effectué, pendant environ trois quarts d'heure. Pendant ce temps, les étudiants doivent produire sur une nouvelle feuille une réponse commune aux deux questions précédentes. Le lecteur trouvera en annexe 25, groupes D1, D2 et D3, les descriptions des productions des dix étudiantes et des trois sous-groupes.

Au niveau de la construction des médiatrices, si la procédure « milieu et perpendiculaire » reste majoritaire (sept étudiantes sur 10), ce groupe est le seul dans lequel les procédures « une intersection de cercles de même rayon et perpendiculaire» (CP, 2 étudiantes) et « deux intersections de cercles de même rayon » (CC, 1 étudiante) apparaissent. Or c'est également le seul groupe pour lequel un point n'a pas été fait au sujet des constructions de médiatrices dans le cadre des séances Cabri, comme signalé ci-dessus. C'est peut-être pour cela que la procédure standard, ou une de ses variantes, réapparaît ici, alors qu'elle est plus compliquée à mettre en œuvre que la procédure « milieu et perpendiculaire » sous Cabri, utilisée à l'exclusion de toute autre dans les autres groupes pour cette activité. Autrement dit, la séance de construction à la règle et au compas faite en cours avec explicitation des propriétés sous-jacentes ne suffit pas à transformer les procédures mises en œuvre avec Cabri et semble moins efficace du point de vue des constructions effectuées avec Cabri que le temps de mise au point sur les médiatrices effectuées dans le cadre des séances Cabri elles-mêmes.

Du point de vue des conjectures et des vérifications effectuées, voici un tableau récapitulatif des productions individuelles des étudiants et des sous-groupes (cf. début du paragraphe 4 de ce chapitre, pages 333 et suivantes, pour retrouver le détail des procédures) :

<table>
<tr><th colspan="5">Situation PARC</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">procédure</th><th colspan="2">paradigme</th></tr>
<tr><th></th><th>Travail individuel</th><th>Travail de groupe</th><th>Travail individuel</th><th>Travail de groupe</th></tr>
<tr><td>Olga</td><td>A</td><td rowspan="3">A</td><td></td><td rowspan="3">G1I</td></tr>
<tr><td>Pierre</td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>Quiéta</td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>Reine</td><td>A</td><td rowspan="3">E</td><td></td><td rowspan="3">G1I G2</td></tr>
<tr><td>Sophie</td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>Tania</td><td>F</td><td>G1I</td></tr>
<tr><td>Ursa</td><td>F</td><td rowspan="4">C</td><td>G1I</td><td rowspan="4">G1I G2I</td></tr>
<tr><td>Véro</td><td>F</td><td>G1I</td></tr>
<tr><td>Wanda</td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>Yona</td><td>A</td><td></td></tr>
</table>

Ainsi, aucun étudiant ne perçoit seul la médiatrice. Trois d'entre eux n'en sont pourtant pas loin :

- Tania vérifie dans G1I que K et I sont équidistants de P et R, écrit des égalités de distance, mais ne conclut pas
- Véro vérifie dans G1I que (IK) est perpendiculaire à [PR] et conclut sur cette propriété sans repérer que (IK) passe par le milieu de [PR]
- Ursa vérifie dans G1I que R est le symétrique de P par rapport à l'axe (IK), puis dans G2I que (IK) est perpendiculaire à [PR]. Elle conclut que (IK) est l'axe de symétrie de [PR]. On peut considérer qu'elle a trouvé la propriété, sous une forme différente mais équivalente à celle attendue.

Dans les travaux de groupes, le sous-groupe D1 ne perçoit pas la médiatrice ; le sous-groupe D3 la reconnaît et effectue une Cabri-vérification et une vérifications visuelle : il utilise l'oracle pour savoir si (IK) et [PR] sont perpendiculaires puis place le milieu de [PR] et vérifie visuellement qu'il est sur (IK). Il se situe ainsi, comme on l'a rencontré plusieurs fois, dans G1I et G2I. Le sous-groupe D2, lui, reconnaît la médiatrice et effectue une démonstration, basée sur le concours des médiatrices d'un triangle.

Intéressons-nous plus précisément à ce sous-groupe D2 qui réussit à effectuer une démonstration. La production écrite du sous-groupe est la suivante :

> *« si on trace un cercle de centre K, ce cercle passe par les points PCR, un cercle de centre I, ce cercle passe par les points PAR.*
> *IK est la médiatrice de PR ! (Sophie a bougé le point R et j'ai remarqué que la droite IK passait par le milieu de PR à angle droit, à vue d'œil).*
> *On a tracé les cercles de centre P et rayon PR et de centre R et de même rayon. Les deux points d'intersection se situent sur IK. IK est donc la médiatrice de PR*
> *On a fait ensuite référence à notre savoir : les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point (I ou K) le centre du cercle circonscrit au triangle (K → PRC, I → PAR), ils ont un côté en commun donc la médiatrice passera par I et K. »*

Plusieurs remarques peuvent être faites sur cette production :

- Conformément à la consigne, plusieurs moyens pour vérifier que (IK) est la médiatrice de [PR] sont proposés et mis en œuvre par les étudiants, certains dans G1I, d'autres dans G2I, voire dans G2.
- C'est l'aspect dynamique de Cabri qui permet de repérer la médiatrice. Autrement dit, Cabri est effectivement ici un outil efficace pour élaborer des conjectures, au moins dans certains groupes.
- Le travail individuel prépare le terrain mais c'est dans le travail collectif que la réponse émerge, et celle-ci n'est pas le fait d'un individu, mais de plusieurs co-intervenants dans le groupe, comme cela a déjà été le cas dans le groupe B.
- Les égalités permettant de conclure que (IK) est la médiatrice de [PR] sont en partie écrites sur la production de Tania, et c'est néanmoins la démonstration utilisant le point de concours des trois médiatrices qui est utilisée. En particulier Tania rappelle que « tous les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment » et cela lui permet de déduire que, un point étant sur la médiatrice, il est équidistant des extrémités du segment ; mais la réciproque n'est ni citée ni surtout utilisée : les égalités de distance sont écrites : KP = KC = KR, mais le fait que K soit sur la médiatrice de [PR] n'émerge pas, ni dans son travail individuel, ni ensuite dans le travail de groupe. On retrouve ici la difficulté décrite par Marie d'utiliser des égalités de distances pour conclure à une médiatrice.
- Deux vérifications sont effectuées pour vérifier que (IK) est la médiatrice de [PR] :

  - visuellement, le groupe vérifie que le milieu de [PR] est sur (IK) (G1I) et avec l'oracle que [PR] est perpendiculaire à (IK) (G2I),
  - puis deux cercles sont tracés, de centre P, puis R, et de rayon RP, pour vérifier que leur intersection est sur (IK). Il s'agit à nouveau d'une vérification visuelle, même si une construction est effectuée, puisque le fait que les intersections sont sur (IK) n'est pas validé par l'oracle mais visuellement (G1I).

  En fait, les étudiants du groupe n'ont pas tous utilisé la même procédure pour tracer les médiatrices, et ils ne sont manifestement convaincus que par leur méthode. C'est pourquoi le fait que (IK) soit la médiatrice de [PR] est vérifié soit par les propriétés de milieu et perpendiculaire, soit en s'assurant que les intersections des cercles de centres P et R passant par R et P sont sur (IK).
- Cette procédure de construction par intersection de cercles n'est pas mise en lien avec la définition correspondante : aucune égalité de longueur n'est remise en évidence dans le travail de groupe. Cette procédure de construction reste une procédure automatique, qui ne donne aucun élément quand on se situe dans G2.
- Après avoir vérifié que (IK) est médiatrice de [PR], les étudiants ont néanmoins le souci de démontrer.

Le sous-groupe D3, quant à lui, conclut que (IK) est médiatrice de [PR] après des vérifications dans G1I et dans G2I. Une de ces vérifications, dans G1I, est intéressante : il s'agit de tracer les cercles circonscrits aux triangles PAR et PCR. Ainsi, un cercle de centre I et un autre de centre K, de rayon quelconque, sont tracés. Ces cercles sont ensuite tirés de façon à passer par un sommet de PRC (pour le cercle de centre K) ou de PAR (pour le cercle de centre I). Les étudiants vérifient alors perceptivement que P, R et C sont sur le premier cercle, P, A et R sur le second. Néanmoins, aucune remarque n'est écrite sur ces cercles circonscrits, et aucun lien entre centre du cercle circonscrit et intersection des médiatrices n'est effectué. Le centre du cercle circonscrit et les médiatrices ne sont pas disponibles en terme d'équidistances.

Sur cet exemple, on constate que Cabri permet de faire des conjectures mais n'aide pas à construire une démonstration, dès lors que les connaissances nécessaires ne sont pas disponibles.

Il est manifeste que le cours qui s'est déroulé (le matin même pour certains !), n'a pas eu d'effet sur le déroulement de la séance, et il est intéressant d'en analyser les raisons.

- Le lien entre les techniques de tracé et les propriétés des objets utilisés a essentiellement été fait oralement, je n'ai pas tenu compte des notes qui avaient été prises : les étudiants étant alors engagés dans une tâche de construction de figure, ils n'ont peut-être pas attaché d'importance à mes commentaires. La problématique du pourquoi était celle de l'enseignant, pas celle de l'étudiant, pour qui l'objectif était de savoir tracer tel ou tel objet pour répondre aux exigences du concours, et non pas de justifier ces constructions, pensant qu'il serait évalué sur la compétence à réaliser le tracé, pas à le justifier.
- Les définitions utilisées ont été rappelées, mais elles n'ont pas vraiment été mises en œuvre par les étudiants. Elles ont été explicitées après la construction, mais n'étaient pas nécessaires au moment du tracé. De ce fait, elles n'avaient pas de pertinence pour les étudiants. Une autre stratégie sera essayée à l'avenir : « choisissez une propriété du parallélogramme (ou de la médiatrice, etc.). Utilisez cette propriété pour élaborer une construction possible du parallélogramme. », stratégie qui oblige a priori l'étudiant à mobiliser la propriété pour effectuer la construction, plutôt que de la repérer après la construction.

Mais, dans un autre registre, la distinction G1/G2 peut être un outil d'analyse des difficultés ici rencontrées par les étudiants pour s'approprier les remarques de l'enseignant. L'étudiant est dans une activité de tracé de figure, donc dans G1. L'enseignant qui veut justifier les constructions proposées se place tout naturellement dans G2. Étudiants et enseignant n'étant pas dans le même paradigme, il y a peu de chances qu'ils puissent réellement communiquer, et la médiation de Cabri ne change rien à cette difficulté ! Une hypothèse qui peut alors être faite est qu'une présentation explicite de ces deux paradigmes aux étudiants, ainsi qu'une prise en compte plus systématique par l'enseignant de ces paradigmes dans son discours méta, permettrait aux étudiants de se situer plus facilement par rapport à la demande de l'enseignant. C'est ce qui va en partie être expérimenté et présenté dans le chapitre suivant.

5. Conclusions …

5.1. … autour de la médiatrice

Pour simplifier le discours dans le paragraphe qui suit, notons D1 la définition de la médiatrice d'un segment comme droite perpendiculaire au segment passant par son milieu et D2 la définition comme ensemble des points équidistants des extrémités du segment. L'étude des tests papier a permis de mettre en évidence le statut dissymétrique de ces deux définitions habituelles de la médiatrice d'un segment. D1 est utilisée explicitement dès qu'il faut décrire la médiatrice, D2 est utilisée implicitement pour la construction standard, majoritairement utilisée dans les situations sans contrainte.

L'analyse du travail effectué par les étudiants avec Cabri montre que D1 peut facilement devenir :

- support d'une construction dès que les outils s'y prêtent. C'est le cas avec Cabri : dans le test ou dans la situation PARC, quand il s'agit de construire des médiatrices, les étudiants utilisent prioritairement la procédure « milieu et perpendiculaire ».
- support de vérifications perceptives ou de Cabri-vérifications. C'est le cas dans la situation PARC quand il s'agit de vérifier que (IK) est la médiatrice de [PR].

Cette définition est en effet disponible, et donc facilement utilisable dans diverses situations, et dans les deux sens de l'équivalence :

- d est la médiatrice de [PR] $\Rightarrow$ d est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu
- d est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu] $\Rightarrow$ d est la médiatrice de [PR]

La définition D2 quant à elle, reste difficilement mobilisable, et encore moins disponible avec Cabri :

- au niveau des constructions, où la procédure qui est « standard » en version papier-crayon devient nettement minoritaire
- au niveau des vérifications perceptives, où elle est très rarement utilisée
- au niveau des Cabri-vérifications, où elle disparaît totalement

- au niveau des démonstrations, où elle n'est pas utilisée alors que c'est possible.

Quand elle est utilisée, D2 l'est éventuellement dans le sens :

I est sur la médiatrice de $[PR] \Rightarrow IP = IR$

mais pas dans le sens :

$IP = IR \Rightarrow$ I est sur la médiatrice de $[PR]$

On peut penser que cette difficulté d'utilisation est liée à un problème de quantification. D2 définit la médiatrice d'un segment comme l'ensemble de **tous** les points équidistants des extrémités du segment, tandis que pour utiliser D2, **il suffit de** travailler sur **2 points.**

5.2. … au niveau des paradigmes dans l'environnement Cabri

Les conclusions qui peuvent être tirées sont de natures différentes.

Tout d'abord, l'utilisation d'un outil nouveau permet en partie de se dégager des automatismes acquis dans l'environnement papier-crayon en créant un déséquilibre cognitif, mais il nécessite un apprentissage qui ne doit être ni trop limité, ni trop fermé, afin que les contraintes de manipulation ne se substituent pas à la réflexion.

Les remarques particulières liées à la situation du triangle aplati (est-ce un triangle ?) ou du « carré et Thalès » (difficulté liée aux connaissances et compétences insuffisantes des étudiants dans G2), se retrouvent de la même manière dans l'environnement papier-crayon et avec Cabri.

Cabri, par son aspect dynamique d'une part, par ses possibilités de vérification dans G1I ou G2I d'autre part, permet d'émettre des conjectures dans des situations ou l'environnement papier-crayon, statique, ne l'aurait pas permis.

Quelques étudiants, soit parce qu'ils en ressentent le besoin, soit pour satisfaire au contrat didactique, ne se contentent pas de ces validations dans G1I ou G2I mais cherchent à se situer dans G2. Le frein majeur pour se situer efficacement dans G2 semble plus tenir au manque de connaissances et compétences de l'étudiant en géométrie plane qu'à l'environnement Cabri lui-même.

Enfin, les paradigmes G1I et G2I semblent être utilisés indifféremment par la plupart des étudiants.

Chapitre 7

Chapitre 7 : Expérimentation en environnement papier-crayon

L'état des lieux en début de formation qui vient d'être effectué, à partir de l'analyse des tests papier et des analyses de cas dans l'environnement Cabri, montre que les étudiants ne se situent pas de manière systématique dans le paradigme G2 : ils sont nombreux à travailler dans G1, ou dans un pseudo-paradigme qui relève à la fois de G1 et de G2, de manière implicite. Par ailleurs, un manque de connaissances et de compétences les empêche parfois de mener à bien une démarche dans G2 et les conduit à travailler dans G1. J'ai développé au début de cette thèse une hypothèse de travail (cf. chapitre 2, § 3.3) :

> **T : Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2, ainsi qu'un minimum de connaissances dans G2.**

Il s'agit maintenant de proposer et d'analyser des séances de formation qui permettent de faire évoluer d'une part le rapport des PE1 aux paradigmes géométriques G1 et G2, et d'autre part les connaissances et compétences en géométrie euclidienne.

Le temps de formation est toujours limité. Au CFP d'Avrillé, l'année de cette dernière phase d'expérimentation, 15 h sont réservées à la géométrie plane avec les PE1, dont 1 h 30 de Temps d'Appropriation (temps de travail en groupes, pour effectuer un travail préparé par l'enseignant, en l'absence de celui-ci) et 1 h 30 de soutien pour les étudiants en difficultés. Sur les 12 heures restantes, la moitié se déroule dans une grande salle avec les 120 étudiants, l'autre moitié est répétée trois fois par l'enseignant, avec des « groupes de base » d'une quarantaine d'étudiants. Ces 15 heures sont censées permettre aux étudiants de se préparer à l'ensemble de l'épreuve du concours en géométrie plane, et doivent donc donner l'occasion de traiter des problèmes mathématiques mais aussi didactiques. Le travail sur les paradigmes géométriques peut y être inséré, mais dans un volume horaire, comme on le comprend aisément, très faible. Du point de vue déontologique, la présence du concours en fin d'année ne donne pas en effet une grande marge de manœuvre : seules les activités qui permettent de préparer le concours trouvent leur place en première année.

Dans une première partie de ce chapitre, je décrirai le dispositif mis en place, en explicitant l'analyse a priori des travaux personnels proposés ainsi que l'analyse a priori et le déroulement de toutes les phases collectives.
Dans les seconde et troisième parties, j'analyserai les résultats des étudiants aux travaux personnels écrits proposés, avant de conclure.

1. Description du dispositif, analyse a priori et premières observations

Je ne détaillerai pas l'ensemble du dispositif de formation sur la géométrie plane, en particulier les aspects didactiques, mais seulement les séances qui ont pour objectifs :

- de faire prendre conscience aux PE1 des paradigmes G1 et G2, ainsi qu'éventuellement du pseudo-paradigme dans lequel ils se situent quand ils résolvent des problèmes de géométrie,
- de raviver des connaissances et de développer des compétences dans G2.

Les connaissances ont théoriquement déjà été toutes rencontrées au collège, et souvent revues avant l'entrée en formation. Un test de mathématiques est en effet passé par les étudiants dans le cadre du dispositif de sélection pour entrer en première année au CFP. Les étudiants s'y sont donc en général préparés en s'entraînant avec des annales de tests de recrutement d'entrée en CFP ou en IUFM, globalement basés sur les connaissances du collège. Il s'agit donc rarement d'une découverte. Certaines compétences, par contre, sont totalement inexistantes, comme nous le verrons dans ce chapitre. Rédiger par exemple un scénario de construction géométrique est une tâche difficile et très mal exécutée en début de formation.
Pour simplifier le discours, je nommerai dans la suite « dispositif G1-G2 » toute la partie correspondant à ces séances ou parties de séances. Elles se répartissent comme l'indique le tableau ci-dessous :

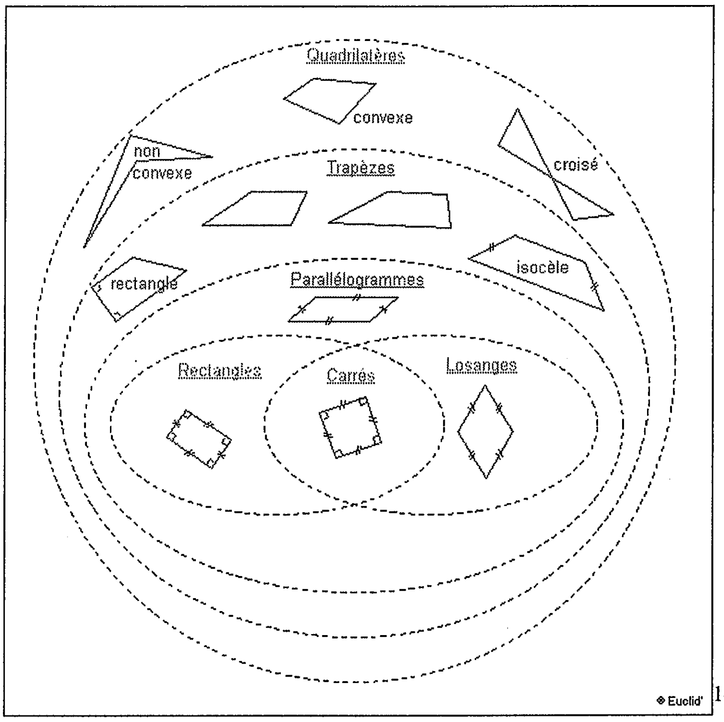
Jour 1	Grand groupe	Etape 1	Le point sur les quadrilatères
		Etape 2	Exercice 1 : tracer un triangle rectangle
	Groupes de base	Etape 3	Quel type de géométrie ?
		Etape 4	Atelier de géométrie plane 1
Jour 2	Grand groupe	Etape 5	Les instruments de dessin
		Etape 6	Exercice 2 : tracer une droite parallèle à d passant par A
	Groupes de base	Etape 7	Atelier de géométrie plane 2
Jour 3	Grand groupe	Etape 8	Exercice 3 : situation « médiatrice »
	Groupes de base	Etape 9	Démonstrations

La grande majorité de ce dispositif se déroule en groupes de base. Toutes les séances durent 1 h 30. La fin des séances en grand groupe est utilisée pour faire faire aux étudiants un travail personnel, qui sera exploité en groupe de base le jour-même : exercices 1, 2 et 3. C'est un moyen de limiter le temps d'intervention magistrale avec le grand groupe et d'optimiser la répartition des activités sur la journée. Le reste du temps de travail en grand groupe est destiné à un travail qui porte essentiellement sur les aspects didactiques : analyse des instructions officielles, de manuels et de productions d'élèves ; il ne sera pas étudié ici. Seules deux étapes du dispositif G1-G2 se présentent sous forme d'un – court – exposé magistral : il s'agit des étapes 1 (sur les quadrilatères) et 5 (autour des instruments de géométrie).

1.1. Etape 1 : les quadrilatères

1.1.1. Des définitions inclusives, dans G2

La question du test sur la définition du losange a mis en évidence une conception erronée fréquente chez les PE1, selon laquelle le carré n'est pas un losange. Il s'agit donc avant tout dans cette étape **d'expliciter le caractère inclusif des définitions des objets mathématiques**, en l'occurrence ici les **quadrilatères**. Le point de vue adopté ici est bien évidemment celui des définitions dans G2 tel que je l'ai décrit au chapitre 2, § 1.7 (cf. pages 93 et suivantes). à l'aide de la représentation ensembliste suivante :



[149]

L'inclusion des ensembles les uns dans les autres est largement commentée : un carré est un losange **et** un rectangle **et** un parallélogramme **et** un trapèze (cette dernière affirmation est d'ailleurs souvent source d'étonnement pour les étudiants), etc. C'est l'occasion également d'attirer l'attention des étudiants sur la notion de quadrilatère convexe, dont plusieurs définitions sont données[150]. Ce concept sera réutilisé lors du travail sur le parallélogramme.

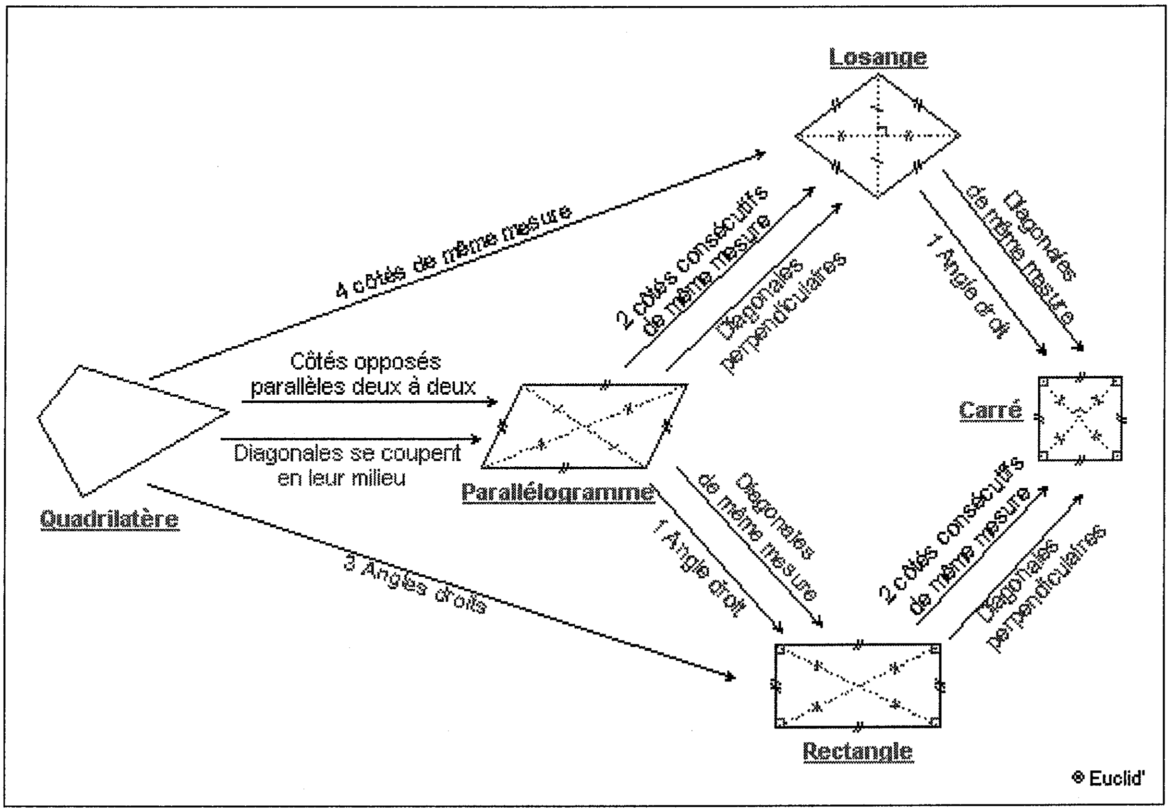
1.1.2. Des définitions minimales

Différentes définitions possibles des quadrilatères fréquemment utilisés sont formulées à partir du diagramme suivant :

---

[149] Ce schéma et le suivant sont disponibles sur Internet à l'adresse suivante : http://mathocollege.free.fr/brevet/quad/quad.html

[150] Les définitions proposées sont : « un quadrilatère est convexe lorsque tous les segments reliant deux points quelconques du quadrilatère sont entièrement à l'intérieur du quadrilatère », ou encore « un quadrilatère est convexe lorsque le quadrilatère se situe tout entier du même côté de n'importe quelle droite portant un des côtés du quadrilatère ». Les expressions « intérieur » ou « du même côté » sont utilisées de manière naïve, intuitive, sans aucune explicitation d'ordre topologique.



Cinq définitions du losange sont par exemple formulées :

- Quadrilatère avec deux diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu
- Quadrilatère avec deux diagonales qui se coupent en leur milieu et deux côtés consécutifs de même longueur
- Quadrilatère avec des côtés opposés parallèles deux à deux et deux côtés consécutifs de même longueur
- Quadrilatère avec des côtés opposés parallèles deux à deux et des diagonales perpendiculaires
- Quadrilatère avec quatre côtés de même longueur

C'est l'occasion d'expliciter ce que j'ai nommé au chapitre 4 (§ 3.7.2, pages 198 et suivantes) des « **définitions minimales** » et d'insister sur le fait que définir un objet ne signifie pas énumérer toutes les propriétés que l'on connaît de cet objet.

Il est alors suggéré aux étudiants d'effectuer le même travail au sujet des autres quadrilatères particuliers apparaissant dans ce diagramme.

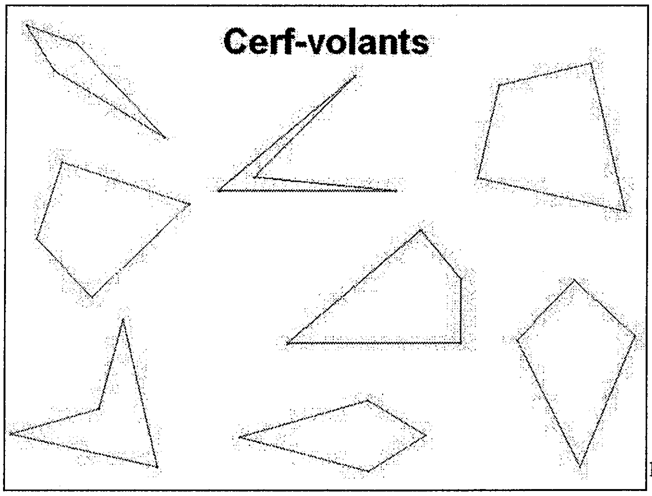
1.1.3. Le cerf-volant, positions et proportions prototypiques

Un autre quadrilatère particulier est ensuite proposé aux étudiants : le « **cerf-volant** ». Il est introduit parce que ce mot apparaît dans les Instructions Officielles de Cycle 3 (cf. [Appl. Maths C3. 2002, page 32]) et que certains étudiants, comme nous l'avons vu au chapitre 5 (§ 4.1.3, pages 290 et suivantes), le confondent avec le losange. Il est défini comme « quadrilatère ayant une de ses diagonales comme axe de symétrie ». Une construction avec Cabri-géomètre est effectuée devant les étudiants à partir de cette définition et les propriétés sont mises en évidence, puis justifiées par les propriétés de la symétrie axiale :

- les deux diagonales sont perpendiculaires
- une des diagonales (axe de symétrie) coupe l'autre diagonale en son milieu
- le cerf-volant possède deux paires de côtés consécutifs de même longueur

L'attention des étudiants est attirée sur le fait que le cerf-volant n'est pas forcément convexe, et sur le fait que le losange est un cas particulier du cerf-volant. La manipulation devant les étudiants à l'aide de Cabri permet de faire apparaître une multitude de cerf-volants. C'est l'occasion de développer le concept de **position et proportions prototypiques** : de même que l'élève ne reconnaît le losange que « posé sur la pointe » et dans des proportions proches de la situation construite à partir de deux triangles équilatéraux, les étudiants reconnaissent facilement le cerf-volant dans la situation ci-dessous en bas à droite (convexe, axe de symétrie vertical, côtés les plus courts vers le haut), moins bien dans les autres cas. Quatre variables sont particulièrement exploitées :

- la position de l'axe de symétrie (horizontal, vertical, plus ou moins penché, dans une direction nord-ouest / sud-est ou au contraire nord-est / sud-ouest)
- le rapport des longueurs des côtés (de 1 à « très grand »)
- le rapport des longueurs des diagonales (idem)
- la convexité (cerf-volant convexe ou non)



[151]

1.1.4. Dispositif pédagogique

Le choix effectué pour cette étape est celui d'un exposé magistral. C'est un choix « par défaut », en ce sens que j'ai choisi pour les temps d'exposés magistraux, d'un volume horaire total je l'ai dit équivalent au temps de travail en groupe de base (dont l'effectif est relativement important : 40 étudiants), les thèmes qui me semblaient les moins mal adaptés, c'est-à-dire a priori les plus simples. Or, il s'agit ici d'une situation de transmission d'informations plus que d'une situation de construction de concept mathématiquement complexe, ce qui autorise plus volontiers un tel dispositif pédagogique. Néanmoins, une séance de travaux dirigés aurait probablement été plus profitable pour les étudiants. Ainsi, au sujet des quadrilatères, on aurait par exemple pu proposer aux étudiants de :

- produire eux-mêmes, individuellement ou par groupes de trois ou quatre, une classification des quadrilatères,
- les comparer, en faire une synthèse, à l'aide de manuels ou de dictionnaires pour vérifier à l'occasion certaines définitions

Ces consignes auraient, je pense, permis de faire émerger les conceptions erronées de certains étudiants. De même, le deuxième schéma utilisé aurait pu être proposé aux étudiants sans les propriétés, afin qu'ils le complètent. Il semble en effet plus efficace, pour s'approprier les propriétés des quadrilatères, de rechercher soi-même des propriétés, de procéder à des essais, etc., plutôt que de prendre une liste de propriétés toute prête. Au sujet du cerf-volant, l'idéal aurait été que les étudiants puissent manipuler Cabri eux-mêmes pour construire de multiples représentants de l'objet théorique « cerf-volant », à partir de la définition donnée, qu'ils aient

[151] Cette image, ainsi que d'autres du même type dans la suite, correspondent aux diapositives de la présentation PowerPoint utilisée en cours avec les PE1.

le temps de conjecturer puis démontrer ses propriétés, etc. Après cette première manipulation, une consigne aurait notamment pu être : « tracer une douzaine de cerf-volants qui se ressemblent le moins possible et expliciter les variables didactiques que vous utilisez pour tracer ces cerfs-volants », afin d'obtenir des objets dans des proportions et positions très variées, ainsi que l'explicitation des quatre variables précédemment citées.

Les contraintes d'organisation ne m'ont permis d'effectuer ce choix mais ont néanmoins permis de faire le point sur :

- l'aspect inclusif des définitions mathématiques
- le concept de définition minimale
- le concept de positions et proportions prototypiques
- le cerf-volant, sa définition et ses propriétés

1.2. Des activités pour réconcilier les étudiants avec la géométrie

Ce point sur les quadrilatères étant fait, il reste de nombreuses connaissances de géométrie plane à revoir, et de nombreuses compétences à (re-)développer avec les étudiants, notamment :

- les théorèmes du collège
- l'utilisation de ces théorèmes pour démontrer
- les constructions à la règle et au compas
- la rédaction de scénarios de construction

Pour pouvoir travailler dans G2, il est en effet nécessaire de disposer d'un minimum de connaissances et de compétences : il faut connaître des théorèmes, y penser, et être capable de les appliquer. Autrement dit, il est nécessaire de disposer de connaissances mobilisables, voire disponibles, selon les énoncés. Or, les différentes analyses des chapitres précédents ont montré des lacunes des étudiants, qui les empêchent parfois de résoudre complètement un problème dans G2 : ils voudraient démontrer des propriétés mais utilisent la perception (volontairement parfois, involontairement le plus souvent) parce qu'ils ne disposent pas des outils nécessaires dans G2, soit parce qu'ils n'y pensent pas (connaissances non disponibles), soit parce qu'ils ne sont pas capables de les utiliser (connaissances non mobilisables). La nature de l'épreuve du concours par ailleurs leur impose d'être capables d'effectuer des démonstrations de niveau collège. Les théorèmes utiles ont déjà été travaillés au collège, mais certains ont été totalement oubliés, c'est le cas du théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit interceptant un même arc, d'autres ont laissé un nom, mais ne sont pas opérationnels, c'est le cas nous l'avons montré du théorème de Thalès, d'autres encore peuvent être énoncés mais non appliqués, c'est le cas par exemple du théorème « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment ».

Mais une difficulté majeure se pose au formateur sur cet apprentissage de la démonstration :

- certains étudiants, « non scientifiques », se disent « fâchés » avec les mathématiques, et surtout avec les démonstrations. Ce seul mot les renvoie à un passé de collégien parfois douloureux, souvent désagréable et qui les empêche de s'investir dans l'activité proposée. Il faut d'abord les « réconcilier » avec les démonstrations, leur faire prendre conscience qu'ils sont capables d'en effectuer eux-mêmes. Je choisis donc dans un premier temps de leur en faire faire de façon subreptice. La forme des exercices proposée est pour eux inhabituelle, ils n'y reconnaissent pas une activité maintes fois répétée au collège, et ils s'y investissent donc plus volontiers.
- certains étudiants « scientifiques » sont au contraire naturellement à l'aise dès qu'il s'agit d'effectuer des démonstrations. Il est donc intéressant de leur proposer une activité qui les déstabilise un peu, qui les oblige à réfléchir, qui ne leur permette pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé. Il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer. Cela leur évitera de s'ennuyer, avec tous les effets négatifs que cela peut produire, mais cela évitera aussi de mettre les autres étudiants dans une situation d'infériorité, avec d'un côté ceux qui savent déjà, et de l'autre ceux qui ne savent pas, renforçant ainsi le sentiment d'échec des étudiants en difficulté[152].

[152] J'ai durant plusieurs années exploité pour cela la consigne suivante « construire **par pliage** un triangle rectangle, un triangle isocèle, un triangle rectangle et isocèle, un triangle équilatéral, les hauteurs d'un triangle, les bissectrices d'un triangle, un angle de 45°, puis 60°, puis 30°, etc. » . La situation est inhabituelle pour tous, et plutôt amusante. Si les premières constructions ne posent pas réellement de difficulté, et permettent de s'approprier la consigne, le travail sur le triangle équilatéral est intéressant : pour obtenir un triangle équilatéral, il **faut** réfléchir aux propriétés de celui-ci (on peut par exemple exploiter le fait que la médiatrice est aussi hauteur : plier la feuille pour obtenir une droite d, support d'un côté ; plier pour déterminer deux points A et B sur cette droite d ; plier en ramenant A sur B pour obtenir la médiatrice de [AB] ; plier pour déterminer sur cette médiatrice un point C tel que BC=AB. On a alors déterminé les trois sommets d'un triangle équilatéral). Aucun pliage ne résulte d'un automatisme, car la situation est nouvelle pour tous. Pour chaque construction, tous les étudiants doivent donc reprendre la définition de l'objet cité, voire ses propriétés. Il ne s'agit pas ensuite seulement de réciter ces définitions ou propriétés, mais de les **utiliser** pour effectuer le pliage. L'appropriation de ces définitions et propriétés est alors beaucoup plus efficace. Mais cette activité nécessite du temps et ne permet pas de développer les autres compétences : rédaction d'un scénario de construction et construction à la règle et au compas. Elle a donc été laissée de côté, et seulement proposée aux étudiants dans le cadre de leur travail personnel (cf. annexe 26 : Ateliers de géométrie plane 2005-2006, activité 2).

En parallèle, il est utile, dans la perspective du concours, que les étudiants sachent effectuer quelques constructions usuelles à la règle et au compas. Par exemple, dans la session 2005 du Concours externe de Recrutement de Professeurs des Ecoles, sept sujets sur dix[153] demandaient d'effectuer une telle construction. Par ailleurs, pour comprendre certaines activités proposées dans les manuels, ou pour pouvoir en inventer de nouvelles, cette compétence est également nécessaire aux professeurs des écoles.

Une autre compétence leur fait par ailleurs souvent défaut : rédiger un scénario de construction. Les instructions de cycle 3 indiquent :

> *« Décrire une figure en vue de l'identifier dans un lot de figures ou de la faire reproduire sans équivoque » [Appl. Maths C3. 2002, page 33]*

et dans les commentaires on peut lire :

> *« La capacité à décrire une figure est vérifiée par l'élaboration d'un message contenant toutes les informations nécessaires à la reproduction de la figure.*
>
> *Selon l'activité proposée, deux types de description peuvent être utilisés :*
>
> *– énoncé de propriétés que vérifie la figure choisie ;*
>
> *– énoncé de la suite des étapes qui permettent de construire la figure (programme de construction). » [ibid.]*

Il est donc essentiel que les étudiants développent cette compétence pour eux-mêmes, avant de la travailler avec les enfants.

Je profite donc d'un travail sur les constructions avec ces instruments pour donner aux étudiants l'occasion :

- de développer des procédures de construction à la règle et au compas pour des objets géométriques variés
- de rédiger des programmes de construction

---

[153] Il s'agit des sujets des groupements académiques de :

- Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse
- Amiens, Rouen
- Groupe Ouest-Centre
- Dijon, Nancy-Metz, Reims, Strasbourg
- Grenoble
- Lille
- La Réunion

Tandis que seuls les groupements suivants ne comportaient pas **cette année-là** ce type de consigne :

- Besançon
- Créteil, Paris, Versailles
- Lyon

- de revoir (ou découvrir dans quelques cas) des théorèmes de géométrie plane du collège
- d'effectuer quelques démonstrations simples.

1.3. Etape 2 : triangle rectangle

Concrètement, dans la séance en grand groupe, après le travail sur les définitions et les quadrilatères décrit ci-dessus, puis une analyse des Instructions Officielles de cycles 2 et 3 sur la géométrie plane que je ne détaillerai pas ici, une feuille est distribuée, vingt minutes avant la fin de la séance[154]. Il s'agit d'un travail individuel que les étudiants effectuent immédiatement. Ils rendent leur copie à la fin de la séance. Je photocopie[155] leurs productions à la pause et les leur rends au début de la séance en groupe de base. Un dispositif identique est utilisé les deux semaines suivantes. La consigne proposée dans cette étape 2 est :

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas.
2. Ecrire un scénario de construction correspondant à cette construction.
3. Donner les propriétés qui justifient que l'on a bien tracé un triangle rectangle avec ce scénario.

NB : évitez d'une part le crayon à papier pour les questions 2 et 3, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en TD. Merci.

Chacun des trois éléments de la consigne correspond à l'un des objectifs précédemment explicités. Compte tenu des productions observées précédemment dans le test papier, on prévoit que des procédures sont disponibles pour la plupart des étudiants, puisque la majorité avait été capable de tracer une médiatrice et d'affirmer qu'elle était perpendiculaire au segment. On prévoit également que les justifications seront certainement incomplètes, puisque le lien entre l'équidistance des points aux extrémités du segment et la médiatrice n'est pas toujours fait.

---

[154] On trouvera cette feuille en annexe 30

[155] Je tiens à remercier le centre de formation, et tout particulièrement son directeur, qui m'a chaque fois laissée utiliser le matériel du CFP pour les besoins de ce travail de thèse.

L'intérêt de cette consigne est par ailleurs qu'elle permet plusieurs procédures, liées ou non au tracé d'une médiatrice. Je vais expliciter dans ce qui suit les procédures attendues, en rédigeant le scénario correspondant, les justifications ne posant pas de problème. J'ai montré au chapitre 2, § 1.6 (cf. pages 81 et suivantes), que les constructions pouvaient être considérées dans G1 ou dans G2, mais que dans les deux cas le langage utilisé, celui de l'action, se référait plutôt à G1. Dans la suite, les deux seuls verbes d'action que j'utiliserai seront les verbes « placer » pour les points et « tracer » pour les droites ou les cercles. On pourrait aisément les remplacer par l'expression « soit », autrement dit transformer ces énoncés procéduraux, tels qu'on les rencontre à l'école ou au début du collège, en énoncés déclaratifs, tels qu'on les rencontre au lycée. Du point de vue G1-G2, cela permettrait d'éviter la référence à l'objet physique et d'être plus explicitement dans G2. Mais, si l'objectif de ce dispositif de formation est d'amener progressivement les étudiants à prendre conscience des paradigmes G1 et G2 d'une part, et de les faire se situer prioritairement dans G2 d'autre part, il est également de rendre les futurs enseignants capables de rédiger des scénarios de construction dans G1 pour leurs élèves. Les contraintes :

- de la préparation au concours
- de la formation professionnelle
- de la recherche présente sur G1-G2

ne sont pas toujours compatibles. Par ailleurs, si les exigences sont trop élevées, compte tenu du faible volume horaire disponible et du niveau de départ d'une majorité d'étudiants, aucun objectif ne sera atteint. Il s'agit donc de hiérarchiser les objectifs et de savoir laisser partiellement de côté l'un d'entre eux lorsqu'il s'avère, au moins en partie, incompatible avec les autres.

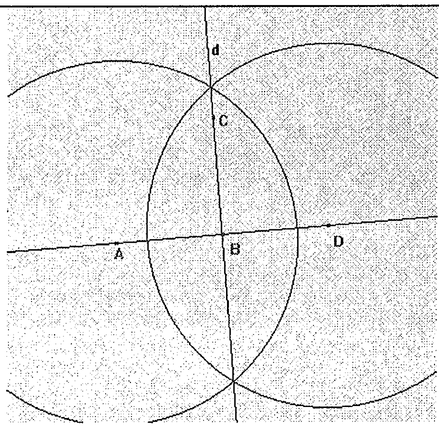
Or, il y a déjà une grande marche à franchir pour certains étudiants du point de vue de la rédaction des scénarios de construction dans l'utilisation du langage géométrique, et par ailleurs les formulations de type « placer, tracer » sont plus adaptées que celles de la forme « soit » pour les élèves de cycle 3. Le choix est donc fait de choisir le premier type de formulation plutôt que le second.

Explicitons les procédures susceptibles d'être utilisées.

<u>Procédures 1 et 2 : Tracé d'une médiatrice avec deux intersections d'arcs de cercles</u>

Une procédure de tracé attendue consiste à tracer une médiatrice par la procédure dite « standard » rencontrée dans la construction de la médiatrice sans contrainte.

- Placer deux points A et D et tracer la droite (AD)
- Tracer deux cercles sécants de centres respectifs A et D et de même rayon
- Tracer la droite d passant par les intersections de ces deux cercles
- Placer un point C sur la droite d (et pas sur (AD)) et le point B à l'intersection de d et de (AD).

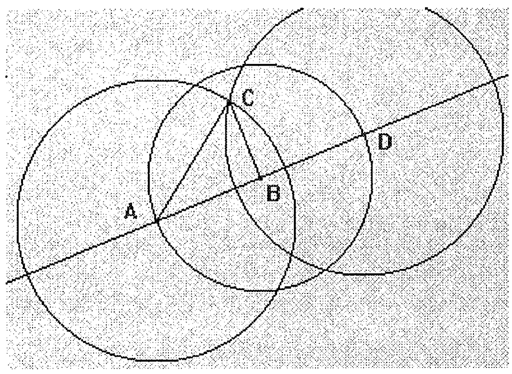


Le rayon des cercles tracés peut être égal à la distance AD, nous appellerons cette procédure a, ou différent de la distance AD, nous appellerons cette procédure b. Cette procédure correspond la troisième construction géométrographique d'un angle droit ou de deux droites perpendiculaires proposée dans [Lemoine. 1902, page 20].

Procédure 3 : Tracé d'une médiatrice avec une intersection d'arcs de cercle et le milieu du segment

Les procédures précédentes peuvent être adaptées en remplaçant l'utilisation des deux intersections de cercles par l'utilisation d'une seule et d'un milieu préalablement construit.

- Placer deux points A et B et tracer la droite (AB)
- Placer un point D sur (AB) tel que B soit le milieu de [AD] (i.e. tracer un cercle de centre B de rayon AB. Placer le point D à l'autre intersection de ce cercle et de la droite (AB))
- Tracer deux cercles sécants de centres respectifs A et D et de même rayon
- Placer le point C à une des intersections de ces deux cercles

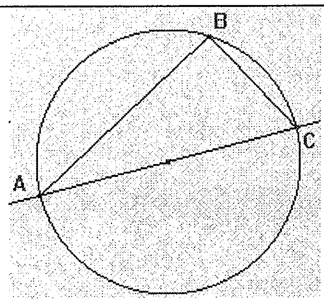


Procédure 4 : triangle rectangle inscrit dans un cercle

Une autre procédure est possible, basée sur l'application du théorème suivant : « tout triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle est un triangle rectangle ». Elle a été rencontrée dans le test, notamment lorsqu'il s'agissait de donner la nature de l'angle $x\widehat{O}y$

(cf. chapitre 5, § 2.2.1, pages 230 et suivantes), ce qui permet d'affirmer qu'elle est disponible chez certains étudiants.

- Tracer un cercle
- Tracer un diamètre [AC] de ce cercle
- Placer un point B n'importe où sur le cercle, différent des points A et C.



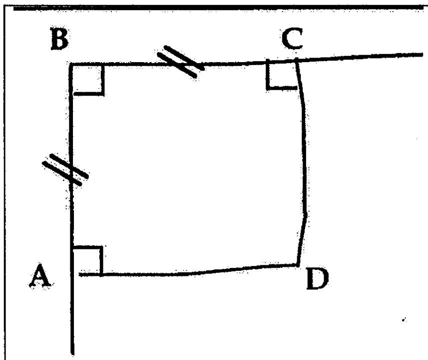
Cette procédure correspond la première construction géométrographique d'un angle droit ou de deux droites perpendiculaires proposée dans [Lemoine. 1902, page 20].

En vingt minutes, les étudiants ont le temps d'effectuer l'intégralité de la tâche qui leur est proposée, même si certains (rares) n'effectuent même pas le tracé. Nous étudierons en détail les productions des étudiants dans la seconde partie de ce chapitre.

1.4. Etape 3 : Quel type de géométrie ?

1.4.1. La question écrite

La séance suivante, en groupe de base, ne commence pas par la mise en commun des procédures utilisées pour construire le triangle rectangle mais par une autre consigne, également proposée sur une feuille à rendre :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?
Justifier votre réponse.
NB : évitez le crayon à papier. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue. Merci.

Cette situation a déjà été analysée au chapitre 4 (§ 3.5, pages 187 et suivantes). Elle est utilisée ici pour faire prendre conscience aux étudiants des paradigmes G1 et G2.

Dans un premier temps, les étudiants répondent individuellement, par écrit, à la question posée. Dans un second temps, un bilan est rapidement fait à main levée pour savoir qui pense

que le quadrilatère est un carré et qui pense que ça n'en est pas un. Dans les trois groupes de base, le taux de réponses oui est proche de 2/3 et celui de réponses non est proche de 1/3.
Sur l'ensemble des trois groupes, les résultats sont les suivants :

Modalité	Effectif	%	
Oui et non, dans G1-G2	8	7,8	G1-G2 : 8 %
Oui et justification exacte dans G2	44	42,7	G2 : 61 %
Oui et justification erronée dans G2	19	18,4	
Non et exhaustivité	9	8,7	G1 : 29 %
Non et G1	21	20,4	
Autre	2	1,9	
Total	103	100	

Ils sont relativement proches de ceux obtenus précédemment dans l'étude du test sur 878 étudiants, où, rappelons-le, 4 % des étudiants répondaient simultanément oui et non, 51 % répondaient oui, et 43 % répondaient non. On note un nombre de démonstrations erronées important (18 %), correspondant essentiellement à un manque de rigueur dans la rédaction ou à des démonstrations qui affirment sans démontrer[156], par exemple :

Le quadrilatère ABCD est un carré. Il a 3 angles droits ce qui signifie que [BC] ⊥ [BA] et [BC] ⊥ [CD].
De plus tous les côtés sont de même longueur.

ou encore :

Le quadrilatère ABCD est un carre car :
- il a 2 côtés opposés parallèles et de même longueur
- il a 2 côtés consécutifs de même longueur et perpendiculaires
- il a 3 donc 4 angles droits

Par ailleurs, 37% des étudiants font une remarque sur la précision du tracé (30 % dans le test initial).

[156] mais aussi à quelques définitions erronées du carré : « Le quadrilatère ABCD est un carré car il a au moins deux angles droits et deux côtés opposés parallèles » par exemple.

1.4.2. Le débat

La non unanimité des réponses est mise en évidence avec les étudiants ; un débat est alors proposé où il est demandé à chacun d'expliquer aux autres son point de vue. Il s'agit certes d'un « mini-débat », notamment par sa durée, mais qui suit néanmoins un certain nombre des caractéristiques explicitées dans [Legrand. 1993, pages 123-159], au sujet du débat dans la classe de mathématiques :

- L'énoncé objet du débat « ABCD est un carré » est un énoncé conjectural, *« jugé vrai par celui qui le propose mais qui n'a pour la classe aucun caractère de vérité institutionnelle ». [ibid. p.124].* La forte conviction de chacun d'une part, le nombre non négligeable aussi bien de réponses « oui » que de réponses « non » d'autre part, évite ce caractère de vérité institutionnelle.
- Les étudiants s'engagent directement devant leurs pairs sous la forme « je pense que … ». Très vite en effet, ils constatent que je me contente de passer la parole aux uns et aux autres sans prendre part au débat et sans marquer le moindre signe d'acquiescement ou de désaccord avec une proposition ou une autre ; je ne suis donc plus une interlocutrice dans le débat. En outre, ils sont profondément convaincus de ce qu'ils avancent, et en opposition avec la thèse qui n'est pas la leur, ils ont donc fortement envie d'intervenir.

Par contre, le tableau n'est pas utilisé pour *« ralentir la vitesse des échanges et d'autre part constituer une mémoire des idées fortes » [ibid.]* : la difficulté conceptuelle de l'énoncé et des arguments ne le nécessite pas, d'autant plus que chacun a écrit sa position avant le débat.

La forte conviction de chacun, liée notamment à la simplicité de l'énoncé, pallie la rareté d'utilisation de ce dispositif pédagogique de débat : les étudiants s'investissent avec rapidité et vivacité dans le débat qui est chaque fois très animé, et il est difficile de l'interrompre. Les positions des uns et des autres sont souvent très marquées. Les arguments sont repris par les étudiants eux-mêmes, reformulés, afin de convaincre les autres.
Rapidement néanmoins, les étudiants mettent eux-mêmes en évidence que la nature du quadrilatère dépend des arguments utilisés :

- si on regarde le dessin, ou si on vérifie à l'aide des instruments (règle graduée ou compas et équerre), ce n'est pas un carré : « les traits ne sont pas tracés à la règle et à l'équerre », « ils ne sont pas suffisamment précis », « les côtés ne sont pas de la même longueur » sont les arguments le plus souvent utilisés. Le codage indiqué n'est pas pris en compte ou considéré comme erroné.

- si on utilise les théorèmes de géométrie, appliqués aux informations codées sur le dessin, c'est un carré.

Autrement dit, les différences de type de validation sont bien repérées et exprimées par les étudiants, même si le langage est parfois maladroit, mais le problème de la nature – physique ou théorique – des objets sur lesquels on travaille n'est jamais soulevé. On peut penser que l'accent est naturellement mis sur les validations parce que les deux types en sont facilement identifiés tandis que le point de vue de la nature des objets est plus délicat, en particulier parce que l'un des objets, théorique, ne se « voit » pas[157].

1.4.3. Une présentation des paradigmes G1/G2

Je fais alors une présentation d'une version simplifiée des paradigmes G1 et G2, en mettant en évidence le type de validation effectué et la nature des objets en jeu :

Deux paradigmes géométriques : G1 – G2

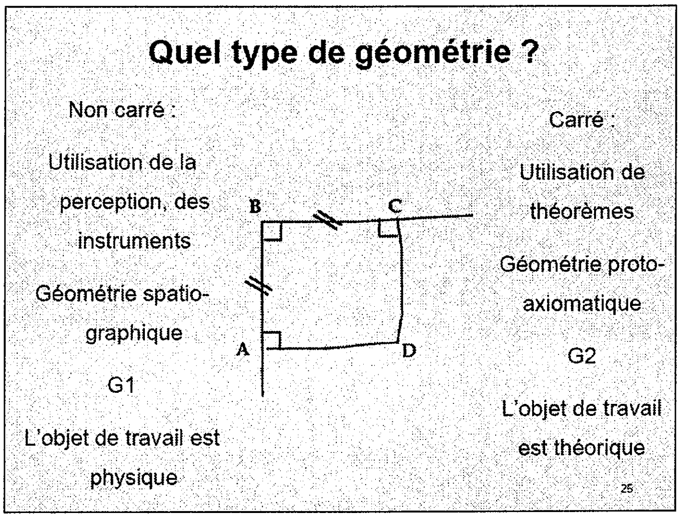
Type de géométrie	Géométrie spatio-graphique : G1	Géométrie proto-axiomatique : G2
Objets	physiques	théoriques
Validations	Perceptives, vérifiées ou non à l'aide d'instruments	Hypothético-déductives

24

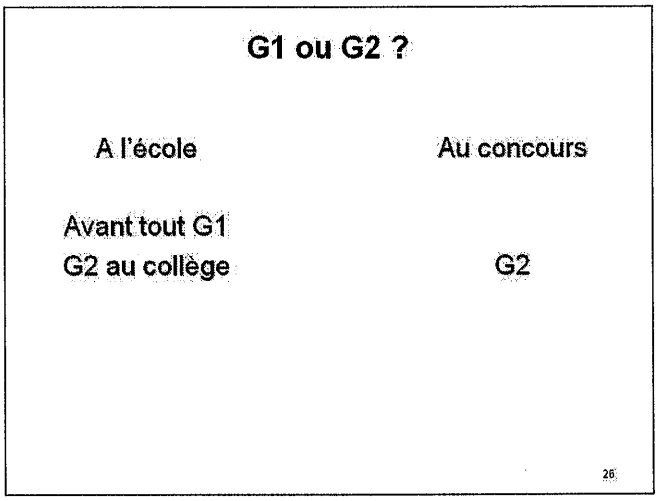
Je n'ai pas besoin, compte-tenu des remarques que les étudiants ont faites eux-mêmes, d'expliciter longuement les types de validation. Il s'agit seulement de les nommer pour mieux les distinguer et les identifier. Par contre, je développe plus longuement la nature des objets en

[157] Ce problème se retrouve dans certains textes officiels. On peut lire par exemple dans [Articulation école-collège. 2004, page 5] : *« La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction »*. Si les propriétés « *vérifies expérimentalement* » et celles « *établies par déduction* » mettent en évidence les deux types de validation, la différence entre « objet physique » et « objet théorique » au travers des expressions « dessin » et « *figure géométrique* » est moins nette, d'autant plus que quelques lignes auparavant on peut lire : *« En sixième, les élèves ne travaillent pas sur des objets nouveaux »*.

jeu – physique ou théorique – dans chacun des deux paradigmes, de manière générale mais bien sûr aussi à partir de l'exemple proposé.



En résumé, j'explique que : « Dans le paradigme G1, l'objet du travail géométrique est le dessin tracé sur la feuille. Ce dessin est un Objet physique sur lequel on mesure, vérifie, etc. Dans le paradigme G2, le dessin n'est qu'un Représentant d'un objet théorique construit dans la tête. Le dessin n'est alors qu'un support pour noter les informations que l'on connaît, de manière certaine, sur l'objet géométrique théorique qui n'a pas d'existence matérielle ».
J'explicite ensuite le contrat didactique : « en général, dans le cadre du concours, vous devez vous situer dans G2 tandis qu'avec les enfants en classe, vous vous situez dans le paradigme G1 ; le passage de G1 à G2 se fait en général au collège ».



Il est à noter qu'au moment du débat, certains étudiants disent : « l'enfant n'a pas utilisé correctement sa règle et son équerre ». Ils interprètent ainsi spontanément le dessin proposé comme produit par un enfant, alors que rien n'est dit à ce sujet, ni dans l'énoncé de la consigne écrite, ni à l'oral. C'est peut-être pourquoi ces étudiants se situent « naturellement » dans G1 : ils se situent spontanément dans la classe, donc dans G1. N'oublions pas que la très grande majorité d'entre eux a effectué des suppléances[158], parfois longues, ce qui peut en partie expliquer cette référence instinctive à l'enfant.

De nombreuses activités habituelles de cycle 2 ou de cycle 3 en géométrie plane sont ensuite rapidement citées et analysées pour constater qu'elles se situent effectivement dans G1. Le lien avec l'activité « triangle rectangle » peut alors être fait : expliciter les propriétés utilisées, c'est ne pas laisser la tâche de construction dans G1, mais la considérer dans G2, c'est-à-dire s'intéresser aux propriétés de l'objet théorique et pas seulement à l'aspect de l'objet physique, c'est considérer que chaque instrument de tracé donne une propriété aux objets : en particulier, une règle donne des points alignés, un cercle donne des distances égales.

1.4.4. Le discours « méta » de l'étudiant et du formateur

On peut noter que dans l'étape qui vient de se dérouler, le discours des étudiants comme celui du formateur, est en grande partie de type « méta ». [Robert & Robinet. 1993] montre l'intérêt de la prise en compte du méta discours en formation d'adultes. Ces auteurs utilisent le mot « méta » *« s'il y a, pour le récepteur du discours, apport d'un élément sur des mathématiques à apprendre, en partie encore donc non acquises » [ibid. page 17]*. [Parzysz. 2004] précise cette expression de la manière suivante :

> *« En l'occurrence, nous distinguerons d'abord dans ce qui suit un niveau géométrique et un niveau méta, car c'est bien de ce dernier qu'il s'agit ici, étant donné que notre objectif est de travailler avec les étudiants sur leurs représentations de la géométrie ([Schoenfeld 1985]). Dans ce qui suit, nous réserverons plus précisément le substantif "méta" à un discours <u>sur</u> la géométrie enseignée (objets en jeu, validations), le niveau géométrique consistant en discours <u>de</u> géométrie enseignée. En outre, nous subdiviserons le méta lui-même en deux niveaux :*
>
> *- le premier (méta contextualisé, ou méta 1) étant un discours spécifique au problème géométrique support (par exemple : "Ce que je ne comprends pas, c'est qu'on ne montre pas que CD passe par O") ;*

[158] ¼ d'entre eux seulement n'a pas effectué de suppléances, ¼ d'entre eux en a effectué plus de 30 mois. La durée moyenne des suppléances sur l'ensemble des étudiants, y compris ceux qui n'en ont pas fait, est de 17 mois.

- le second (méta décontextualisé, ou méta 2) étant un discours général portant sur la géométrie ou même, plus généralement, sur les mathématiques enseignées (par exemple : "En mathématiques, on nous demande toujours de démontrer")[159]*.*

Nous serons ainsi finalement amenés à distinguer trois niveaux de discours plus ou moins "superposés" : géométrique / méta 1 / méta 2. »

Les remarques des étudiants sont essentiellement de l'ordre du « méta 1 » : *« si on vérifie à la règle et à l'équerre, ce n'est pas un carré », « les traits ne sont pas ne sont pas suffisamment précis », « si on applique les théorèmes et les définitions, c'est un carré ».* Le discours du formateur, lui, est avant tout de type « méta 2 » : *« Dans le paradigme G1, l'objet du travail géométrique est le dessin tracé sur la feuille, ... Dans le paradigme G2, le dessin n'est qu'un Représentant d'un objet théorique ... ».*

Par ailleurs, on peut noter que non seulement les deux types de discours ne sont pas de même type, mais ils n'ont pas ici la même fonction : le discours méta de l'étudiant, à destination des autres étudiants dans le débat, a pour fonction de convaincre les autres, dans le cadre de l'activité proposée. Il permet au formateur de repérer dans quel paradigme l'étudiant se situe. Le discours « méta » du formateur, à destination des étudiants, a pour but de leur faire prendre conscience de l'existence de ces divers paradigmes, et de les accompagner dans l'évolution de leur pseudo-paradigme vers G2.

1.5. Etape 4 : Atelier de géométrie plane 1

La mise en commun des procédures utilisées pour tracer un triangle rectangle est alors proposée avec le dispositif suivant :

- d1. Un étudiant me dicte un scénario de construction
- d2. J'effectue au fur et à mesure la construction avec Cabri-géomètre, en faisant dans certains cas reformuler la consigne
- d3. L'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

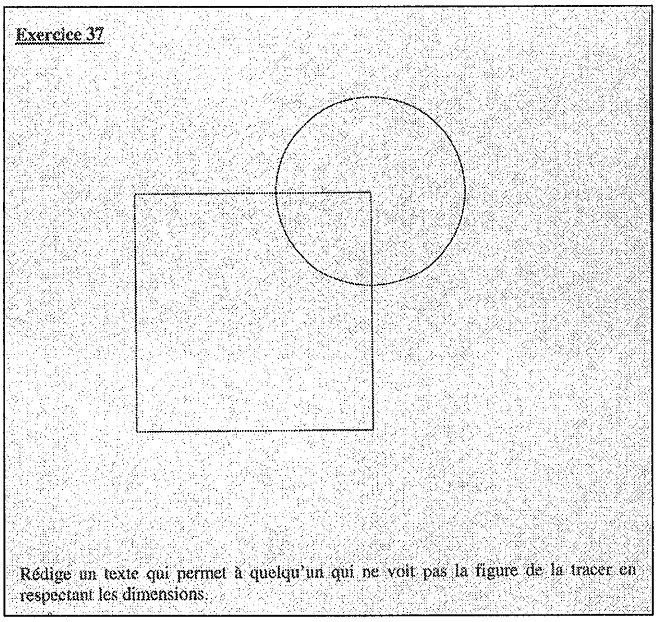
---

[159] *« On pourrait également distinguer un troisième sous-niveau (méta 0), consistant en un discours de type "récit de la démarche géométrique" (par exemple : "On a dit que C' était différent de D") ; mais nous l'assimilerons au niveau géométrique. »*

On retrouve là un dispositif déjà exploité (cf. chapitre 6, § 4.5, pages 349 et suivantes). Les objectifs, explicites ou implicites, sont multiples.

Les éléments d1 et d2 permettent explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction. Celui-ci doit avoir plusieurs caractéristiques :

- Il doit être donné dans l'ordre. Si cet aspect pose parfois problème aux enfants, il ne pose en général ici pas de difficultés.
- Il ne doit pas être trop synthétique. Des expressions comme « tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des actions élémentaires qui doivent être exécutées. Lorsqu'une procédure pour tracer une médiatrice à la règle et au compas par exemple est bien détaillée et justifiée, elle peut dans un second temps être utilisée comme une macro-construction. Notons ici une première difficulté de la rédaction d'un scénario de construction : à quel degré de décomposition faut-il se placer ? Par exemple, dans les évaluations d'entrée en sixième de 2000, l'exercice suivant est proposé :



Comment l'élève sait-il qu'il peut – qu'il doit[160] – utiliser le mot « carré » ? Le choix qui est fait est de se comporter ici comme avec un logiciel de géométrie dynamique qui ne disposerait dans un premier temps que des objets points, segments, droite, cercle, objets qui sont les seuls à pouvoir être tracés à la règle et au compas en une seule manipulation. Au fur et à mesure que de nouvelles constructions sont explicitées et justifiées, elles viennent allonger la liste des objets constructibles directement.

[160] La réponse correcte attendue est en effet décrite comme suit dans le document de présentation à l'attention du professeur : « *en suivant les instructions, on peut réaliser un carré et un cercle dont le centre est un sommet du carré ; les mots « carré » et « cercle » figurent explicitement dans le texte* » [Evaluation 6. 2000, page 54].

- Il faut surtout que ce scénario soit complet, sans ambiguïté et sans redondance, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants. Je mets alors en évidence que la plupart du temps, ils ne disent pas tout parce qu'ils anticipent implicitement sur le tracé qu'ils veulent obtenir. Par exemple, le plus souvent, des arcs de cercle sont effectués. Mais il est difficile de décrire correctement un arc de cercle si on veut que son intersection par exemple avec un autre arc de cercle soit non vide ! Si les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du scénario de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il est donc proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit. Cette contrainte dérange beaucoup les étudiants parce que les tracés se trouvent alors surchargées de traits de construction et de points parasites.
- Par ailleurs, le langage utilisé dans le scénario doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. On cherche par exemple à remplacer : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC ».

Ce travail est explicitement mis en place, nous l'avons dit, pour faire évoluer la compétence de rédaction d'un scénario. Les étudiants se rendent compte qu'ils sont capables d'effectuer une construction, mais qu'ils ont de réelles difficultés pour la décrire. L'accent est mis sur le fait qu'ils doivent maîtriser cette compétence dans le cadre de l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles, mais également que cette compétence est au programme de cycle 3, et qu'ils doivent donc la développer pour eux-mêmes en formation pour aider les élèves à la développer lorsqu'ils seront en classe. Du point de vue des élèves de cycle 3, les étudiants qui ont effectué des suppléances ont l'impression que les élèves connaissent bien les objets du plan qui sont explicitement au programme : carré, rectangle, cercle par exemple. Ils considèrent que les élèves savent les nommer et les tracer, ce qui est l'essentiel. Ils prennent soudain conscience que si eux-mêmes n'utilisent pas spontanément les mots cercle, centre, rayon, dans une telle activité, il en va probablement de même pour les élèves. Ils constatent alors tout l'intérêt de l'activité de rédaction d'un scénario de construction, et s'aperçoivent que bien souvent ils n'en ont jamais fait faire à leurs élèves.

Implicitement, ce travail permet également de préparer les étudiants à se situer dans le paradigme G2. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est impossible de s'intéresser à leurs propriétés.

Dans un second temps, en d3, les justifications sont détaillées, dans le but implicite de travailler la démonstration. Elles sont au départ souvent incomplètes : « on a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Mais si je leur demande pourquoi il s'agit bien d'une médiatrice, les habituels arguments sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu », ce qui conforte les résultats obtenus précédemment. Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas
Repérage des caractéristiques de la construction	le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle
	les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment
Repérage du théorème utilisé pour conclure	une propriété de la médiatrice est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle

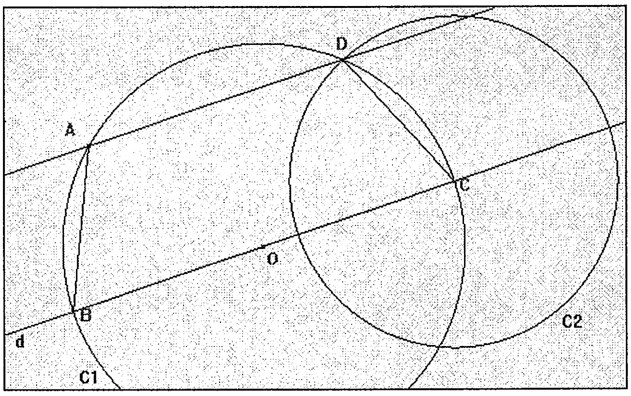
Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits : le compas permet d'obtenir des points vérifiant une relation de distance avec le centre, la règle non graduée d'obtenir tous les points alignés avec deux points donnés.
- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne

La seule différence avec le travail habituel de démonstration dans G2 est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par cette traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans le travail dans G2. Dans le travail ultérieur sur la démonstration, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

Bien sûr, le repérage des caractéristiques de la construction, des définitions et théorèmes utilisés, est parfois difficile, et souvent des informations sont seulement lues sur le dessin par les étudiants. Il s'agit alors à chaque fois d'expliciter que la caractéristique donnée n'est pas issue de la construction, mais de la lecture du dessin. Chaque prise d'information sur le dessin est ainsi repérée, et le fonctionnement dans G1 est alors mis en évidence. Il s'agit notamment de montrer que, même dans une démarche a priori consciemment de type G2, il est facile de se faire « piéger » par le dessin et d'y lire des informations. Il est indispensable que le formateur soit très vigilant pour que le travail se situe bien toujours dans G2, et non dans G1 à un moment ou à un autre.

Une autre difficulté pour les étudiants est de ne pas inventer de nouveaux théorèmes, ou de ne pas utiliser des propriétés certes vraies, mais qui ne font pas partie du corpus habituel des théorèmes utilisés. Considérons la construction suivante par exemple :



Scénario	Justification ***<u>des étudiants</u>***[161]
Soit O un point de d.	
Tracer le cercle C_1 de centre O passant par A. Il coupe d en deux points B et C.	On a donc $OA = OB = OC$ et B, O et C sont alignés sur d
Tracer le cercle C_2 de centre C de rayon AB. Soit D l'intersection de C_1 et de C_2 qui est dans le même demi-plan délimité par d que A.	On a donc : $DC = AB$ et $OD = OC$ et A et D sont dans le même demi-plan délimité par d. ***<u>ABCD forment donc un trapèze</u>*** et (AD) est donc parallèle à (BC), i.e. à d.

[161] Une autre justification sera donnée un peu plus loin, dans le paragraphe 1.7 de ce chapitre.

On pourrait certes institutionnaliser un nouveau théorème :

$$\left.\begin{array}{l}OA = OB = OC = OD \\ \text{B, O et C sont alignés} \\ AB = CD \\ \text{A et D sont dans un même demi-plan de bord (BC)}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD est un trapèze isocèle}$$

ou encore :

$$\left.\begin{array}{l}\text{A et D sont sur le même cercle de diamètre [BC]} \\ AB = CD \\ \text{A et D sont dans un même demi-plan de bord (BC)}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{ABCD est un trapèze isocèle}$$

mais il ne fait partie de ceux habituellement utilisés, il doit donc être démontré. Les étudiants ont du mal à faire cette distinction entre les théorèmes qu'ils peuvent utiliser et ceux qu'ils doivent démontrer, notamment parce que le corpus n'est pas défini par l'institution et qu'il dépend de nombreux facteurs). Il s'agit alors de leur faire prendre conscience qu'ils n'ont pas besoin d'inventer de nouveaux théorèmes et que les théorèmes simples qu'ils connaissent suffisent le plus souvent à effectuer les justifications ici demandées, puis plus tard les démonstrations qui sont attendues dans le cadre du concours.

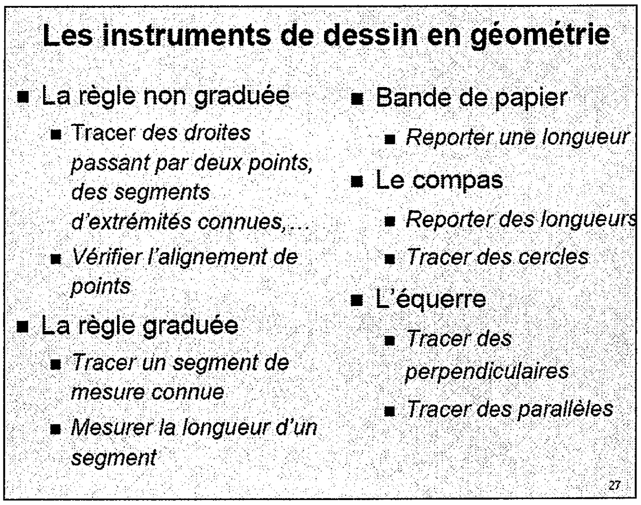
L'accent est mis auprès des étudiants sur le fait que :

- Les procédures qu'ils utilisent de manière plus ou moins automatisée pour effectuer des constructions doivent avoir une justification mathématique
- Les propriétés utilisées sont mobilisables pour tous mais le plus souvent non disponibles spontanément pour bon nombre d'étudiants
- Le travail essentiel à effectuer n'est pas d'emmagasiner des connaissances nouvelles (ils sont généralement capables de citer, voire même d'énoncer, pratiquement tous les théorèmes classiques de géométrie plane), mais de développer leur raisonnement géométrique dans G2 en créant des liens entre les constructions qu'ils savent effectuer et les propriétés sous-jacentes.

La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer une bissectrice, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, etc. Les étudiants disposent d'une liste d'activités (cf. annexe 29) et sont invités à effectuer les activités 1 et 3 chez eux pour la séance suivante. Ces deux activités consistent à continuer le travail précédent sur d'autres objets géométriques.

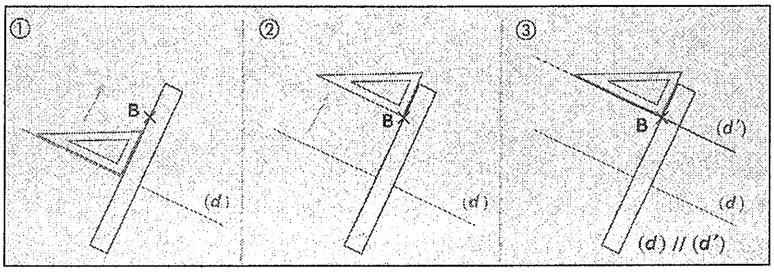
1.6. Etape 5 : Les instruments de dessin

La semaine suivante, la séance en grand groupe commence par un point sur les instruments de dessin :

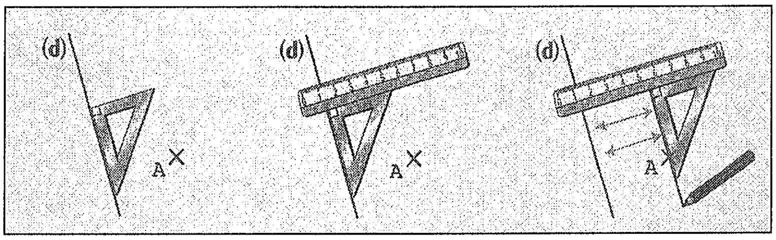


Il s'agit notamment d'expliciter le statut de la règle non graduée par rapport à la règle graduée, compte-tenu du fait que de nombreux PE1 ne font pas la différence entre les deux types de règle (cf. chapitre 5, § 3.5, pages 271 et suivantes). J'attire notamment leur attention sur le fait que l'expression « à la règle et au compas » signifie en principe « à la règle non graduée et au compas ». Par conséquent, tracer un milieu par exemple est un peu compliqué puisque cela suppose de tracer une médiatrice. L'accent est également mis sur le fait que le compas est un excellent outil certes pour tracer des cercles, mais aussi pour reporter une longueur, qui n'a ainsi pas besoin d'être mesurée. C'est l'occasion enfin de rappeler qu'à l'école élémentaire, les droites perpendiculaires se tracent à l'équerre et non à la règle et au compas, cette dernière procédure ne pouvant être justifiée à ce niveau, tandis que des droites parallèles se tracent à la règle et à l'équerre, en s'appuyant sur une propriété que l'on peut expliciter avec les enfants : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles.

On peut d'ailleurs penser que c'est cette propriété simple qui fait privilégier le positionnement de l'équerre avec un côté de l'angle droit posé sur la droite initiale dans la procédure de tracé de parallèles à la règle et à l'équerre. Quand on analyse les manuels de sixième par exemple (neuf manuels ont ici été analysés), on observe deux procédures proches pour tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné, comme le montrent les deux extraits suivants :



[Prisme. 6ème. 2005, page 127][162]



[Repère. 6ème. 2005, page 162] [163]

Ces deux versions ne diffèrent que par le fait que dans le premier cas, il faut simultanément qu'un côté de l'équerre soit le long de d et qu'un autre passe par le point (ici B). Or cette deuxième contrainte est inutile et difficile à prendre en compte pour les élèves, d'une part parce qu'il faut penser à deux choses en même temps, et d'autre part parce que matériellement, quand on déplace l'équerre pour satisfaire la deuxième contrainte, il est fréquent qu'elle ne vérifie plus la première. Certains manuels précisent qu'il faut que ce soit un des côtés de l'angle droit qui soit le long de d[164], d'autres pas ; mais dans **tous** les cas, le dessin proposé pose un côté de l'angle droit de l'équerre sur la droite d, ce qui n'est pas nécessaire[165]. Ainsi, dans tous les cas observés, on peut considérer que la propriété qui justifie la construction est que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

Après cette partie relativement rapide, un travail didactique plus long est effectué sur l'analyse d'une page de manuel au travers d'un ancien sujet de concours. Vingt minutes avant la fin de la séance, un nouvel exercice est proposé aux étudiants, en travail individuel.

---

[162] Procédure utilisée également par [Bréal. 6ème. 2005], [Delagrave. 6ème. 2005, page 124], [Magnard. 6ème. 2005, page 96], [Transmath. 6ème. 2005, page 150]

[163] Procédure utilisée également par [Multi Math. 6ème. 2005, page 115], [Diabolo. 6ème. 2005, page 143], [Domino. 6ème. 2005, page 140].

[164] Il s'agit, parmi les neuf manuels ci-dessus étudiés, de [Prisme. 6ème. 2005], [Phare. 6ème. 2005], [Bréal. 6ème. 2005], [Delagrave. 6ème. 2005].

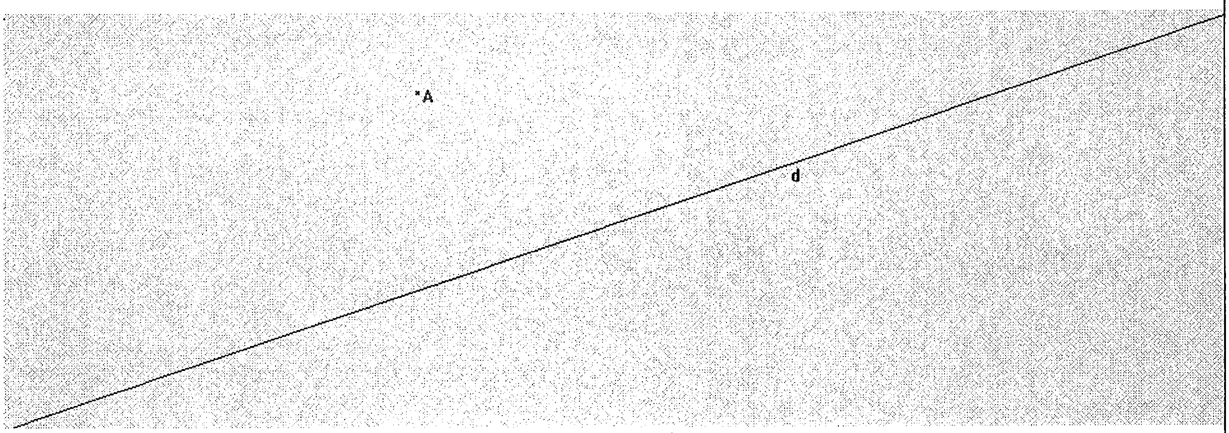
[165] La construction de parallèles à l'équerre n'a pas toujours imposé d'utiliser un des côtés de l'angle droit de l'équerre. On trouvera en annexe 36 un extrait d'un manuel de 1940 qui propose entre autres une construction de parallèles à la règle et à l'équerre en utilisant l'hypoténuse de l'équerre. La justification donnée repose sur les angles, et est donc inaccessible en cycle 3 ou en sixième aujourd'hui.

1.7. Etape 6 : Droite parallèle

La consigne est la suivante :

1. Tracer une droite parallèle à d, passant par A, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas.
2. Ecrire un scénario de construction correspondant à cette construction.
3. Donner les propriétés qui justifient que l'on a bien, avec ce scénario, tracé la droite parallèle à d passant par A.

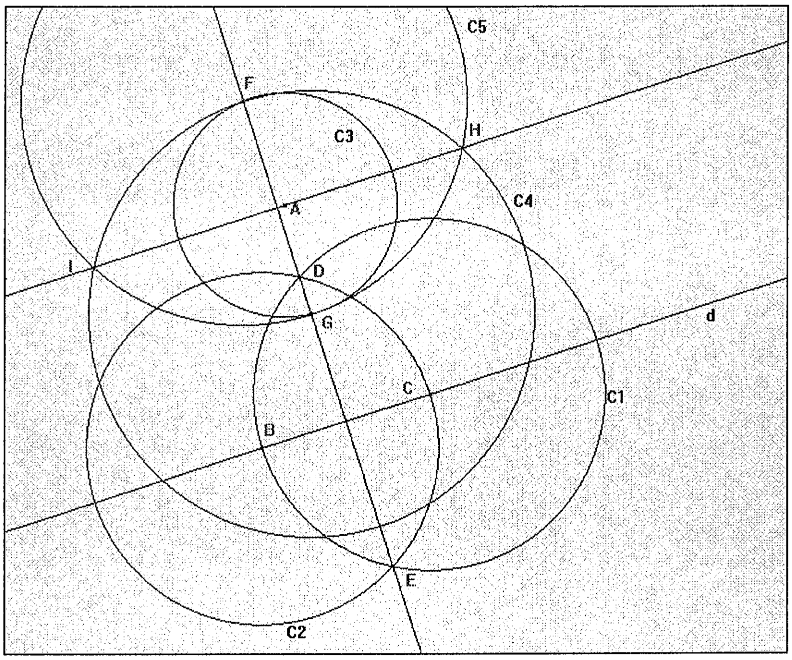
NB : évitez d'une part le crayon à papier pour les questions 2 et 3, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en TD. Merci.



Cette fois, les procédures possibles sont très nombreuses. Décrivons les principales qui sont attendues, ainsi que les justifications possibles avec les PE1. Notons que le problème de l'existence ou dans certains cas de l'unicité des points considérés ne sera pas explicitement étudié avec les étudiants. Les conditions seront choisies pour que les points nommés existent et soient uniques. Des remarques à ce sujet seront éventuellement effectuées oralement, notamment concernant les intersections de cercle.

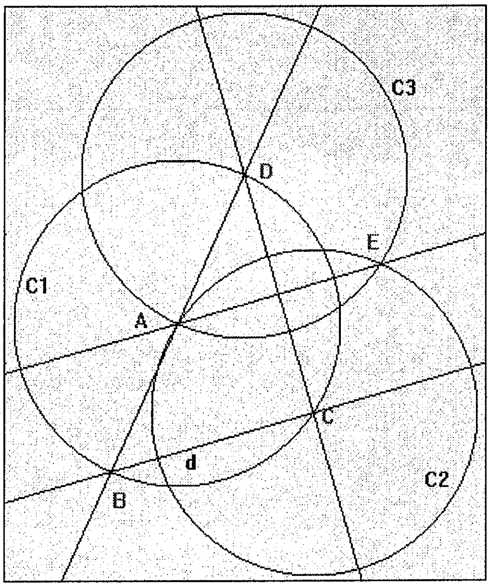
Procédure a : deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles

Les perpendiculaires en question sont tracées comme médiatrices de points.



Scénario	Justification
Placer deux points B et C sur la droite d	
Tracer un cercle C_1 de centre C passant par B et un cercle C_2 de centre B passant par C.	
Soit D et E les deux points d'intersections de C_1 et C_2. Tracer la droite (DE).	On a donc : BD = BE = CD = CE donc (DE) est la médiatrice de [BC] donc (DE) est perpendiculaire à (BC), i.e. à d
Tracer un cercle C_3 de centre A coupant (DE) en deux points F et G.	On a AF = AG donc A est sur la médiatrice de [FG]
Tracer un cercle C_4 de centre G passant par F et un cercle C_5 de centre F passant par G.	
Soit I et H les deux points d'intersection de C_4 et C_5.	On a donc HG = HF = IF = IG Donc (HI) est la médiatrice de [FG] Donc (HI) est perpendiculaire à (FG), donc à (DE) Or (DE) est perpendiculaire à d Donc (HI) est parallèle à d et passe par A

Il faut alors reconnaître que le tracé des nombreux cercles ne facilite pas la lecture du dessin. On peut optimiser cette procédure en construisant la première perpendiculaire à partir d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle comme le fait la procédure ci-dessous.

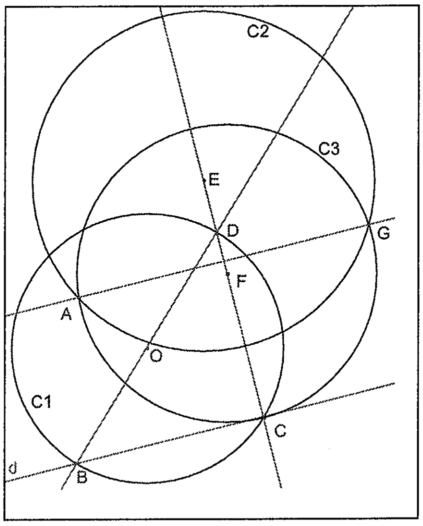


Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A qui coupe la droite d en deux points B et C	Donc $(BC) = d$ et $C \in C_1$
Soit D le point du cercle tel que [BD] soit un diamètre du cercle C_1 . Tracer la droite (CD).	Le triangle BCD est inscrit dans un cercle et [BD] est un diamètre de ce cercle Donc BCD est un triangle rectangle en C Donc (DC) est perpendiculaire à d Par ailleurs, $D \in C_1$, donc : $AD = AC$
Tracer les cercles C_2 de centre C passant par A et C_3 de centre D passant par A.	
Soit E le second point d'intersection de C_2 et C_3	On a donc $AC = AD = EC = ED$ Donc (AE) est la médiatrice de [CD] Donc (AE) est perpendiculaire à (CD), qui est perpendiculaire à d Donc (AE) est parallèle à d et passe par A

Remarque :

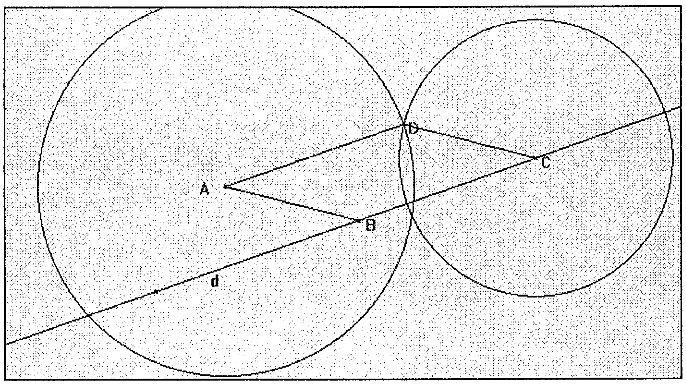
Le premier cercle construit peut ne pas avoir comme centre A mais un point O quelconque, pourvu qu'il soit sécant avec d, et les second et troisième cercles peuvent avoir des centres quelconques pourvu que ces centres (ci-contre E et F) soient sur la première perpendiculaire tracée, et que ces cercles passent par A.

On utilise alors à nouveau le théorème du triangle rectangle inscrit dans un cercle pour la première perpendiculaire, puis le tracé d'un cerf-volant pour la seconde : deux paires de côtés consécutifs de même longueur permettent de tracer un cerf-volant qui a alors ses diagonales perpendiculaires.



En fait, seule la première de ces trois procédures sera utilisée par les étudiants.

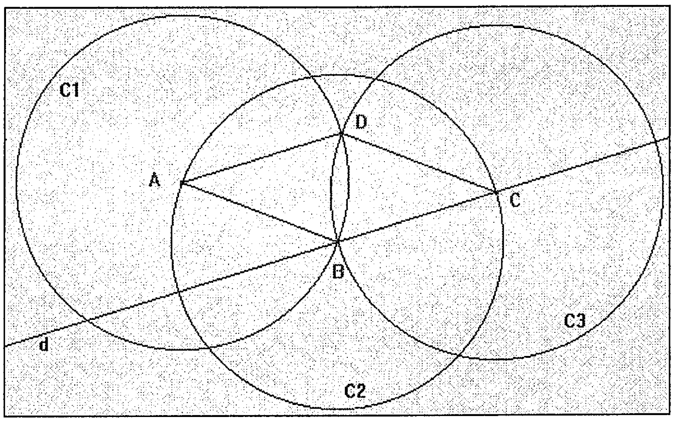
<u>Procédure b, basée sur la construction d'un parallélogramme :</u>



Scénario	Justification
Placer deux points B et C sur d.	
Tracer un cercle de centre A de rayon BC et un cercle de centre C de rayon AB.	
Soit D le point d'intersection des deux cercles tel que ABCD soit non croisé.	On a donc : BC = AD et AB = DC
	ABCD a deux paires de côtés opposés de même longueur et est non croisé. C'est donc un parallélogramme. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

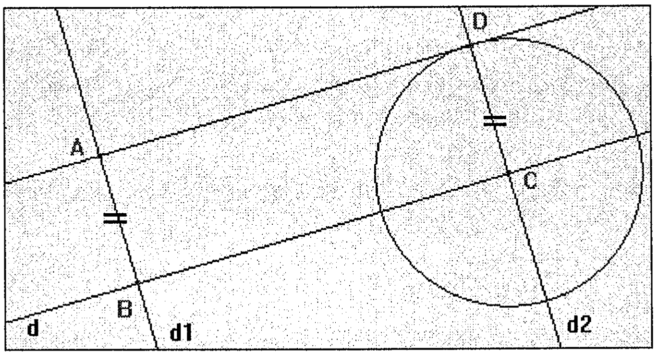
Cette procédure est la procédure standard enseignée en France pour tracer des droites parallèles.

Procédure c, basée sur la construction d'un losange



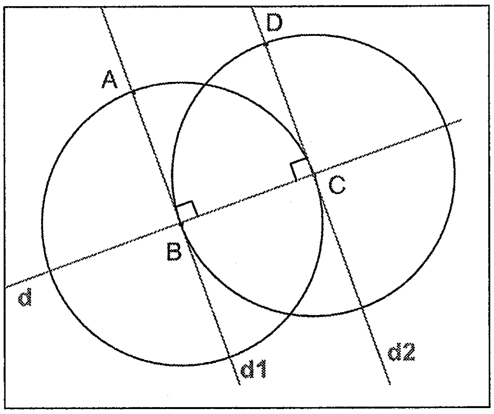
Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre A, coupant la droite d. Soit B un des deux points d'intersection de C_1 et d.	
Tracer un cercle C_2 de centre B passant par A. Soit C un des deux points d'intersection de C_2 et de d.	On a donc : $BC = AB$
Tracer un cercle C_3 de centre C passant par B. Soit D le second point d'intersection de C_1 et C_3.	Et : $CD = BC = AD$
	ABCD a quatre côtés de même longueur AB. C'est donc un losange. Ses côtés opposés sont donc parallèles. Or B et C sont sur d. Donc la droite (AD) est parallèle à d et passe par A.

Procédure d, basée sur la construction d'un rectangle.



Scénario	Justification
Tracer deux droites perpendiculaires à d, d_1 et d_2 dont une (d_1) passant par A (ces perpendiculaires peuvent être tracées comme médiatrices de points à la règle et au compas, les traits de constructions correspondant à ces deux tracés ont ici été gommés pour faciliter la lecture du dessin).	
Soit B l'intersection de d et d_1, C celle de d et d_2.	$\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont des angles droits
Soit D le point de d_2 tel que CD =AB et placé dans le même demi-plan délimité par d que A.	ABCD est ainsi un quadrilatère avec deux côtés opposés de même longueur et deux angles droits consécutifs : c'est donc un rectangle Donc (AD) est parallèle à (BC), i.e. à d.

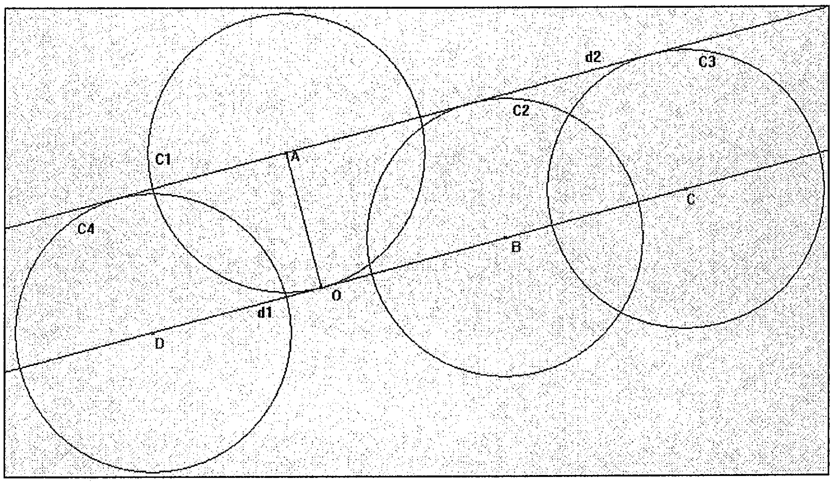
Procédure e, basée sur la construction d'un carré



Scénario	Justification
Tracer une droite d_1, perpendiculaire à d et passant par A (toujours comme médiatrice à la règle et au compas).	
Soit B l'intersection de d et d_1	$\widehat{B}$ est un angle droit
Tracer un cercle de centre B passant par A.	
Soit C une intersection de ce cercle et de d.	CB = AB
Tracer une droite d_2, perpendiculaire à d et passant par C.	$\widehat{C}$ est un angle droit
Soit D le point de d_2 tel que CD =AB et placé dans le même demi-plan délimité par d que A.	ABCD est ainsi un quadrilatère avec trois côtés de même longueur et deux angles droits consécutifs : c'est donc un carré Donc (AD) est parallèle à (BC), i.e. à d.

Procédure f, basée sur le tracé d'une droite tangente à des cercles

Une procédure incorrecte dans G2 est parfois utilisée par les étudiants : il s'agit de déterminer par tâtonnement, perceptivement, donc dans G1, un cercle C1 de centre A tangent à la droite d, c'est-à-dire de rayon minimum, puis de tracer des cercles C2, C3, C3 de même rayon dont le centre est sur la droite d. La droite cherchée d2 est alors tracée perceptivement tangente à ces cercles.



Cette procédure, comme la procédure d, est basée sur la notion de droites parallèles comme droites de même écartement partout.

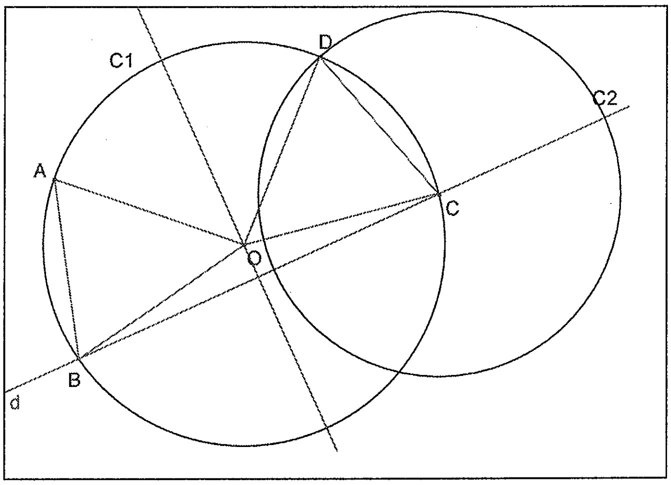
En effet, déterminer le cercle de centre A tangent à d en un point O revient à déterminer un point O tel que le segment [OA] soit perpendiculaire à d. De même, tracer une droite tangente aux cercles C2, C3, C4 centrés sur d revient à déterminer les rayons de ces cercles qui sont perpendiculaires à d. Ainsi, cette procédure se rapproche de la procédure d, mais sans que les perpendiculaires soient effectivement tracées. C'est la perception qui permet d'obtenir le rayon du premier cercle et la droite tangente aux cercles tracés ensuite, la procédure se situe donc dans G1et ne peut être acceptée dans G2.

D'autres procédures correctes sont envisagées. Parmi elles, notons la seconde construction géométrographique de Lemoine ([Lemoine. 1902, page 25]), basée sur le trapèze isocèle, que l'on peut, avec les notations et le langage actuels, formuler de la manière suivante[166] :

Placer un point O quelconque dans le plan. Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon OA, qui coupe la droite d en deux points B et C. Tracer le cercle C_2 de centre C et de rayon BA,

[166] Le texte de Lemoine est :
« Je trace, O étant arbitraire, un cercle O (OA) qui coupe BC en B et en C ; je décris le cercle C (BA) qui coupe O (OA) en D du même côté de BC que A ; je trace AD qui est la parallèle cherchée. » [ibid.]

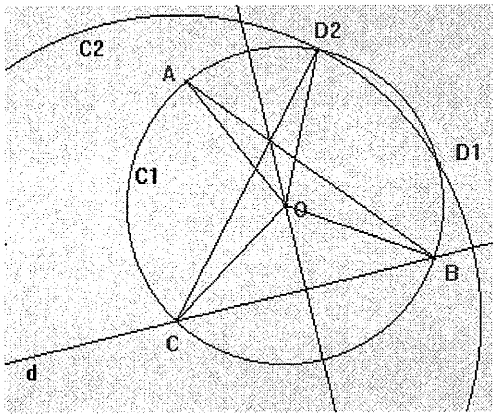
qui coupe le cercle C_1 en un point D du même côté de la droite d que A. Tracer la droite (AD) qui est la parallèle cherchée.



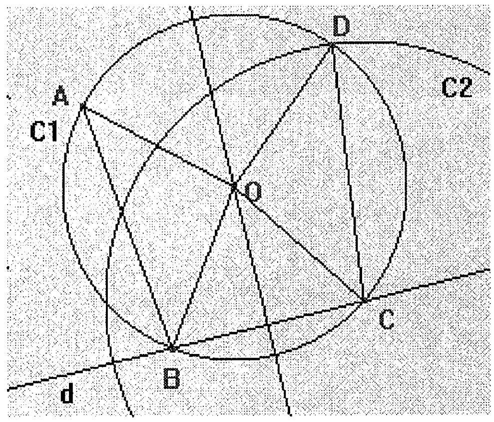
En fait, ce scénario présente quelques ambiguïtés, et la formulation a donc été ci-dessous légèrement modifiée et complétée.

Scénario	Justification
Tracer un cercle C_1 de centre O passant par A et coupant la droite d en deux points B et C, le point B étant le plus proche de A	
Tracer un cercle C_2 de centre C de rayon AB	
Soit D l'intersection des deux cercles qui n'est pas du même côté de d que A. Si ce n'est pas possible, prendre pour D l'intersection qui n'est pas du même côté de la médiatrice de [BC] que A.	$CD = AB$ $OA = OB = OC = OD$ les triangles ODC et OAB sont isométriques et les angles $\widehat{COD}$ et $\widehat{BOA}$ sont égaux or $\widehat{COA} = \widehat{COD} + \widehat{DOA}$ de même, $\widehat{BOD} = \widehat{BOA} + \widehat{AOD}$ ainsi $\widehat{COA} = \widehat{BOD}$ les triangles COA et BOD ont ainsi 2 côtés et un angle isométriques. Ils sont donc isométriques, et $CA = DB$ les triangles BCD et CBA sont donc isométriques avec un côté commun, les hauteurs de BCA issue de A et de BCD issue de D sont donc parallèles et de même longueur.
	Donc (AD) est parallèle à (BC), i.e. à d.

Le point O n'est pas défini quelconque au départ comme dans le texte de Lemoine, car selon sa position, il n'y a pas d'intersection entre la droite d et le cercle de centre O passant par A. C'est donc le cercle qui est défini, de sorte qu'il passe par A et qu'il possède effectivement deux points d'intersection avec la droite d.



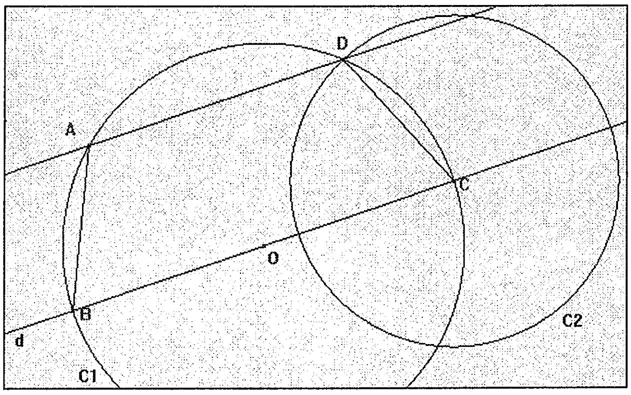
La première précision sur les distances de B et C à A a pour but d'éliminer les configurations du type ci-contre pour lesquelles les deux points d'intersection sont dans le même quart de plan par rapport à la droite d et à la médiatrice de [BC]



La seconde précision concernant le choix du point D a pour but de tenir compte d'une configuration du type ci-contre, pour lesquelles les deux points d'intersection sont du même côté de d que A.

Lemoine explicite l'ambiguïté de la construction classique des parallèles à partir du parallélogramme, mais ne repère pas les ambiguïtés présentes dans sa seconde construction d'une parallèle à une droite passant par un point.
Le scénario et la justification proposés ci-dessus peuvent être reformulés en tenant compte des dispositions des points dans ces derniers cas, et un raisonnement de même type permet également de conclure au parallélisme.

Notons encore cette procédure, proche de la précédente mais avec le point O sur la droite d, basée sur la construction de deux triangles isocèles isométriques, et également économique en terme de tracé :



Scénario	Justification
Soit O un point de d.	
Tracer le cercle C_1 de centre O passant par A. Il coupe d en deux points B et C.	On a donc $OA = OB = OC$
Tracer le cercle C_2 de centre C de rayon AB. Soit D l'intersection de C_1 et de C_2 qui est dans le même demi-plan délimité par d que A.	On a donc : $DC = AB$ et $OD = OC$ Les triangles OAB et ODC sont isométriques. Les hauteurs issues de A et de D sont donc de même longueur, les sommets A et D sont donc à la même distance de la droite d qui porte les côtés opposés à ces sommets. Or ces sommets sont dans le même demi-plan délimité par d, donc (AD) est parallèle à (BC), i.e. à d.

Il existe donc de nombreuses procédures pour tracer une parallèle à une droite d passant par un point A. C'est l'intérêt de cette consigne : elle est très ouverte et doit permettre d'explorer de nombreuses situations différentes.

Là encore, vingt minutes suffisent aux étudiants pour effectuer une construction, rédiger un scénario de construction puis donner les propriétés qu'ils pensent avoir utilisées.

1.8. Etape 7 : Atelier de géométrie plane 2

1.8.1. Première démarche : effectuer la construction puis repérer les propriétés utilisées

La séance en groupe de base suivante commence par la mise en commun des procédures utilisées par les étudiants. Comme à la séance précédente, l'accent est mis sur la formulation des scénarios de construction, puis sur la justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Pour la procédure c par exemple, on met en évidence que :

- la construction est basée sur la définition du losange comme quadrilatère avec quatre côtés isométriques
- une propriété du losange permet ensuite de conclure que les côtés sont parallèles

De même, pour la procédure b, on met en évidence que :

- la construction d'un parallélogramme est basée sur la définition « quadrilatère non croisé, ou convexe, avec deux paires de côtés opposés de même longueur »
- une propriété du parallélogramme permet ensuite de conclure que les côtés opposés sont parallèles

Dans un premier temps, l'aspect non croisé, ou convexe, n'est pas pris en compte par les étudiants, comme c'est généralement le cas des problèmes de convexité dans G2 (l'analyse de leurs productions montre que sur les 103 étudiants, 24 utilisent cette procédure, dont un seul fait référence aux deux points d'intersection possibles). Ils ne tracent pas les cercles complets mais seulement des arcs de cercles, dans la zone qui les intéresse pour obtenir le point que **perceptivement**, ils ont déjà positionné. Ils ne voient pas que deux points correspondent à la définition, incomplète, à laquelle ils se réfèrent : « un parallélogramme est un quadrilatère avec deux paires de côtés opposés de même longueur ». La perception visuelle (G1) prend le dessus et seul le point « qui marche » est pris en compte. C'est le même phénomène qui apparaît dans [Lemoine. 1902, page 25] lorsqu'il décrit la seconde construction géométrographique d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné. L'utilisation de Cabri, avec lequel il est plus simple de tracer des cercles complets que des arcs de cercles, de même que la rédaction des scénarios de construction, dans lesquels il est également plus facile d'expliciter un cercle qu'un arc de cercle, permettent de mettre ce problème de définition en évidence. C'est l'occasion d'insister sur l'importance de l'hypothèse « convexe » et d'expliciter pourquoi la définition du parallélogramme à partir des côtés opposés parallèles est plus simple que celle à partir des côtés opposés de même longueur : elle ne nécessite pas de préciser que le quadrilatère est convexe. En effet, chaque paire de côtés parallèles définit une bande à bords parallèles. Considérer deux paires de côtés opposés parallèles revient donc à considérer l'intersection de deux bandes à bords parallèles. Or les bandes à bords parallèles sont convexes et l'intersection de deux ensembles convexes est convexe. L'intersection de deux bandes à bords parallèles, c'est-à-dire un parallélogramme, est donc convexe.

D'autres constructions sont proposées par les étudiants, et chaque fois le contrat pour le groupe est d'essayer d'établir la justification.
En analysant les constructions proposées, on s'aperçoit que certaines ont été obtenues un peu par hasard, c'est le cas par exemple de la dernière procédure décrite précedemment, basée sur les deux triangles isocèles, et le défi consiste alors à justifier pour s'assurer que « ça marche toujours ».

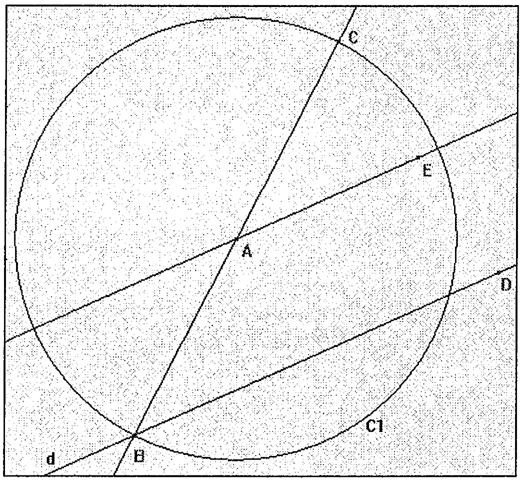
1.8.2. Deuxième démarche : choisir une propriété puis effectuer une construction qui l'utilise

D'autres procédures au contraire ont manifestement été mises en place en cherchant à appliquer une propriété ou un théorème particuliers. La règle du jeu change alors pour devenir :

« Choisissez une situation dans laquelle vous savez qu'il y a des parallèles : une figure particulière ou un théorème de géométrie qui permet de conclure que sous telles hypothèses, deux droites sont parallèles, puis mettez en œuvre une construction dont vous avez ainsi à l'avance la justification ».

A ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[167], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée. Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction.
L'exemple est pris avec le théorème de la « droite des milieux ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème - la « récitation » fonctionne en général très bien -, puis à l'**utiliser** pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :

[167] si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles



Scénario	Justification
Tracer un cercle de centre A qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB).	
Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de [BC]
Placer un point D sur d	$D \in d$
Placer le milieu E de [DC] (on peut utiliser une construction de la médiatrice à la règle et au compas)	E est le milieu de [DC]
Tracer la droite (AE)	(AE) est la droite qui joint les milieux des côtés [BC] et [CD] du triangle BCD. Elle est donc parallèle au côté [BD]. C'est donc une droite parallèle à d passant par A.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier ainsi les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le scénario, qui est ici une manière de formuler les hypothèses. Le lien avec les paradigmes G1 et G2, présentés la semaine précédente, est bien sûr rappelé.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un scénario de construction
- repérer des hypothèses et établir une démonstration
- utiliser un théorème pour mettre en place une construction

Elles sont bien évidemment liées à l'objectif de raviver des connaissances (définitions et théorèmes ou propriétés utilisés) et développer des compétences dans le paradigme G2.

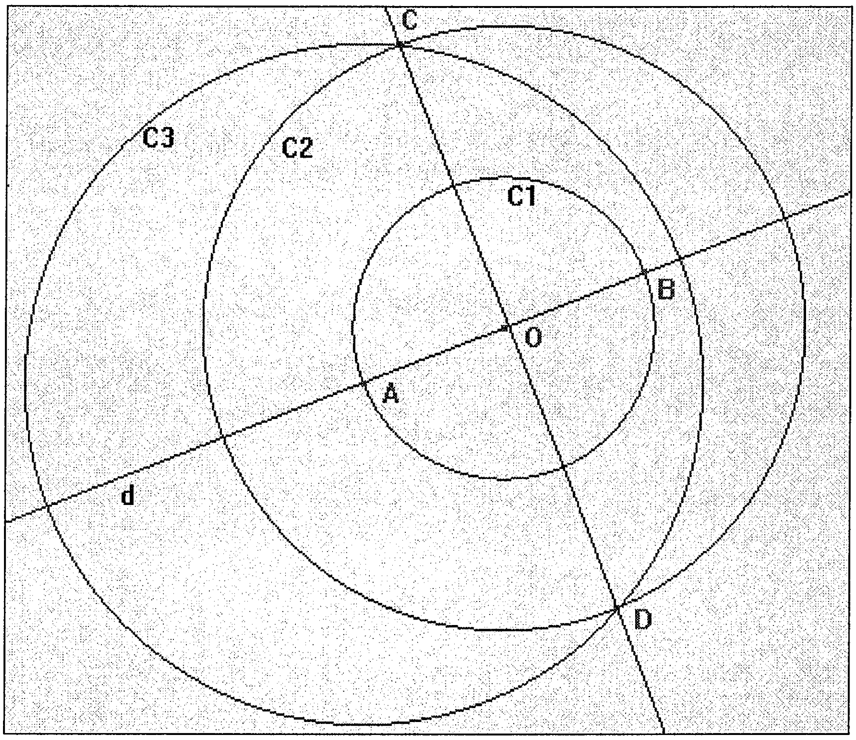
Remarquons par ailleurs que le point de vue de la simplicité des constructions, au sens de la géométrographie de Lemoine (cf. chapitre 2, § 1.6.3, pages 87 et suivantes), n'est jamais souligné, ce qui relèverait de G1, car ce n'est pas l'objectif de ce travail ; seule la conformité avec la théorie, qui relève de G2, importe. Autrement dit, l'activité se situe résolument dans G2 et non dans G1.

1.9. Etape 8 : Situation « médiatrice »

La semaine suivante, la séance en grand groupe est consacrée à des analyses de productions d'élèves, et la dernière demi-heure est à nouveau réservée à un exercice, proposé comme les précédents sur une feuille à compléter pour un travail individuel (cf. annexe 33), et rendue à la fin de la séance. L'énoncé est le suivant :

> Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.
>
> Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.
>
> Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon 4 cm.
>
> Tracer le cercle C_3 de centre A et de rayon 4,5 cm. Ce cercle coupe le cercle C_2 en deux points C et D.
>
> *Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ? Conclure.*
>
> NB : évitez d'une part le crayon à papier pour la dernière question, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en TD. Merci.

Cabri-géomètre nous fournit le dessin suivant :



Cette situation a été proposée par le GreDiM, et travaillée en formation avec les PE1. Le lecteur trouvera leur présentation et analyse détaillées dans [Parzysz. 2001.2]. Reprenons néanmoins ici les caractéristiques qui nous intéressent :

- la forme de la question, « quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir … », proche de celle utilisée lors de l'expérimentation Cabri pour la situation PARC, a pour objectif de laisser un peu de marge de manœuvre aux étudiants et en particulier de leur permettre a priori d'effectuer une démarche dans G1 ou dans G2. De ce point de vue, la question est ambiguë : rien n'indique s'il faut se situer dans G1 ou dans G2. En particulier, il n'est pas explicitement demandé de démontrer, ce qui inciterait a priori à se situer dans G2, compte tenu du contrat didactique explicité précédemment avec les PE1.
- cette situation est fondée sur l'utilisation d'un triplet pythagoricien (x, y, z), ou plutôt pseudo-pythagoricien, c'est-à-dire tel que $x^2 + y^2 = z^2 \pm 1$. Dans le cas présent, on a : $4^2 + 8^2 = 80 = 9^2 - 1$; les valeurs 4, 8 et 9 sont ensuite divisées par 2 pour obtenir un dessin de format convenable avec l'unité centimètre. Ces valeurs numériques sont évidemment choisies pour que perceptivement, c'est-à-dire si on se situe dans G1, on puisse considérer que (CD) est effectivement la médiatrice de [AB], tandis que dans G2, une démonstration permet de conclure que ce n'est pas le cas : la droite (CD) est bien perpendiculaire à [AB], mais ne passe pas par O.

- la formulation n'incite pas à effectuer complètement la démonstration, mais à indiquer une méthode, sans nécessairement la mettre en œuvre. Cela doit permettre aux étudiants qui ne sont pas encore très à l'aise dans la rédaction de démonstrations, compétence qui n'a pas été explicitement travaillée à ce stade du dispositif de formation, de pouvoir néanmoins s'investir dans la tâche en se situant dans G2.
- par ailleurs, cette formulation incite à proposer plusieurs méthodes, et il s'agit pour nous de voir dans quel(s) paradigme(s) elles se situent et en particulier d'étudier si les paradigmes G1 et G2 vont être ou non simultanément utilisés.

Si l'énoncé de la situation est emprunté au travail du GreDiM, le dispositif pédagogique mis en place est différent par plusieurs aspects :

- un seul jeu de valeurs numériques est exploité : les étudiants reçoivent tous la même feuille
- deux phases seulement sont organisées : un temps de travail individuel pour répondre complètement à la consigne, puis une mise en commun en groupe de base, avec tout le groupe en même temps. Notamment, il n'y a pas de travail en petits groupes ni de rédaction d'affiches.

Ces différences sont liées au fait que l'objectif n'est pas le même. Le GreDiM cherche à étudier dans quel paradigme se situent spontanément les PE1 en début de formation. A ce stade du dispositif G1-G2, nous ne sommes plus en début de formation, mais au milieu, et un travail spécifique autour des paradigmes G1-G2 a déjà été fait, autour de la situation du quadrilatère en particulier, avec une présentation explicite de ces paradigmes d'une part, du contrat didactique avec les PE 1 dans le cadre du concours d'autre part. Il s'agit donc ici :

- d'étudier comment les PE1 se sont approprié ces paradigmes et ce contrat, et leur éventuelle évolution au travers des différentes activités proposées
- de leur montrer le cas échéant comment il est facile de décider de se situer dans G2 tout en travaillant, à un moment au moins de la résolution du problème, dans le paradigme G1, sans en avoir conscience. Une procédure consiste en effet à démontrer (donc dans G2) que la droite (AB) est la médiatrice de [CD], donc que la droite (CD) est perpendiculaire à [AB], puis à lire sur le dessin (G1) que la droite (CD) passe par le point O.

C'est pourquoi l'accent est mis sur un temps de travail individuel, avec les mêmes valeurs numériques pour tous, choisies parmi celles qui présentent le plus facilement des réponses différentes suivant le paradigme dans lequel on se situe. La phase de mise en commun doit permettre :

- à chaque étudiant de repérer s'il a travaillé dans G1, ou dans G2, ou dans un pseudo-paradigme qui relève des deux à la fois, en repérant la nature des hypothèses utilisées et des validations effectuées
- d'élaborer une démonstration complète de la réponse correcte, dans G2

Dans G2, une solution peut consister en la démonstration suivante :

$A \in C_1$ donc : $OA = 2\,cm$

$C \in C_2$ donc : $OC = 4\,cm$

$C \in C_3$ donc : $AC = 4{,}5\,cm$

Le triangle AOC est un triangle de côtés 2 cm, 4 cm et 4,5 cm. Or : $2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$ et $4{,}5^2 = 20{,}25$. Il suffit d'appliquer la contraposée du théorème de Pythagore pour conclure qu'il n'est pas droit.
Le triangle n'est donc pas rectangle, (AO) n'est pas perpendiculaire à (OC).
Or O est le milieu de [AB], O est donc sur la médiatrice de [AB], qui est perpendiculaire à [AB], donc C n'est pas sur la médiatrice de [AB], donc (CD) n'est pas la médiatrice de [AB].

Cette démonstration fait intervenir deux éléments :

- la contraposée du théorème de Pythagore. Or, dans l'analyse précédente des tests papier, nous avons vu que les trois quarts des étudiants utilisent spontanément la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle de côtés de longueurs 7,5 cm, 6 cm et 4,5 cm est rectangle (cf. chapitre 5, § 2.7, pages 251 et suivantes). On peut donc considérer que ce théorème est mobilisable, voire disponible, pour bon nombre d'étudiants, même si être capable d'appliquer le théorème ou sa réciproque n'assure pas d'être capable d'appliquer la contraposée du théorème.
- la définition de la médiatrice comme droite perpendiculaire au segment passant par son milieu, dont on a vu qu'elle était également largement disponible chez les étudiants.

Cette démonstration est donc accessible aux étudiants. Notons cependant que la rédaction de la conclusion peut être délicate pour certains. S'il est en effet facile d'utiliser l'implication :

$$\left.\begin{array}{l}\text{O est sur la médiatrice de [AB]}\\ \text{D est sur la médiatrice de [AB]}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(OD) perpendiculaire à [AB]}$$

il est certainement plus difficile d'utiliser :

$$\left.\begin{array}{r}\text{O est sur la médiatrice de [AB]}\\ \text{(OD) n'est pas perpendiculaire à [AB]}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{D n'est pas sur la médiatrice de [AB]}$$

Cette dernière implication se justifie aisément par le calcul propositionnel[168], mais ce type de raisonnement est délicat à manipuler avec certains PE1. La démonstration est néanmoins globalement accessible aux PE1, d'autant plus que d'autres fins de démonstration sont possibles. Par exemple :

De même que l'on montre que le triangle COA n'est pas rectangle, on obtient que le triangle DOA ne l'est pas non plus. Or on a : $\widehat{COA} = \widehat{DOA}$, donc les points D, O et C ne sont pas alignés. Donc le point O n'est pas sur la droite (CD). Or O est le milieu de [AB], O est donc sur la médiatrice de [AB]. Donc (CD) n'est pas la médiatrice de [AB].

Par ailleurs, rappelons que dans la phase de travail individuel, une démonstration complète n'était pas attendue.

2. Les résultats des étudiants aux étapes 2 et 6

Parmi les différentes étapes du dispositif de formation mis en place, quatre ont laissé des traces plus faciles à exploiter que les autres : il s'agit des quatre exercices que les étudiants ont réalisés individuellement et pour lesquels leurs productions ont pu être photocopiées au fur et à mesure. L'exercice « Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? », rencontré également lors du test, a déjà été analysé. Nous nous intéresserons donc maintenant aux trois autres

[168] La première implication peut se formaliser sous la forme : $p \wedge q \Rightarrow r$. La contraposée donne : $\neg r \Rightarrow \neg(p \wedge q)$, qui se transforme avec les lois de De Morgan en : $\neg r \Rightarrow (\neg p \vee \neg q)$, qui est successivement équivalent à :

$\neg(\neg r) \vee (\neg p \vee \neg q)$, lien implication – disjonction

$(r \vee \neg p) \vee \neg q$, associativité

$\neg(\neg r \wedge p) \vee \neg q$, loi de De Morgan

$(\neg r \wedge p) \Rightarrow \neg q$ lien disjonction - implication exercices, correspondant aux étapes 2, 6 et 8 du dispositif, et décrits dans les paragraphes 1.3, 1.7 et 1.9 de ce chapitre.

La première partie de ce chapitre a, en parallèle de la description du dispositif, tenté de démontrer l'intérêt des activités proposées du point de vue des étudiants et de leur formation, notamment dans le cadre de leur préparation au concours de professeur des écoles. Dans cette deuxième partie, je vais analyser le lien entre les paradigmes géométriques et la rédaction d'un scénario de construction. Dans la troisième partie, j'essaierai de déterminer dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les étudiants se situent lorsqu'ils résolvent le problème de la médiatrice.

2.1. Codage des productions dans les étapes 2 et 6

L'étape 2 demande de construire un triangle rectangle, d'en indiquer le scénario de construction, puis les propriétés qui justifient celle-ci. L'étape 6 reprend le même dispositif pour la construction d'une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Les éléments codés concernent chacune des trois phases de chaque étape. Le lecteur trouvera la grille de codage utilisée en annexe 35. Les procédures correspondent à celles qui ont été détaillées dans les paragraphes 1.3 et 1.7 de ce chapitre. Du point de vue des scénarios, plusieurs points de vue sont pris en compte :

- le scénario est complet, c'est-à-dire décrit effectivement toutes les actions effectuées dans la construction, ou non
- la formulation est correcte, c'est-à-dire compréhensible, correspondant au scénario et correctement rédigée du point de vue mathématique, ou non
- les mots utilisés : une importante liste de mots ou d'expressions est envisagée ; il s'agit d'identifier au plus près le langage utilisé

Du point de vue des justifications proposées, plusieurs points de vue sont également pris en compte :

- ce qui est dit est exact ou non ; dans le cas du triangle rectangle, une modalité particulière est repérée : il s'agit du cas où la propriété citée est en fait la réciproque de la propriété effectivement utilisée. C'est en particulier le cas lorsque la formulation est malhabile, par exemple : « un triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle » au lieu de « un triangle inscrit dans un cercle dont le diamètre est un côté du triangle est rectangle ». Les deux phrases sont certes exactes, mais seule la seconde justifie la construction effectuée

- ce qui est dit justifie totalement, partiellement ou pas du tout la construction effectuée
- la formulation est correcte, c'est-à-dire compréhensible et correctement rédigée du point de vue mathématique, ou non

2.2. Procédures et justifications pour tracer un triangle rectangle

Concernant les procédures de tracé de triangle rectangle, on a obtenu les résultats suivants avec, rappelons-le, un effectif total de 103 étudiants ayant effectué les quatre exercices et donc ayant assisté à toutes les séances du dispositif :

Procédures de tracé d'un triangle rectangle	%
TP - a : médiatrice avec 2 intersections d'arcs de cercle de rayon « MN »	17
TP - b : médiatrice avec 2 intersections d'arcs de cercle de rayon ≠ « MN »	32
TP - c : triangle inscrit dans un cercle	22
TP - e : autre	16
TP - f : médiatrice avec 1 intersection d'arcs de cercle et un milieu	13

La dernière procédure n'avait pas été prévue lors du début du codage, ce qui explique son code. Une procédure avait par contre été prévue, qui consistait à tracer perceptivement la perpendiculaire, mais seuls 2 étudiants ont utilisé cette procédure, qui a alors été incluse dans la procédure « autre ».

Les résultats confirment que la construction de la médiatrice est très disponible et volontiers utilisée : elle regroupe, avec ses diverses modalités, près des 2/3 des étudiants. L'analyse du test papier sur 878 étudiants laissait prévoir que les étudiants utilisant cette procédure le font généralement de manière relativement automatique, sans être capables de justifier dans le détail la procédure. Elle est connue comme une construction de la médiatrice, et ils savent que la médiatrice est une droite perpendiculaire au segment. Cette prévision est ici confirmée, comme le montre l'étude du tableau croisé des procédures et de la justification, tableau de pourcentage sur chacune des lignes :

- 57 % des étudiants qui ont choisi la procédure « triangle inscrit dans un cercle » …
- 18 % de l'ensemble de la population …

… justifient **complètement** leur construction

- 67 % des étudiants qui ont choisi la procédure «2 intersection d'arcs de cercle de rayon quelconque » …
- 39 % de ceux qui ont choisi la même procédure mais avec des rayons de longueur « MN » …
- 31 % de ceux qui ont choisi une intersection d'arcs de cercle et un milieu …
- 36 % de l'ensemble de la population …

… justifient **partiellement** leur construction

	TJD - a	TJD - b	TJD - c	TJD - d	Total
	Ce qui est dit justifie				
	Totalement	**Partiellement**	Pas du tout	Pas de justification	%
TP - a	11	39	22	28	100
TP - b	6	67	6	21	100
TP - c	57	0	22	22	100
TP - e	0	25	13	63	100
TP - f	15	31	15	38	100
Total	18	36	15	31	100

Ce tableau confirme en effet que ceux qui ont utilisé les procédures liées à la construction d'une médiatrice justifient généralement peu, voire pas du tout leur construction ; il permet de confirmer également le degré d'expertise étudié au chapitre 5 (§ 3.3, pages 261 et suivantes et § 3.6, pages 276 et suivantes) : ceux qui utilisent des rayons de cercles identiques mais différents de la longueur du segment tracé justifient mieux que ceux qui ont choisi comme rayon la longueur du segment initialement tracé, ou la procédure utilisant le milieu.

Ce tableau met également en évidence le fait que la procédure « triangle inscrit dans un cercle » est, au contraire, souvent bien justifiée. En effet, cette dernière procédure n'a pas été apprise de manière systématique. Elle nécessite de penser à la propriété pour la mettre en œuvre : on n'utilise pas cette procédure si on ne sait pas pourquoi. On retrouve ici la différence exploitée dans l'étape 7 du dispositif (cf. § 1.8, pages 397 et suivantes) entre deux démarches :

- effectuer une construction puis tenter de repérer les propriétés effectivement utilisées (hypothèse de démarche mise en œuvre par ceux qui utilisent une procédure basée sur la construction d'une médiatrice)

- choisir une propriété puis effectuer une construction qui l'utilise (hypothèse de démarche mise en œuvre par ceux qui utilisent une procédure basée sur la construction d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle)

Du point de vue des paradigmes géométriques, on peut considérer que ceux qui justifient correctement leur construction se situent dans G2 ou du moins sont prêts à le faire puisqu'ils disposent de connaissances dans G2, tandis que ceux qui justifient peu ou pas du tout ne peuvent se situer dans G2 par manque de connaissances géométriques. Notons bien que le fait de disposer des connaissances est nécessaire mais ne suffit pas pour se situer dans G2 : on peut être capable de justifier la construction de l'objet en explicitant les propriétés utilisées tout en considérant l'objet comme un objet physique et non théorique. C'est pourquoi je parle ici d'étudiants qui **certainement ne se situent pas** dans G2, au moins par manque de connaissances, pour ceux qui ne peuvent justifier leur construction, et d'autres qui **peuvent** s'y situer, sans qu'on puisse l'affirmer, pour ceux qui peuvent le faire. On peut ainsi conclure ici que moins de 20 % des étudiants **peuvent** se situer dans G2 et que connaître une procédure automatisée n'est pas un indice que l'étudiant se positionne dans G2.

2.3. Procédures et justifications pour tracer une parallèle à une droite donnée

Concernant les procédures de tracé d'une droite parallèle à une droite donnée d, passant par un point A, on a obtenu les résultats suivants :

Procédures de tracé d'une droite parallèle à une droite donnée d, passant par un point A	%
DP-a : Deux médiatrices	26
DP-b : Parallélogramme (non losange)	23
DP-c : Losange	7
DP-d : Rectangle	11
DP-e : Carré	1
DP-f : Droite tangente à des cercles	6
DP-g : Autre procédure correcte	15
DP-h : Autre procédure incorrecte	12

La séance précédente ayant permis aux étudiants de revoir la construction de deux droites perpendiculaires, la procédure utilisant un tracé de deux médiatrices est fréquemment utilisée (26 %). On peut considérer cette procédure comme une adaptation de la procédure habituelle de l'école pour tracer une droite parallèle à une droite donnée. Nous avons en effet précédemment montré (cf. § 1.6 de ce chapitre, pages 386 et suivantes) que la procédure enseignée pour tracer une droite parallèle à une autre, consistait à utiliser la règle et l'équerre, en traçant, généralement virtuellement, deux perpendiculaires successives et en utilisant la propriété : deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. Cette propriété est donc disponible pour la plupart des étudiants. Il ne leur reste donc plus qu'à l'adapter puisqu'ils ne disposent pas de l'équerre.

L'autre procédure très utilisée est la procédure habituellement utilisée en France pour tracer des parallèles, basée sur la construction d'un parallélogramme. Rappelons que, parmi les 24 étudiants ayant utilisé cette procédure, un seul a précisé qu'il y avait deux points d'intersection des cercles tracés et qu'il fallait choisir celui qui permettait au quadrilatère de ne pas être croisé. Ce problème a déjà été analysé au paragraphe 1.8.1 de ce chapitre. Si on y ajoute la variante de la construction d'un losange, cette procédure devient la plus fréquente (30 %). C'est probablement parce que c'est une procédure simple :

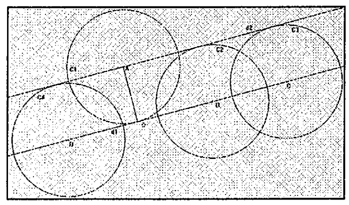
- simple au sens de la simplicité dans la géométrographie de Lemoine : le nombre d'éléments à construire est faible (deux points quelconques sur une droite puis deux cercles pour le parallélogramme, un point quelconque puis trois cercles de même rayon pour le losange)
- simple au niveau de la démonstration : tout est basé sur une définition et une propriété caractéristique du parallélogramme ou du losange, objets bien connus depuis la classe de cinquième (voire depuis l'école élémentaire), même si, comme nous l'avons signalé, une subtilité de la définition du parallélogramme lorsqu'on le définit à partir de l'égalité des mesures des longueurs des côtés opposés, à savoir qu'il doit être non croisé, ou convexe, est souvent occultée.

Si cette procédure est la procédure enseignée, c'est aussi parce qu'elle est précise : on utilise le compas, plus précis que l'équerre.

Contrairement à la situation de tracé d'un triangle rectangle, où les procédures rassemblées dans la modalité « autre » sont généralement complexes ou inhabituelles mais néanmoins exactes, ce tracé de parallèle comprend un lot de procédures incorrectes (6 + 12 %) dans G2.

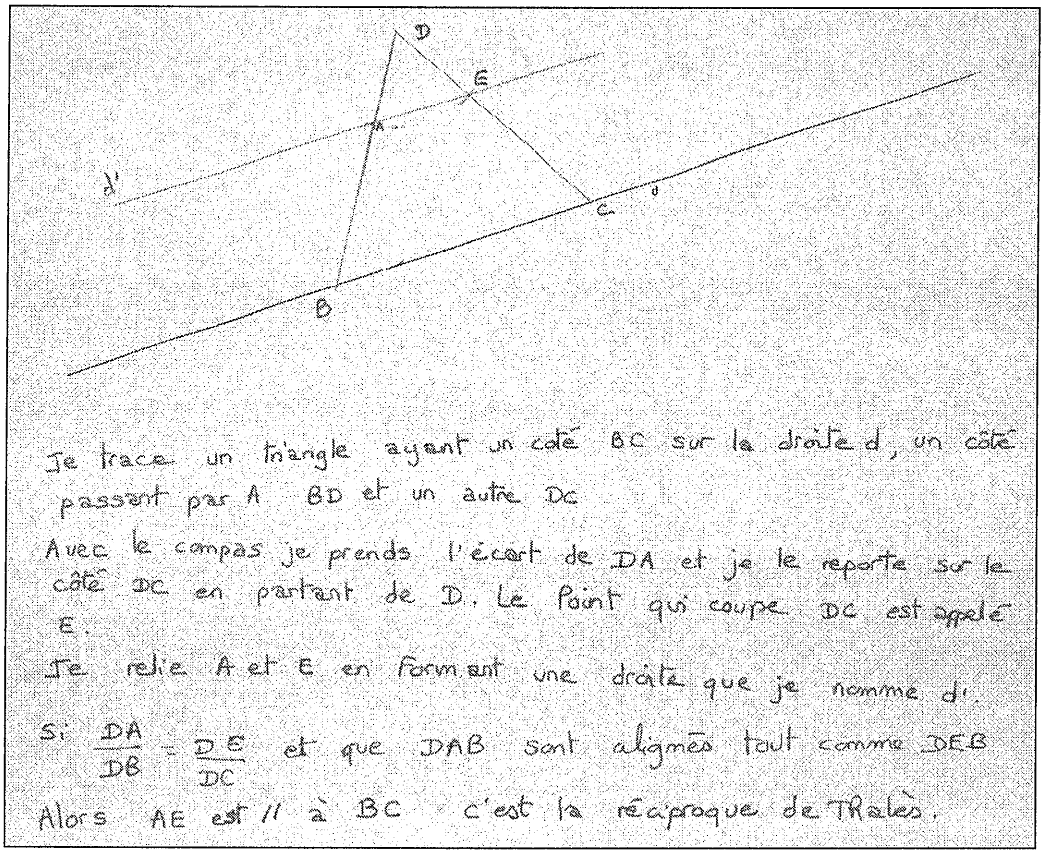
Certaines relèvent de G1 et n'ont pas de justification dans G2, parce qu'elles sont basées, à une étape au moins de la construction, sur la perception, voire le tâtonnement.

C'est le cas par exemple nous l'avons vu de la procédure f (cf. §1.7, pages 388 et suivantes), basée sur la notion de droites de même écartement partout ; cet écartement constant est obtenu par tâtonnement, perceptivement, par le tracé d'un cercle tangent à une droite puis d'une droite tangente à des cercles.



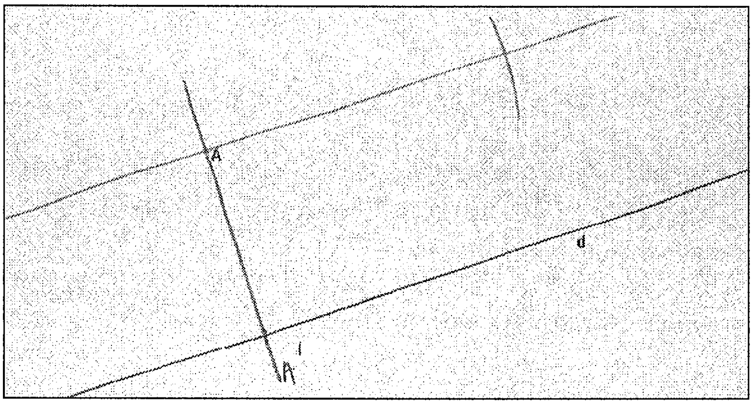
Notons qu'un seul des trois cercles centrés sur d suffit mais que souvent, les étudiants utilisant cette procédure en tracent deux ou trois, pour augmenter la précision. Caractérisée par la perception et la recherche de précision, cette procédure est une procédure de G1 ; les éléments qui pourraient en faire une procédure de G2 sont remplacés par la perception : le tracé d'une droite perpendiculaire à d passant par A permettant de définir le centre O du cercle C1 par exemple n'est pas mis en œuvre et est remplacé par le placement de O de manière perceptive. Autrement dit, les procédures de G2 permettant de tracer un cercle tangent à une droite, de centre donné, ou une droite tangente à deux cercles, ne sont pas exploitées, probablement parce qu'elles ne sont pas disponibles, ni même mobilisables, elles sont alors remplacées par la perception. Il s'agit ici d'une classe de procédures que l'on peut interpréter comme des simplifications, grâce à un élément perceptif, de procédures correctes mais complexes dans G2.

Un autre type de cas se présente, celui où il manque des hypothèses pour obtenir une procédure correcte dans G2, hypothèses remplacées par des éléments perceptifs pour obtenir néanmoins des droites parallèles dans G1. Considérons par exemple la production suivante :



Cette construction ne produit des droites parallèles que si DB = DC ; cette contrainte n'est pas indiquée, ni prise en compte de manière explicite ; aucun trait de construction ne laisse apparaître que le triangle DBC a été volontairement tracé isocèle en D.

D'autres productions gardent par ailleurs une part de flou importante. Que dire en effet de la procédure employée dans la production ci-dessous, qui n'est accompagnée d'aucun scénario ni justification :



La droite obtenue peut être considérée, dans G1, comme parallèle à d, mais on peut faire l'hypothèse que la perception a joué un grand rôle dans cette construction. La procédure n'est pas décrite et l'absence de traits de construction apparents ne permet pas de la reconstituer.

De manière générale, toutes ces constructions présentent une part de perceptif plus ou moins importante, et totalement implicite : l'étudiant ne se rend pas probablement pas compte qu'il utilise la perception.

On peut à nouveau étudier les justifications proposées pour le scénario en croisant les procédures utilisées et le fait que les justifications démontrent totalement, partiellement, ou pas du tout, la construction effectuée. Pour éviter d'avoir trop de cases à faible effectif dans le tableau ci-dessous, des procédures proches ont été rassemblées : rectangle et carré, parallélogramme et losange, cercles tangents et autres procédures incorrectes dans G2. On obtient le tableau de pourcentages sur les lignes suivant, tableau auquel on a ajouté pour plus de lisibilité le rappel des pourcentages déjà étudiés de chaque modalité par rapport au total (l'effectif étant de 103, cette première colonne est très proche de la colonne d'effectifs) :

% de cette modalité par rapport au total	Modalité	DJD -a	DJD - b	DJD - c	DJD - d	Total
		Ce qui est dit justifie				
		Totalement	Partiellement	Pas du tout	Pas de justification	%
26	DP – a : deux médiatrices	7	81	0	11	100
30	DP – b ou c parallélogramme ou losange	26	48	16	10	100
12	DP – d ou e : rectangle ou carré	8	83	8	0	100
15	DP – g : autres procédures correctes	0	60	0	40	100
18	DP – f ou h : cercles tangents ou autres procédures incorrectes	0	22	39	39	100
100	Total	11	58	13	18	100

Par rapport au tracé de triangle rectangle, le pourcentage d'absences de justifications a diminué, celui de justifications incomplètes a augmenté. Seule la procédure « parallélogramme ou losange » est un peu mieux justifiée que la moyenne : un quart des étudiants l'ayant utilisée est capable de justifier totalement sa construction. Mais c'est encore bien peu !

Du point de vue des paradigmes G1-G2, si on considère que seuls ceux qui justifient totalement leur construction se situent dans G2, le pourcentage d'étudiants dans G2 est très faible : 11 % dans cette situation !

En fait, c'est la règle du jeu qui est encore difficile : « que faut-il dire exactement ? ». Ce qui est dit est généralement exact (seuls 7 % des étudiants disent des choses inexactes en guise de justification) ; dans 77 % des productions, tout ce qui est affirmé est exact mais s'avère insuffisant pour justifier totalement la procédure utilisée. Dans la procédure « parallélogramme » par exemple, la justification est souvent : « j'ai tracé un parallélogramme, donc les côtés opposés sont parallèles ». Mais rien ne permet d'expliquer pourquoi il s'agit bien d'un parallélogramme : aucune référence à l'égalité des longueurs des côtés n'est effectuée (et encore moins à la convexité du quadrilatère) ! Le repérage des hypothèses, issues de la construction effectuée, est difficile.
Du point de vue des paradigmes géométriques, on peut considérer que la **difficulté à repérer les hypothèses** est un réel handicap pour se situer efficacement dans G2, c'est en effet une première étape indispensable à la mise en œuvre d'un raisonnement hypothético-déductif.

2.4. Le langage utilisé dans la rédaction des scénarios

Du point de vue du vocabulaire, de nombreuses expressions sont repérées et codées, afin d'analyser le langage utilisé par les étudiants dans la rédaction des scénarios de construction. Il s'agit de déterminer dans quelle mesure les étudiants utilisent un langage qui décrit plutôt l'action effectuée et les instruments utilisés (G1), ou plutôt l'objet mathématique construit (G2). Cet « objet mathématique » recouvre l'objet final mais aussi tous les objets intermédiaires introduits pour effectuer la construction : droites, cercles, points. Plusieurs classes de mots ou d'expressions peuvent être distinguées :

- les expressions qui décrivent l'objet géométrique construit :
  - cercle
  - centre
  - rayon
  - intersection

  Ces mots sont extraits du langage mathématique. Ils doivent être maîtrisés par les PE1 (les trois premiers devant l'être par des élèves de cycle 3).
- les expressions qui décrivent l'instrument utilisé et la manière de s'en servir :
  - compas
  - écartement, écart, ouverture

  - pointe du compas, pointer
- les verbes décrivant l'action, le geste à effectuer :
  - reporter
  - joindre, rejoindre, relier , prolonger
- les expressions remplaçant le mot « intersection » : croisement, rencontre, se rejoindre
- les expressions remplaçant le mot « centre » : en partant de ..., à partir de ...

  Ces quatre dernières classes sont très liées à l'action, au geste effectué, mais pas à l'objet géométrique. Le langage utilisé n'est pas celui habituellement utilisé en géométrie par l'« expert ».

Les mêmes expressions sont repérées dans les deux constructions demandées : triangle rectangle et droite parallèle.

Le tableau suivant récapitule les informations obtenues en croisant le vocabulaire utilisé avec les procédures mises en œuvre. En ligne 1, il fait apparaître le nombre d'étudiants ayant utilisé chacune des procédures. Dans les colonnes 6 et 14, on trouve le nombre d'étudiants ayant utilisé chacune des expressions, d'une part pour le scénario de construction du triangle rectangle (col. 6), et d'autre part pour celui de la droite parallèle (col. 14), ainsi que le pourcentage par rapport à l'ensemble des étudiants. Les colonnes 1 à 5 pour le triangle, puis 7 à 13 pour la droite, indiquent d'une part le nombre d'étudiants ayant utilisé telle expression dans la description de telle procédure, puis le pourcentage d'étudiants ayant utilisé telle expression pour telle procédure par rapport au nombre d'étudiants ayant utilisé cette procédure.

4 étudiants sur 103 ont utilisé le mot cercle dans le cadre de la procédure TP a, soit 22 % des 18 qui ont utilisé cette procédure

			Tracé du triangle rectangle						Tracé de la droite parallèle							
			Procédures médiatrices							Procédures quadrilatère						
			TP a	TP b	TP f	TP c	TP e		DP a	DP b	DP c	DP d+e	DP f	DP g	DP h	
			Intersections d'arcs de cercle de rayon MN	Intersections d'arcs de cercle de rayon ≠ MN	1 intersection d'arcs de cercle et milieu	Triangle inscrit dans un cercle	Autres	Total	2 médiatrices	Parallélogramme non losange	Losange	Rectangle ou carré	Droite tangente à des cercles	Autre procédure correcte dans G2	Autre procédure incorrecte dans G2	Total
Ligne 1	Effectif total		18	33	13	23	16	103	26	23	7	12	6	15	12	103
			Col. 1	Col. 2	Col. 3	Col. 4	Col. 5	Col. 6	Col. 7	Col. 8	Col. 9	Col. 10	Col. 11	Col. 12	Col. 13	Col. 14
TVa	Cercle	effectif	4	2	2	23	5	36	12	9	2	6	6	8	4	47
		%	22	6	15	100	31	35	44	38	29	50	100	53	33	46
TVb	Centre	effectif	3	2	2	12	4	23	13	13	1	6	5	6	4	48
		%	17	6	15	52	25	22	48	54	14	50	83	40	33	47
TVc	Rayon	effectif	1	2	3	0	4	10	9	12	0	6	6	7	3	43
		%	6	6	23	0	25	10	33	50	0	50	100	47	25	42
TVd	Intersection	effectif	5	10	3	2	4	24	9	11	1	8	1	5	3	38
		%	28	30	23	9	25	23	33	46	14	67	17	33	25	37
TVe	Arc de cercle	effectif	3	15	3	1	6	28	3	10	0	4	0	2	2	21
		%	17	45	23	4	38	27	11	42	0	33	0	13	17	20
TVf	Compas	effectif	16	28	9	7	8	68	11	14	6	8	1	7	5	52
		%	89	85	69	30	50	66	41	58	86	67	17	47	42	50
TVg	Ecartement – Ecart - Ouverture	effectif	4	15	2	0	5	26	6	8	4	4	1	3	3	29
		%	22	45	15	0	31	25	22	33	57	33	17	20	25	28
TVh	Pointe du compas - Pointer	effectif	4	12	4	0	4	24	4	4	3	10	1	4	4	30
		%	22	36	31	0	25	23	15	17	43	83	17	27	33	29
TVi	Reporter	effectif	2	4	3	3	1	13	5	6	5	2	1	6	4	29
		%	11	12	23	13	6	13	19	25	71	17	17	40	33	28
TVj	Croisement-Rencontre-Se rejoindre	effectif	3	2	0	0	1	6	0	1	1	4	1	0	0	7
		%	17	6	0	0	6	6	0	4	14	33	17	0	0	7
TVk	Joindre – Rejoindre – Relier – Prolonger	effectif	9	17	0	7	3	36	3	2	0	8	0	0	2	15
		%	50	52	0	30	19	10	11	8	0	67	0	0	17	15
TVl	En partant de … A partir de …	effectif	4	1	3	2	0	10	3	5	4	10	0	1	3	26
		%	22	3	23	9	0	10	11	21	57	83	0	7	25	25

Plusieurs regards peuvent être portés sur ce tableau, qui vont faire l'objet des trois paragraphes suivants. Il s'agira d'analyser globalement le langage utilisé, notamment du point de vue des paradigmes géométriques G1 – G2, puis de faire le lien entre langage et procédures utilisés. L'évolution du langage utilisé sera l'objet de la dernière partie.

2.4.1. Analyse générale du langage utilisé

Si l'on s'intéresse au langage utilisé indépendamment des procédures (colonnes 6 et 14), plusieurs constats peuvent être effectués.

Tout d'abord, le langage utilisé n'est pas très géométrique et centré sur les caractéristiques de l'objet géométrique, il est plutôt centré sur les actions à effectuer et les instruments à manipuler. Ainsi, les étudiants n'utilisent pas spontanément les termes « cercle », « rayon », « centre ». Des périphrases sont utilisées pour décrire l'utilisation du compas, l'écartement, la position de la pointe, etc. Toutes les actions à effectuer sont précisément décrites. Certains obtiennent certes des scénarios corrects mais longs et difficiles à suivre, comme c'est le cas dans l'exemple suivant :

> Je trace une droite d. Je prends 2 points sur cette droite que j'appelle D et E. Je prends mon compas je choisi un écartement quelconque. Je pointe le compas en D et je trace un arc de cercle de part et d'autre de la droite d, je garde le même écartement, je pointe en E et je fais un arc de cercle de part et d'autre de d. De part et d'autre de d les arcs de cercle se recoupe en F et en G. Je trace la droite passant par G et F, je l'appelle d'. des droites d et d' se coupent en B. Je choisi un point C sur d, puis un point A sur d'. Je relie ABC.

Ce scénario décrit très précisément une construction dans G1, par les actions physiques à effectuer, mais pas dans G2, les objets géométriques construits n'étant pas clairement définis. Il met également en évidence un manque d'aisance avec une partie du langage géométrique lié au cercle : « centre » et « rayon » des arcs de cercles tracés ne sont pas utilisés, mais remplacés par un geste à effectuer (pointer le compas, prendre un écartement). Un tel type de scénario proposé à des élèves à l'école permet certes de développer la compétence « exécuter une consigne complexe », mais certainement pas celle « d'utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : cercle, … centre, rayon… » ([Appl. Maths C3, page 33]), alors que c'est en partie

une des fonctions de ce type d'activité. Il est donc important que les PE1 fassent évoluer leur propre langage pour obtenir un scénario utilisant correctement le langage géométrique.
D'autres obtiennent des textes partiellement inintelligibles, notamment si l'on n'a pas le dessin sous les yeux :

Tracer tout d'abord une droite (1 et 2)
A l'extrémité gauche de celle-ci, piquer la pointe
du compas et choisir une ouverture quelconque puis
tracer l'arc de cercle correspondant 3 répéter la
manipulation en piquant la pointe du compas à l'extrémité
droite de la droite (vers le haut) 4
Garder la même ouverture et le même point (extrémi-
té droite) puis tracer un point dans le prolonge-
ment droit du premier segment 5
Tracer une droite à partir du 1er point obtenu jusqu'au
1er segment tracé. 6 7 Puis jusqu'au 2ème point obtenu 8
Relier le tout.

Par ailleurs, souvent, seuls des arcs de cercle sont tracés, et non des cercles entiers. Cela est certes plus lisible sur le dessin, et les arcs de cercle suffisent effectivement, à condition qu'ils soient positionnés de sorte que les intersections existent. La difficulté de les décrire précisément laisse ainsi toujours une grande part d'implicite dans le scénario.

Du point de vue des paradigmes géométriques, seul le vocabulaire « cercle, centre, rayon, intersection », permet éventuellement de se situer dans G2 : il décrit les objets géométriques, et ceux-ci peuvent être considérés, au choix – explicite ou implicite - de l'utilisateur, dans G1 ou dans G2. Mais le reste du vocabulaire peut difficilement permettre de se situer dans G2 : il décrit les actions physiques qui sont effectuées, les instruments physiques qui sont utilisés. Il enferme ainsi l'utilisateur dans le paradigme G1.
Ainsi, par rapport à la description des constructions de G1 et de G2 qui a été faite au chapitre 2 (§ 1.6, pages 81 et suivantes), on peut ici conclure que les constructions proposées par les étudiants sont souvent des constructions de G1.

Le langage utilisé dans la rédaction des scénarios de construction met par ailleurs souvent en évidence des conceptions erronées de certains objets géométriques. Par exemple, quelques confusions ont été rencontrées plusieurs fois :

- confusion entre le segment et sa longueur : « reporter avec le compas le segment [AB] en C ». Cette confusion se rencontre notamment au sujet du rayon ou du diamètre du cercle, mais il faut bien dire que dans ces derniers cas, le vocabulaire géométrique n'aide pas à la différentiation de l'objet et de la mesure de sa longueur puisque le même mot les désigne.
- confusion entre segment et droite : « Tracer une droite d'une longueur quelconque. Placer la pointe du compas sur les extrémités de la droite et tracer une médiatrice de cette droite avec le compas ». Cette confusion est liée à la représentation qui est faite des deux objets : la trace sur le papier, le dessin représentant chacun de ces deux objets, est identique. Ainsi, dans G1, il n'y a pas de différence entre les deux objets. On peut donc considérer que les étudiants effectuant ce type de confusion se situent dans G1.

Ces confusions mettent en évidence des étudiants qui ne se situent pas dans G2, mais dans G1 : le dessin est manifestement pour eux l'objet de travail.

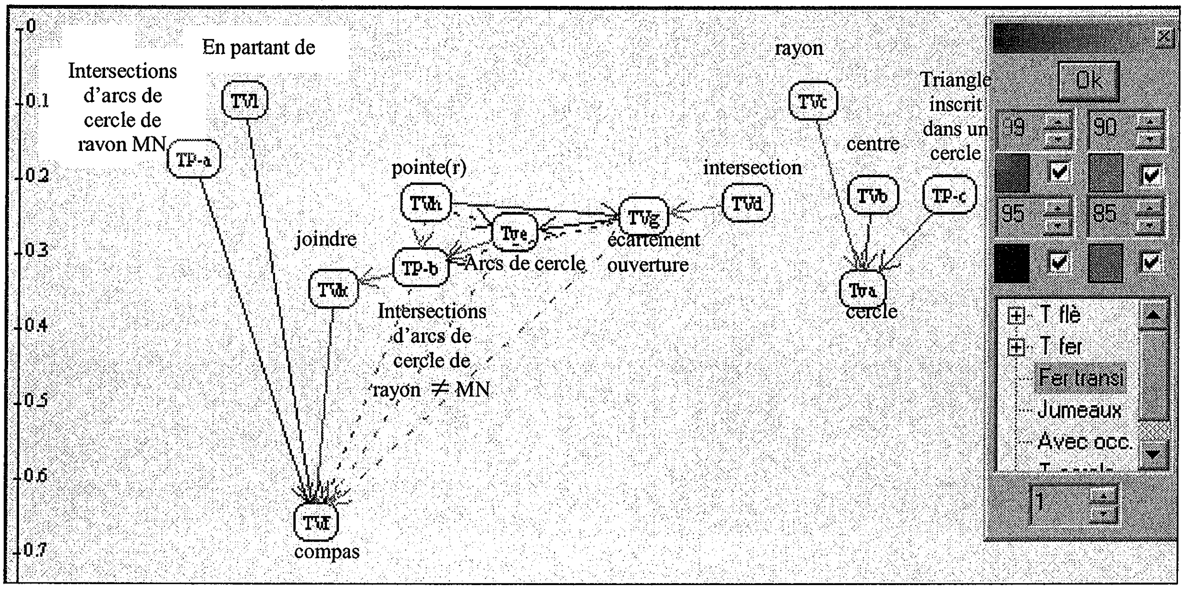
Enfin, certains étudiants font référence à la position du dessin dans la feuille (10 étudiants sur 103 pour le triangle rectangle, 3 pour 103 pour les droites parallèles). Or la position du dessin dans la feuille n'est pas une caractéristique de l'objet géométrique : on ne se situe pas ici dans G2, tout juste dans G1 !

2.4.2. Analyse du langage utilisé en fonction des procédures

Du point de vue du langage utilisé pour le scénario de construction du triangle rectangle, une procédure fait apparaître un comportement particulier, il s'agit du tracé d'un triangle rectangle inscrit dans un cercle. Ce résultat n'est pas étonnant : dans cette procédure, il faut tracer un cercle (et ici un arc de cercle ne suffit pas), un diamètre et un point sur le cercle. La procédure nécessite donc un vocabulaire spécifique et quasiment incontournable (tous utilisent le mot « cercle », seuls 3 étudiants sur les 23 qui utilisent cette procédure n'utilisent pas le mot « diamètre » par exemple[169], le remplaçant pour deux d'entre eux par un segment passant par

[169] cette information, qui n'apparaît pas dans le tableau, a été recherchée après le codage des productions pour affiner l'analyse. Ce mot « diamètre » n'apparaît pas dans les autres procédures.

le centre du cercle et pour le troisième par le tracé du segment [AB] en premier, puis de la médiatrice de [AB], puis du milieu I de [AB], puis du cercle de centre I passant par A ou B). Ces interprétations sont confirmées par l'analyse implicative, effectuée sur les procédures et le langage utilisés pour le tracé de triangle, comme le montre le graphe suivant :



La version de CHIC employée ici[170] est la dernière version dont je dispose qui permettait d'effectuer des graphes en respectant les occurrences du graphe, ce qui permet de visualiser en permanence les fréquences de chaque modalité, afin notamment d'éviter de trop s'intéresser aux modalités de trop faible effectif. L'effectif total de 103 étudiants justifie d'utiliser ici l'analyse classique et la loi binomiale. Les variables « baccalauréat », « licence » et « durée des suppléances » sont introduites en variables supplémentaires et permettent d'affiner l'interprétation.

Ce graphe confirme que lorsque l'on utilise la procédure « triangle inscrit dans un cercle », on utilise le mot « cercle », avec une implication[171] forte. La variable la plus typique, et qui contribue le plus à ce chemin est « Baccalauréat scientifique » avec un risque de : 0,02. Autrement dit, ce lien est fortement créé et représentatif des étudiants « scientifiques » : il faut en effet un bon niveau de connaissances géométriques pour que le théorème correspondant soit disponible.

Naturellement, les expressions « centre » et « rayon » sont liées au mot « cercle ». On peut cependant s'interroger sur la variable la plus typique et qui contribue le plus à l'implication « rayon $\Rightarrow$ cercle ». Il s'agit en effet de l'absence de suppléances, avec un risque de 0,05. On

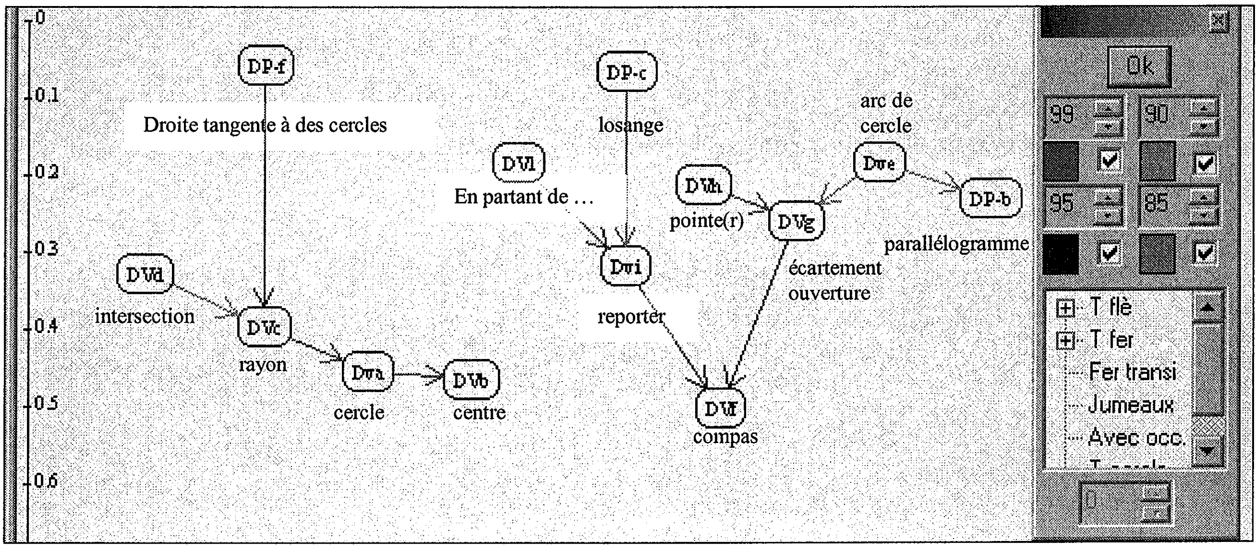
[170] Une version récente de CHIC (5.3) est employée pour repérer les niveaux d'implication et les liens intéressants, ainsi que la forme du graphe. CHIC 1.4 est ensuite utilisé pour réaliser le graphe final.
[171] Rappelons encore qu'il s'agit en fait de « quasi-implication statistique » et que le terme « implication » est utilisé à la place pour simplifier le discours.

peut donc se demander si les suppléances en classe n'ont pas pour effet de faire s'estomper chez les étudiants une partie de leurs connaissances ...
D'autres expressions sont liées. On a par exemple le chemin : « pointe(r) $\Rightarrow$ écartement/ouverture $\Rightarrow$ arc de cercle ». La variable « licence littéraire » est typique à ce chemin avec un risque de : 0,132 et est celle qui contribue le plus à ce chemin avec un risque de : 0,118. Ces résultats montrent les difficultés des étudiants littéraires face au langage géométrique.

Dans une moindre mesure, dans la situation des droites parallèles, trois procédures ont un comportement un peu différent des autres du point de vue du langage utilisé pour la description du scénario de construction :

- Ceux qui utilisent la procédure « losange » utilisent peu les expressions « Cercle », « Centre », « Rayon », « Intersection », « Arc de cercle », mais beaucoup les expressions « Compas », « Ecartement – Ecart – Ouverture », « Pointe du compas – Pointer », « Reporter ». Typiquement, il s'agit de décrire la manipulation de l'instrument pour effectuer le tracé, pas du tout les objets géométriques intermédiaires construits.
- Au contraire, ceux qui utilisent la procédure « droite tangente à des cercles », utilisent beaucoup les expressions « Cercle », « Centre », « Rayon » et beaucoup moins, voire pas du tout, les expressions : « Pointe du compas – Pointer », « Reporter ». Ceci ici lié à la procédure elle-même et, comme pour la procédure « triangle inscrit dans un cercle » précédemment, même si ici les arcs de cercles peuvent suffire, les étudiants qui utilisent cette procédure tracent en général des cercles complets et donc utilisent le langage correspondant.
- Ceux qui utilisent la procédure « rectangle » utilisent beaucoup les expressions « Pointe du compas – Pointer », « Croisement – Rencontre – Se rejoindre », « Joindre – Rejoindre – Relier – Prolonger », « A partir de ... – En partant de ... ». Il s'agit à nouveau de décrire les actions à exécuter pour effectuer le tracé, pas du tout les objets géométriques intermédiaires construits.

On retrouve une partie de ces informations sur le graphe implicatif suivant :



Mais l'effectif de chacune de ces procédures est relativement faible et globalement, le langage utilisé est peu dépendant de la procédure utilisée dans le tracé de la parallèle.

2.4.3. Analyse de l'évolution du langage utilisé

Après une seule séance, le vocabulaire a significativement évolué, avec une augmentation sensible des expressions « Cercle », « Centre », « Rayon », « Intersection », et une légère diminution des expressions « Arc de cercle » et « Compas ». Mais les expressions « Reporter » et « A partir de … » ont également augmenté, ce qui relativise immédiatement l'amélioration. Il est bien clair qu'une séance d'une heure trente ne saurait suffire à transformer le langage des étudiants, mais l'évolution est néanmoins « en marche », même si ce n'est probablement pas encore pour la majorité des étudiants.

Cette évolution est confirmée par l'étude directe de l'amélioration de la formulation du scénario, en comparant directement les deux scénarios successivement écrits par l'étudiant. On obtient les résultats suivants :

Modalité	Effectif	%
a : pas d'amélioration du scénario	62	60
b + c + d : amélioration du scénario[172]	41	40
Total	103	100

Les qualificatifs « un peu », « beaucoup » et « totale » restant très subjectifs, il est préférable de regrouper ces trois modalités. On obtient ainsi 40 % des étudiants pour qui il y a une

[172] Les qualificatifs « un peu », « beaucoup » ou « totale » prévus initialement pour préciser l'amélioration ont été regroupés, faute de pouvoir lever la forte subjectivité les concernant.

amélioration de la formulation du scénario. Il faut en outre tenir compte du fait que dans certains cas, le premier scénario était correct et, même si le second l'est également, il n'y a pas eu pour autant d'amélioration (il est toujours possible, mais souvent difficile, d'améliorer quelque chose qui est déjà satisfaisant !). On peut ainsi conclure finalement à une réelle amélioration de la formulation du scénario à court terme, malgré seulement une heure trente de travail en classe sur ce sujet. On peut ainsi penser qu'à la suite de la seconde séance, les résultats seront encore meilleurs. C'est nécessaire, car même s'il y a eu une amélioration, les scénarios restent pour beaucoup « corrects mais maladroits ». Au-delà des mots effectivement utilisés, la formulation a directement été codée avec les modalités : très bien, correcte, correcte mais maladroite, incorrecte, très incorrecte, absente. Les deux premières modalités d'une part, de même que les deux avant-dernières d'autre part, sont très subjectives et il est donc prudent de les grouper. On obtient alors le tableau suivant :

Modalité	scénario du triangle rectangle		scénario de la droite parallèle	
	effectif	%	effectif	%
a ou b : formulation correcte	26	25	28	27
c : formulation correcte mais maladroite	56	54	55	53
d ou e : formulation incorrecte	17	17	16	16
f : pas de scénario	4	4	4	4
Total	103	100	103	100

Les résultats sont identiques : même s'il y a eu amélioration, les scénarios ne sont pas encore ceux attendus !

2.5. Le langage utilisé dans la rédaction des justifications

De la même manière que la formulation des scénarios a été analysée, la rédaction des justifications a également fait l'objet d'un codage. En regroupant les modalités de très faible effectif, ou subjectivement très proches, on obtient les résultats suivants :

Modalité	justification de la construction du triangle rectangle		justification de la construction de la droite parallèle	
	effectif	%	effectif	%
a ou b : formulation correcte de la justification	48	46	62	60
c : formulation correcte de la justification mais maladroite	17	17	17	17
d ou e : formulation incorrecte de la justification	6	6	5	5
f : pas de justification	32	31	19	18
Total	103	100	103	100

Plusieurs constatations peuvent être effectuées :

- Le taux d'absence de justification diminue très nettement entre les deux exercices. Deux éléments au moins permettent de justifier cette amélioration. D'une part, le premier exercice consiste pour beaucoup à tracer une médiatrice. Or, ce problème a déjà été étudié et nous avons constaté que beaucoup d'étudiants, s'ils savent construire une médiatrice, ne savent pas en justifier la construction car ils ne savent pas expliciter les propriétés effectivement utilisées. D'autre part, l'étape 4 a permis aux étudiants de s'approprier la règle du jeu : pendant une partie de la séance précédente, on a effectué ensemble des justifications sur les constructions proposées par les étudiants pour la construction d'un triangle rectangle. Ils savent donc maintenant ce que l'on attend d'eux dans cette question.
- La justification est souvent correcte, et beaucoup plus rarement maladroite que dans la rédaction du scénario de construction. En effet, la justification se limite souvent à citer un théorème appris par cœur, récité comme une comptine. Par exemple, on peut lire, comme justification de la procédure pour tracer une droite parallèle : « deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles » (pour la procédure traçant successivement deux médiatrices), ou encore « on a tracé un parallélogramme : ses côtés sont donc parallèles » (pour la procédure consistant à tracer un parallélogramme). Ces précisions ne justifient pas toute la construction, mais elles sont parfaitement correctes du point de vue du langage utilisé.

Les justifications ont été travaillées au collège, dans le cadre de l'apprentissage de la démonstration. Le langage correspondant a été mis en place. Il ne constitue donc pas un handicap pour se situer dans G2. Par contre, le travail de rédaction d'un scénario de construction dans G2 n'a que rarement été abordé : le langage n'est pas en place et ne permet pas de se situer dans G2. Ainsi, les mots utilisés sont ceux de l'action physique, de l'instrument manipulé, le langage est entièrement dans G1. De ce fait, les deux types de tâches se situent pour les étudiants dans deux paradigmes différents :

- Construction dans G1
- Démonstration dans G2

La justification, de l'ordre de la démonstration, dans G2, d'une construction relevant pour eux de G1 devient impossible pour bon nombre d'étudiants. Le travail spécifique proposé ici permet néanmoins d'atténuer cette difficulté.

3. Les résultats des étudiants à l'étape 8

3.1. Nombre et nature des moyens proposés

L'étape 8 du dispositif consistait, rappelons-le, à résoudre « la situation médiatrice » (cf. annexe 33 et § 1.9 de ce chapitre, pages 401 et suivantes). La formulation de la question :

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ? Conclure.

devait permettre aux étudiants de proposer plusieurs moyens pour savoir si la droite (CD) est ou non la médiatrice du segment [AB]. De ce point de vue, les résultats sont les suivants :

Modalité	effectif	%
a : aucun moyen proposé	3	3
b : un seul moyen proposé	68	66
c : plusieurs moyens proposés	32	31
Total	103	100

On constate que les deux tiers des étudiants proposent un seul moyen. Plusieurs hypothèses peuvent permettre d'interpréter ce résultat :

- Les deux tiers des étudiants en question ont effectué une démonstration, ou du moins ont donné une preuve[173], ils sont ainsi sûrs de leur résultat et ils ne voient pas la nécessité d'en donner deux

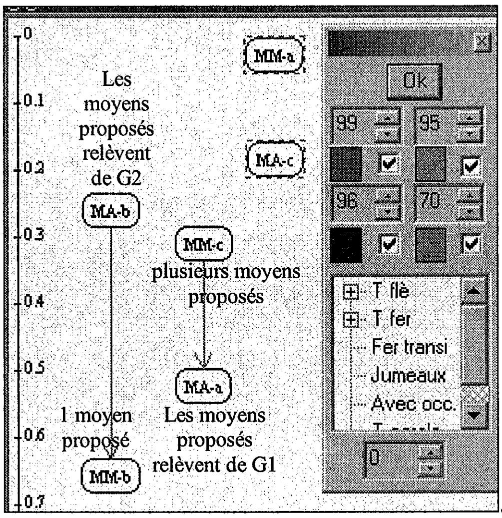
[173] Nous reviendrons ultérieurement sur la distinction preuve – démonstration.

- La forme de la question est inhabituelle et le contrat didactique habituel de la classe de mathématiques demande **une** réponse à une question, rarement plusieurs
- Les étudiants ont presque tous **une** idée de réponse, mais pas plusieurs
- La consigne « conclure » invite finalement à répondre à la question « la droite (CD) est-elle ou non la médiatrice du segment [AB] ? » et donc à mettre en œuvre ces moyens plutôt qu'à chercher toute une liste de moyens possibles

Une autre caractéristique sur les moyens proposés est intéressante : s'agit-t-il de moyens relevant de G1 ou de G2 ? Cet aspect est pris en compte et donc codé. On obtient le tableau suivant :

Les arguments ou les moyens proposés sont dans ...	effectif	%
a : G1 seulement	54	52
b : G2 seulement	27	26
c : G1 et G2	19	18
d : rien n'est proposé	3	3
Total	103	100

Seul un quart des étudiants ne proposent que des moyens dans G2. Il est intéressant de croiser les deux variables précédentes. L'analyse implicative donne le graphe suivant :



Ce graphe permet de conclure que ceux qui se situent dans G2 (MA-b) ne proposent qu'un moyen (MM-b), tandis que ceux qui en proposent plusieurs (MM-c) se situent dans G1 (MA-a).

Un tableau de tri croisé sur ces deux variables permet d'affiner le résultat. Ainsi, le tableau suivant présente simultanément les effectifs croisés ainsi que des pourcentages en ligne et en colonne. Les trois étudiants qui n'ont rien proposé n'ont pas été pris en compte. Ce tri croisé est effectué sur 100 étudiants, ce qui explique que des pourcentages sont identiques aux effectifs. On obtient ainsi :

		Les moyens proposés relèvent de …			Total
		… G1	… G2	…G1 et G2	
		MA - a	MA - b	MA - c	
		effectif %	effectif %	effectif %	effectif %
MM – b : 1 moyen proposé	effectif	31	26	11	68
	%	46	38	16	100
		57	96	58	68
MM – c : plusieurs moyens proposés	effectif	23	1	8	32
	%	72	3	25	100
		43	4	42	32
Total	effectif	54	27	19	100
	%	54	27	19	100
		100	100	100	100

La quasi-totalité (96 %) de ceux qui ne proposent que des moyens dans G2 n'en proposent qu'un, tandis que parmi ceux qui en proposent plusieurs, les trois quarts les proposent tous dans G1 et un quart en proposent simultanément dans G1 et dans G2. Il est bien entendu plus facile de proposer plusieurs moyens dans G1 que dans G2. Dans G1, les étudiants proposent par exemple :

- de tracer la médiatrice à la règle et au compas et de voir si elle se superpose à (CD)
- de tracer la médiatrice à la règle et à l'équerre et de voir si elle se superpose à (CD)
- de vérifier à l'équerre que (CD) est perpendiculaire à (AB) et perceptivement qu'elle passe par O
- de prendre deux points sur (CD) et de vérifier à la règle graduée ou au compas qu'ils sont à égale distance de A et de B
- …

tandis que dans G2, il faut effectuer une démonstration et nous allons voir que c'est difficile.

3.2. Entre preuve et démonstration

La plupart des étudiants n'ont pas seulement proposé des moyens à mettre en œuvre, mais en ont effectivement mis au moins un en œuvre. Etudions alors plus précisément chaque production d'étudiant afin de préciser sa nature. Il s'agit de repérer si l'étudiant propose une démonstration dans G2 ou bien une preuve dans G1. Précisons le vocabulaire ici employé. A la suite de [Balacheff. 1982, page 263] :

> « *Nous appellerons explication un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis pour le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat.*
>
> *Les raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées. Ainsi, certaines explications sont reçues pour preuve c'est-à-dire acceptées, d'autres ne le sont pas. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.*
>
> *Parmi les preuves, certaines ont une forme particulière, elles sont une suite d'énoncés suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est obtenu à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appellerons démonstrations ces preuves.* »

Complétons ces définitions par un extrait de [Arsac. 1992, page 6] :

> « *Les preuves sont des explications acceptées par d'autres, à un moment donné. Ainsi une explication peut avoir le statut de preuve pour un groupe social donné, mais pas pour un autre.*
>
> *Les démonstrations sont des preuves particulières qui possèdent les caractéristiques suivantes :*
>
> - *Une caractéristique sociale : ce sont les seules preuves acceptées par la communauté des mathématiciens !*
> - *Une caractéristique sur la forme : elles respectent certaines règles : un certain nombre d'énoncés sont considérés comme vrais (axiomes), les autres sont déduits de ceux-ci ou d'énoncés précédemment démontrés à partir de règles de déductions prises dans un ensemble de règles logiques.*

- *Les objets mathématiques sur lesquels ces preuves opèrent ont un statut théorique, ils n'appartiennent pas au monde sensible, bien qu'ils y fassent évidemment référence ».*

Partant de ces définitions, une explication dans G1, c'est-à-dire basée sur la perception, ne peut être considérée comme une démonstration puisque les objets mathématiques sur lesquels cette explication opère appartiennent au monde physique : il ne peut s'agir que d'une preuve. Mais pour parler de preuve au sens strict défini ci-dessus, il faudrait encore s'assurer que l'explication a été acceptée par un groupe, qu'il faudrait préciser, de même que pour parler de démonstration, il faudrait que toutes les caractéristiques ci-dessus citées soient effectivement respectées, en particulier le strict respect des règles logiques ou la nature des objets sur lesquels les règles opèrent. Or, la particularité des explications fournies par les étudiants est que bien souvent, elles ne respectent qu'une partie de ces caractéristiques ! Pour simplifier le discours, j'utiliserai le mot « preuve » pour désigner toute explication relevant de G1, c'est-à-dire basée essentiellement sur la perception. Celle-ci peut alors être

- correcte, c'est-à-dire qu'elle serait une démonstration si aucune hypothèse n'était lue sur le dessin. En particulier, il n'y a pas d'erreur de logique, et les éventuels théorèmes utilisés sont vrais. La plupart des explications concluant que (CD) est la médiatrice de [AB] sont dans cette classe. La production suivante donne deux exemples de « preuve correcte dans G1» .

  Je peux essayer de tracer le cercle C_4 de centre B et de rayon 4,5 cm. Ce cercle coupe le cercle C_2 en deux points C et D.
  Ainsi, l'intersection du cercle C_3 et C_4 en deux points C et D me permet de tracer la médiatrice (CD) passant par O et perpendiculaire à [AB].

  L'information lue sur le dessin est ici que les intersections des cercles C_3 et C_4 sont les points C et D. Evidemment, si on enlève cette information, il ne reste pas grand chose de la démonstration ! Il s'agit en fait d'une procédure, souvent utilisée par les étudiants, qui consiste à tracer la médiatrice et à vérifier qu'elle se superpose avec la droite (CD) pour conclure. Une autre proposition succède immédiatement sur la même production :

> Sinon, dans le triangle ABC, tracer la hauteur passant par le point C.
> Or elle coupe [AB] en O.
> Donc si O milieu de [AB] ([OA] rayon du cercle $\mathscr{C}_1$) OA = OB = $\frac{1}{2}$ de [AB]
> Donc cela est valable pour le triangle ABD.
> Ainsi (CD) est la médiatrice du segment [AB].

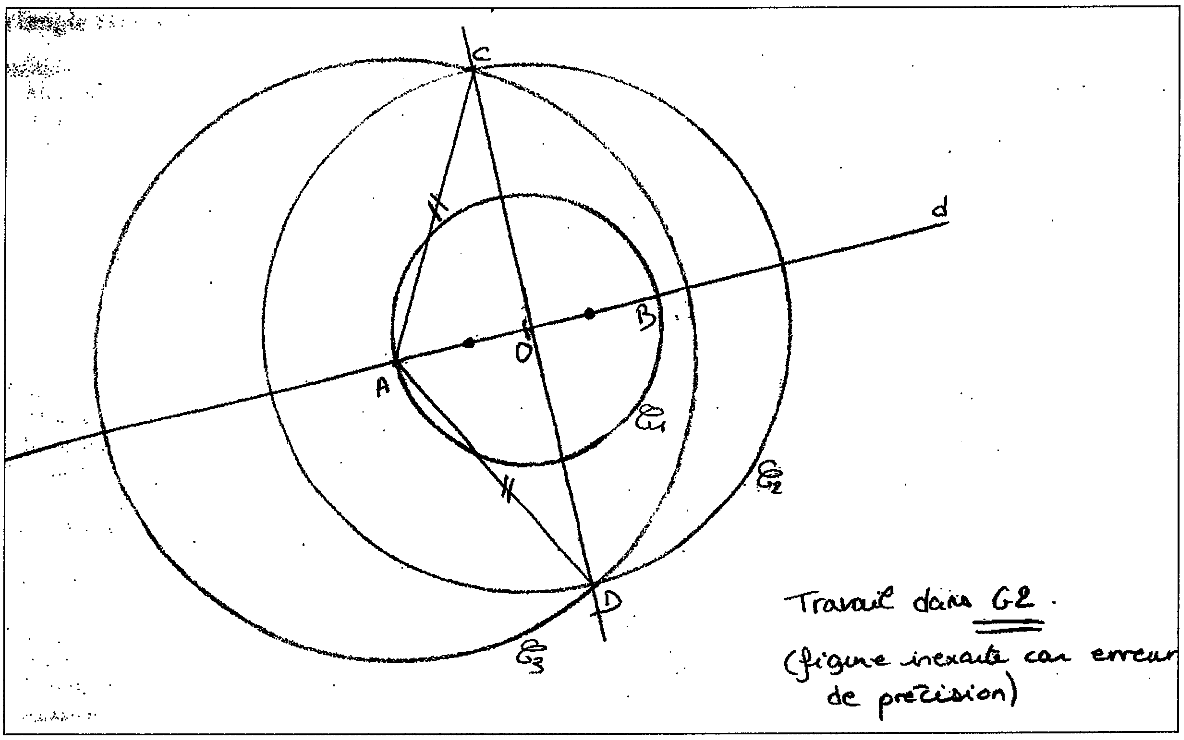
Cette fois, l'information lue sur le dessin est que le point O est sur la hauteur du triangle ABC passant par C. Le théorème non explicité mais sous-jacent est correct : si une hauteur d'un triangle passe par le milieu d'un côté, c'est aussi une médiatrice de ce côté.

Mais la preuve peut également être :

- incomplète : tout ce qui est dit est correct mais cela ne suffit à justifier la proposition
- incorrecte, en particulier à cause d'un raisonnement erroné, lié à une utilisation des règles de logique erronée ou à l'utilisation d'un théorème erroné.

Le terme de démonstration est quant à lui utilisé pour désigner une explication dans G2. Les éléments essentiels pour conclure que l'étudiant se situe dans G2 sont d'une part l'absence de recours à la perception et d'autre part la mise en œuvre d'un raisonnement hypothético-déductif. Cette démonstration peut de même être :

- correcte, c'est-à-dire respectant toutes les caractéristiques ci-dessus énoncées, extraites de [Balacheff. 1982, page 263] et [Arsac. 1992, page 6]. Il s'agit des démonstrations, basées sur la contraposée du théorème de Pythagore, qui concluent que (CD) n'est pas la médiatrice de [AB].
- incomplète
- incorrecte, notamment à cause d'une utilisation d'un théorème inexact ou d'une règle de logique erronée. La production ci-dessous de Camille donne un exemple de ce type de production :



C et D sont sur C_3 de centre A. Donc CA = AD.

C et D sont sur C_2 de centre O. Donc, <u>théoriquement</u> (CD) est un diamètre de C_2, passant par O, donc D est le symétrique de C par rapport à O.

Or O est aussi le centre de C_1 et [AB] est un diamètre de C_1. Donc O est le milieu de [AB] et B est donc le symétrique de A par rapport à O.

Dans le quadrilatère ACBD, AC = AD et O coupe (CD) et [AB] en leur milieu.

Or un quadrilatère qui a 2 côtés consécutifs égaux et des diagonales qui se coupent en leur milieu est 1 losange.

Donc AD = AC = CB = BD

Les diagonales d'1 losange sont perpendiculaires.

Donc (AB) ⊥ (CD) ⟶ (CD) est bien la médiatrice de [AB].

<u>Remarque</u> : 0,5 mm d'erreur sur chaque cercle entraîne une erreur de 1,5 mm !!

Dans cet exemple, l'implication : « C et D sont sur C_2 de centre O $\Rightarrow$ [CD] est un diamètre de C_2 » est erronée. C'est d'ailleurs étonnant de voir à quel point Camille est convaincue de cette propriété alors que son dessin montre le contraire. Elle s'applique donc à nous expliquer ensuite le manque de précision de son dessin pour justifier que son raisonnement aboutisse à une conclusion contraire à ce que montre perceptivement le dessin.

La démonstration peut également être incorrecte parce qu'elle repose sur une hypothèse inexacte, par exemple parce que relevant de G1 (en particulier lue sur le dessin). Mais dans ce dernier cas, toutes les informations ne doivent pas être lues sur le dessin (auquel cas il s'agit d'une preuve dans G1), il doit s'agir d'une information seulement, assortie d'un véritable souci de la part de l'étudiant d'utiliser des théorèmes, de mettre en œuvre un raisonnement hypothético-déductif à partir des informations données dans l'énoncé, notamment ici en traduisant l'appartenance aux cercles par des égalités de distances. Considérons par exemple la production de Virginie :

On trace C_1 qui coupe (d) en 2 pts A et B donc A et B st equidistants par rappot à O, centre du cercle O.
On trace C_2 de centre O donc tous les points qui appartiennent à C_2 sont équidistants par rappot à O.
On trace C_3 de centre A. C_3 coupe C_2 en 2 points C et D donc C et D sont équidistants par rappot à A.
On sait donc que AC = AD et comme B est à egale distante A par rappot à O et tous les points de C_2 sont à égales distance par rappot à O alors
BC = BD = AC = AD.
On obtient un losange. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et elles se coupent en leur milieu donc on peut en déduire que [CD] est perpendiculaire à [AB].
Une médiatrice est une droite perpendiculaire et qui passe par le milieu du segment et tous les points d'une médiatrice sont équidistants donc [CD] est la médiatrice de [AB].

L'égalité BC = AC est obtenue par un raisonnement erroné, et on peut penser qu'il est surtout le fruit de la perception. On a là un exemple caractéristique de « contamination du su par le perçu », comme le décrit [Parzysz. 2001.2] : « *c'est-à-dire que la démonstration inclut, de façon plus ou moins implicite, des éléments relevant de la perception* ».

On obtient les résultats suivants pour les moyens effectivement mis en œuvre :

Modalité	Effectif	%
a : démonstration correcte dans G2	7	6
b : démonstration incomplète dans G2	12	11
c : (AB) est la médiatrice de [CD]	4	4
d : démonstration incorrecte dans G2	21	19
e : preuve correcte dans G1	40	37
f : preuve incomplète dans G1	4	4
g : preuve incorrecte dans G1	4	4
h : pas de preuve ni de démonstration	16	15
Total :	108	100

40 % des propositions sont des démonstrations dans G2, 6 % seulement sont correctes

45 % des propositions sont des preuves dans G1

L'effectif total n'est pas égal à 103 parce que cinq étudiants, proposant plusieurs moyens pour répondre à la question, en mettent effectivement deux en œuvre. Quatre d'entre eux donnent une preuve correcte dans G1 et une démonstration incomplète ou erronée dans G2, le dernier donne une preuve incomplète dans G1 et une démonstration également incomplète dans G2.

Une démonstration erronée particulière est repérée : il s'agit de ceux qui démontrent en fait que (AB) est la médiatrice de [CD], ce qui est vrai, mais qui concluent que (CD) est la médiatrice de [AB]. Le raisonnement obtenu est alors par exemple le suivant :

C et D sont sur le cercle de centre A et de rayon 4,5 cm : ils sont donc équidistants de A.
C et D sont aussi sur le cercle C2 : ils sont donc équidistants de O, centre de C2
=) C et D sont équidistants de O et de A.
AB est le diamètre de C1, B est donc l'image de A par rapport à O et OB = OA (rayon de C1).
=) C et D sont équidistants de B.
2 points équidistants des extrémités d'un segment sont sur sa médiatrice, (CD) est donc la médiatrice du segment [AB].

La seconde affirmation, C et D sont équidistants de B, vraie par ailleurs, n'est pas ici correctement démontrée. Néanmoins, il est intéressant, du point de vue linguistique, d'étudier la fin de la démonstration. Il y a confusion entre « C et D sont équidistants de A, et C et D sont équidistants de B » ($CA = DA$ et $CB = DB$) et « C et D sont équidistants de A et B » qui signifie en fait « C est équidistant de A et B, et D est équidistant de A et B » ($CA = CB$ et $DA = DB$). De ce fait, l'étudiant conclut que (CD) est la médiatrice de [AB] alors qu'il aurait, si sa démonstration était par ailleurs correcte, démontré que (AB) est la médiatrice de [CD]. Le nombre d'étudiants ayant effectué une démonstration proche de celle-ci est faible (4 étudiants sur 103), mais met néanmoins en évidence la difficulté de l'utilisation de la définition de la médiatrice à partir de l'équidistance des points.

Au-delà de ces résultats portant sur des faibles effectifs, ce tableau met en évidence qu'il y a à peu près autant de propositions qui se situent dans G2 (40 %) que dans G1 (45 %), mais avec beaucoup moins de réussite : 16 % de celles qui essaient de mettre en œuvre une démonstration dans G2 sont correctes, tandis que 83 % de celles qui mettent en œuvre une preuve dans G1 le sont. Le degré de difficulté n'est évidemment pas le même : la preuve peut être effectuée par une simple application de la définition de la médiatrice par milieu et perpendiculaire, il suffit de vérifier, visuellement ou à l'aide l'équerre, que la droite (CD) est perpendiculaire à (AB) puis qu'elle passe par O, tandis que la démonstration nécessite entre autres d'utiliser la contraposée du théorème de Pythagore. Or, ici, il n'est question d'aucun triangle mais seulement de cercles, ce qui rend le théorème difficile à mobiliser. Par ailleurs, il s'agit d'utiliser la contraposée du théorème et non le théorème lui-même, ce qui est plus délicat. Les étudiants sont habitués à mobiliser le théorème pour calculer une longueur manquante dans un triangle rectangle, mais un peu moins à utiliser la contraposée, surtout pour vérifier non pas qu'un triangle n'est pas rectangle, mais que deux droites ne sont pas perpendiculaires. L'association est en effet éventuellement effectuée entre « triangle rectangle » et « théorème de Pythagore » mais pas entre « droites perpendiculaires » et « théorème de Pythagore ». Une autre difficulté vient s'ajouter aux précédentes : la définition de la médiatrice nous amène à chercher si (CD) est perpendiculaire à [AB], mais il faut en fait étudier d'abord si (OC) est perpendiculaire à (OA) !

Le nombre important d'essais de démonstrations montre que les étudiants ont bien compris la règle du jeu : il s'agit de travailler de préférence dans G2. Mais encore une fois, ce n'est pas l'envie qui manque aux étudiants pour travailler dans G2, mais les connaissances et les compétences nécessaires.

3.3. Lucidité des étudiants : appropriation des paradigmes G1-G2

La semaine précédant la séance où est proposée cette situation médiatrice, une présentation des paradigmes G1 et G2 a été rapidement faite (cf. étape 8). Il est donc intéressant d'étudier comment les étudiants se sont approprié ces paradigmes. On vient de montrer que malgré cette présentation, bon nombre de propositions relèvent de G1, notamment par manque de connaissances et de compétences dans G2. J'ai déjà développé que l'essentiel n'est pas que les étudiants se situent dans G2, mais qu'ils soient conscients de l'existence de ces paradigmes et de celui dans lequel ils se situent, à un moment donné, pour une résolution de problème donnée (cf. chapitre 2, § 3.3, pages 116 et suivantes). Pour finir, une dernière question a donc été posée oralement aux étudiants, à laquelle ils ont répondu par écrit sur leur feuille : « est-ce que vous pensez vous être situé dans G1, ou dans G2 ? ». Les résultats du tri à plat sur cette variable sont les suivants :

L'étudiant pense se situer dans ...	Effectif	%
a : G1 seulement	32	31
b : G2 seulement	55	53
c : G1 et G2	13	13
e : ne l'indique pas	3	3
Total	103	100

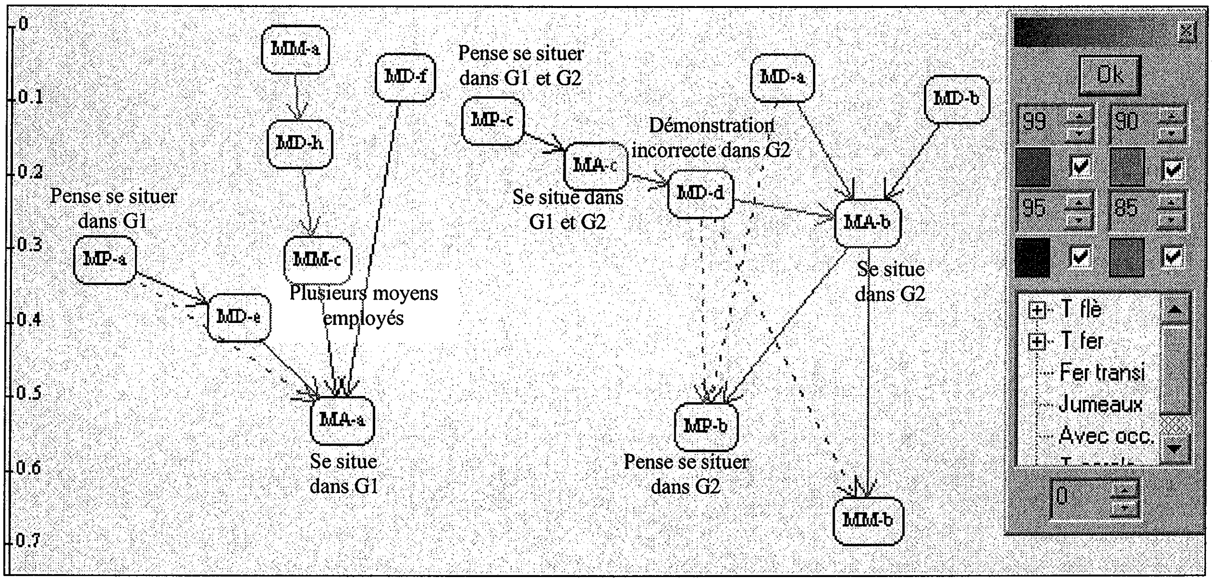
Ce tableau a surtout un intérêt quand il est croisé avec la nature des moyens proposés. Pour le simplifier, j'ai supprimé de l'étude statistique les étudiants qui n'indiquent pas ce qu'ils pensent et ceux qui n'ont pas proposé de moyens. On obtient alors :

		L'étudiant pense se situer dans …						Total	
		… G1		… G2		…G1 et G2			
Les moyens proposés se situent effectivement dans :		MP - a		MP - b		MP - c			
		effectif	%	effectif	%	effectif	%	effectif	%
MA – a : G1	effectif	**28**		**20**		**3**		51	
	%	55		**39**		6		100	
			90		38		23		53
MA – b : G2	effectif	1		25		1		27	
	%	4		93		4		100	
			3		47		8		28
MA – c : G1 et G2	effectif	2		8		9		19	
	%	11		42		47		100	
			6		15		69		20
Total	effectif	31		53		13		97	
	%	32		55		13		100	
			100		100		100		100

Ce tableau met en évidence la lucidité de certains étudiants. Ceux qui pensent se situer dans G1 ont en général raison (à 90 %), tandis que ceux qui se sont situés dans G2 en sont en général conscients (à 93 %). De même, ceux qui pensent se situer dans G1 et G2 se situent effectivement dans G1 et G2. Par contre, 38 % de ceux qui sont persuadés de se situer dans G2 se situent en fait dans G1 : ils ont bien pris en compte le contrat, mais leurs connaissances et compétences ne leur permettent pas de rester dans G2. Ils passent dans G1, mais ne s'en rendent pas compte !

3.4. Analyse de la situation médiatrice avec l'analyse implicative

Cette lucidité se retrouve immédiatement avec un graphe implicatif. Il est ici effectué aux seuils de 0.99, 0.95, 0.90 et 0.85, avec l'analyse classique et la loi binomiale parce que l'effectif total de la population étudiée n'est que de 103 étudiants. On obtient le graphe suivant :



Ce graphe, du point de vue de la lucidité des étudiants, met en évidence les liens suivants :

- $MP-a \rightarrow MA-a$: quand l'étudiant pense se situer dans G1, c'est le cas[174]
- $MP-c \rightarrow MA-c$: quand l'étudiant pense se situer dans G1 et dans G2, c'est également le cas
- $MA-b \rightarrow MP-b$: quand l'étudiant se situe dans G2, il le sait

Il met également en évidence d'autres liens qui correspondent à ce qui a été repéré à partir des tris croisés. :

- $MM-c \rightarrow MA-a$: lorsque plusieurs moyens sont proposés, ce sont des moyens dans G1
- $MA-c \rightarrow MD-d$: lorsque les arguments relèvent de G1 et de G2, il y a présence d'une démonstration incorrecte dans G2
- $MA-b \rightarrow MM-b$: lorsque les arguments relèvent de G2, il n'y en a qu'un

A cette étape du travail avec les étudiants, il apparaît que les connaissances et compétences des étudiants en géométrie plane dans G2 ont un peu évolué, mais qu'elles restent encore insuffisantes.

Du point de vue G1-G2, une certaine lucidité commence à se mettre en place, mais de manière encore fragile.

[174] Il faudrait à nouveau dire « c'est en général le cas », dans la mesure où il s'agit bien sûr de quasi-implication statistique et non d'implication formelle. J'évite néanmoins d'ajouter « en général » partout pour alléger le discours, d'autant plus qu'ici, bon nombre d'implications ont des indices relativement élevés.

4. Synthèse

Ce travail a permis de mettre en évidence le fait que l'automatisation de procédures de construction (par exemple dans le tracé de médiatrices à la règle et au compas) a tendance à enfermer les étudiants dans G1 : les étudiants ne peuvent justifier ces procédures, tandis qu'ils le peuvent plus facilement sur des procédures moins automatisées. Le travail de justification systématique des scénarios de construction permet en partie de « désautomatiser » ces procédures pour mettre en place une attitude réflexive sur ces constructions. Cela n'assure pas pour autant une évolution de G1 à G2, l'attitude réflexive pouvant également se mettre en place dans G1. On peut cependant penser que c'est une première étape indispensable vers G2.

Les constructions sont pour une grande partie des étudiants des tâches de construction, dans G1, qu'il est difficile de faire évoluer vers G2 ; il semble donc essentiel de veiller à deux éléments afin de ne pas enfermer les élèves dans G1 :

- Mettre en place une formulation qui ne soit pas trop liée au geste ni à l'instrument utilisé mais qui mette en évidence les éléments géométriques qui apparaissent dans la construction (cercles, segments, longueurs égales, etc.) (même si le lien entre le passage à G2 et la nature de la formulation n'a pas vraiment été démontré)
- Ne pas automatiser ces procédures de construction afin d'entretenir une attitude réflexive sur ces constructions. On pourra en particulier inciter les élèves à anticiper la construction en formulant la propriété utilisée avant d'effectuer la construction.

Par ailleurs, l'évolution simultanée

- o de la rédaction des scénarios de construction
- o des justifications des constructions
- o de la rédaction de ces justifications

laisse penser que s'amorce une évolution de G1 vers G2. Il y a là des activités qui peuvent servir de point d'ancrage pour la formation des PE1, afin d'améliorer simultanément leurs compétences et connaissances en géométrie plane et leur rapport aux objets géométriques.

Conclusion

Conclusion

J'ai posé au début de ce travail deux hypothèses de recherche (cf. chapitre 2, § 3.2) sur lesquelles il est temps maintenant de revenir. La première était :

> **HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : Objets de la géométrie (G1) ou Représentants d'un OGT (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.**

J'ai maintes fois montré des exemples où les étudiants se situent simultanément dans G1 et dans G2 pour répondre à une question, résoudre un problème : l'item « Carré et Thalès » du test ou l'activité « médiatrice » par exemple sont des situations qui ont été riches en productions de ce type. L'activité « ABCD est-il un carré », dans l'ingénierie du chapitre 7 (cf. § 1.4.2 : Le débat, pages 376 et suivantes) a montré que les étudiants sont capables seuls de mettre en évidence les différences de statut des validations effectuées : perceptives ou hypothético-déductives. Mais le statut des objets géométriques sur lesquels portent les validations est beaucoup plus difficile à repérer : les étudiants n'ont effectivement pas conscience de travailler sur des objets de nature différente : physique quand ils mettent en œuvre des validations perceptives, théoriques lorsqu'ils appliquent des validations de type hypothético-déductives. Difficile à repérer pour l'étudiant, qui n'a pas conscience de l'existence d'une différence : les objets ont le même nom, la même image, les mêmes propriétés, ou presque. C'est d'ailleurs ce presque, lorsque la situation est justement contradictoire entre les deux paradigmes, qui est un point d'appui pour que les étudiants commencent à se poser des questions. Difficile à repérer également pour le formateur : « comment suis-je sûre de la manière dont l'étudiant considère l'objet ? ». Ce point a dès le départ fait l'objet de toute mon attention (cf. chapitre 2, § 1.4 : Décider entre G1 et G2, pages 73 et suivantes) mais malgré cela, les hésitations sont restées nombreuses. J'ai néanmoins à la fois mis en place une ingénierie qui permet à l'étudiant d'évoluer dans cette prise de conscience, et expérimenté des tests qui permettent au formateur de repérer en partie ce statut de l'objet géométrique sur lequel l'étudiant travaille.

Si l'on analyse très localement une production d'étudiant, en détaillant chacune des étapes élémentaires de son travail, on peut considérer qu'à tel moment, il se situe dans G1, à tel autre dans G2. Mais si l'on veut considérer globalement cette production, on est obligé de faire intervenir le concept de pseudo-paradigme. J'ai en effet montré que, « spontanément », les étudiants pouvaient aussi bien se situer dans G1 que dans G2, que dans des pseudo-paradigmes locaux et personnels : locaux parce qu'ils dépendent de chaque situation, un étudiant changeant d'une situation à l'autre, personnels parce qu'ils dépendent de chaque étudiant, deux étudiants face à une même situation ne se situant pas dans le même pseudo-paradigme. La version la plus standard de ces pseudo-paradigmes dans une tâche de reconnaissance de figure plane consiste à effectuer des mesures sur le dessin (G1) puis à appliquer des validations de G2. Une variante consiste à effectuer une construction, à la règle et au compas par exemple, pour mettre en évidence une propriété de manière perceptive (G1) et conclure en appliquant un théorème de G2. Dans tous les cas, il semble que les étudiants cherchent à répondre au problème posé en se situant dans G2, mais font intervenir des éléments de G1 à un moment ou à un autre pour de multiples raisons :

- Effet de contrat didactique : il faut produire une réponse
- Effet de la règle d'exhaustivité : il faut dire le maximum de ce que l'on sait de l'objet
- Connaissance non mobilisable, ou non disponible : on ne connaît pas le théorème, où on n'y pense pas
- Manque de situations de référence : on ne sait pas prendre les indices qui permettent de rendre disponible des connaissances par ailleurs mobilisables
- Compétence non maîtrisée : on ne sait pas comment appliquer le théorème
- Contamination du « su » par le « perçu » : une propriété est tellement visible qu'on en est convaincu et qu'on croit qu'elle fait partie des hypothèses
- ...

Le manque de situations de référence est un problème crucial, et qu'il est difficile de résoudre en formation de PE1 : il nécessite de rencontrer des situations variées, et demande donc du temps, temps dont on ne dispose pas assez pour mener à bien la tâche pour tous les étudiants.
J'ai ainsi répondu au moins en partie à la première question qui faisait écho à HR1 :

> **P1.1 : Les PE1 en début de formation travaillent-ils « spontanément » dans le cadre de la géométrie spatio-graphique (G1), ou dans celui de la géométrie proto-axiomatique (G2) ? En particulier dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, dans quel paradigme ou pseudo-paradigme les PE1 se situent-ils ? De manière**

générale, peut-on expliciter le paradigme ou pseudo-paradigme dans lequel se situent les PE1 ?

La seconde question était :

P1.2 : Lorsqu'on propose plusieurs tâches de géométrie plane dans le micro-espace aux PE1 en début de formation, est-il possible de faire émerger des profils d'étudiants « tout G1 » ou « tout G2 » ou d'autres profils ? De manière plus large, y a-t-il un lien entre leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une situation donnée et leur positionnement par rapport à G1 et G2 dans une autre situation ?

La particularité des pseudo-paradigmes est qu'ils sont locaux : les étudiants se situent dans un de ces pseudo-paradigmes, ou dans G1, ou dans G2, de manière très contextualisée, dans telle situation et pas dans telle autre, mais le changement de paradigme, ou de pseudo-paradigme, est presque aléatoire, compte tenu du grand nombre de raisons, dont la liste présentée ci-dessus n'est certainement pas exhaustive, qui peuvent le provoquer. De ce fait, il a été quasiment impossible de faire émerger des profils d'étudiants qui répondent toujours de la même manière dès que les questions sont très différentes. Tout au plus obtient-on des profils d'étudiants qui utilisent les mêmes procédures de construction, par exemple pour le tracé de médiatrice, voire qui effectuent le même type de commentaires, mais cela n'assure pas pour autant qu'ils se situent dans le même paradigme ou pseudo-paradigme.

La troisième question était :

P1.3 : Dans une tâche de construction de G1, les PE1 sont-ils capables de faire le lien entre la technique de G1 qu'ils ont utilisée et la technologie de G2 qui justifie cette technique ? Autrement dit, y a-t-il cohérence entre leurs déclarations (dans G2) et leurs procédures (dans G1) ?

Si dans la situation de la médiatrice avec les deux triangles isocèles, près de la moitié des étudiants explicite correctement la propriété utilisée, moins de 20 % des étudiants justifient correctement leur construction d'un triangle rectangle ! Autrement dit, cette cohérence entre déclarations et procédures est loin d'être acquise pour tous les PE1. Un travail explicite de prise de conscience des paradigmes géométriques G1 et G2 d'une part, sur le langage utilisé pour décrire la technique utilisée d'autre part, semble néanmoins prometteur pour faire évoluer cette cohérence.

La quatrième question était :

P1.4 : Existe-t-il des situations qui favorisent plutôt un traitement dans G1, ou dans G2 ? Et si oui, lesquelles ?

Une situation au moins est apparue comme semblant favoriser un traitement dans G2, il s'agit des dessins à main levée. Le code est clair pour l'élève : le dessin à main levée n'est pas l'objet sur lequel il faut travailler, ça n'en est qu'un représentant. Cela ne signifie pas pour autant que ce soit le représentant d'un objet théorique, le dessin à main levée peut n'être pour l'élève qu'un brouillon d'un autre dessin plus « précis », mais le premier pas est franchi : une distance est prise entre le dessin proposé et l'objet sur lequel il faut travailler. Si l'élève doit ensuite résoudre un problème, sans avoir la possibilité d'effectuer un autre dessin, la démarche hypothético-déductive va pouvoir se mettre en route. Ce sont là des hypothèses et une recherche spécifique sur les dessins à main levée mériterait d'être effectuée.

L'environnement papier-crayon n'étant plus le seul aujourd'hui dans le domaine de la géométrie, l'environnement informatique a aussi été exploré. Des paradigmes géométriques informatiques spécifiques ont pour cela été utilisés. La question :

P2 : Quelle est l'influence de l'environnement (papier-crayon ou informatique) sur le positionnement « spontané » des PE1 dans les paradigmes G1 ou G2 ? Quel rôle jouent G1I et G2I ?

reflétait en particulier le souci de savoir dans quel paradigme géométrique les étudiants vont se situer dans l'environnement informatique : dans G1I, proche de G1, ou dans G2I, proche comme nous l'avons montré de G2 du point de vue des résultats mais proche de G1 du point de vue cognitif. Vont-ils ensuite rester dans G1I ou G2I, ou vont-ils passer à G2 pour terminer le travail ?

Le faible nombre d'étudiants ayant participé à l'expérimentation en environnement informatique ne permet pas de tirer des conclusions générales. Cette partie du travail a néanmoins permis de confirmer tout l'intérêt que présentent les logiciels de géométrie dynamique certes pour effectuer des conjectures, c'est là un fait établi, mais aussi pour se dégager d'automatismes, de routines, mises en place dans l'environnement papier-crayon, et qui finalement empêchent de réfléchir, ou du moins n'incitent pas à le faire. Il a également permis de confirmer le rôle majeur du manque de connaissances, de compétences, de situations de référence en géométrie plane pour se situer efficacement dans G2.

Tout ce travail se situait dans la perspective de l'amélioration de la formation des PE1. Une question se posait donc tout naturellement :

> **P3 : Peut-on proposer un dispositif de formation qui permette aux PE1 d'une part de prendre conscience des paradigmes G1 et G2 et d'autre part d'être capables de se situer de manière consciente et efficace dans G1 ou G2 selon les besoins ?**

Une telle proposition a été faite. Les premiers effets à court terme m'autorisent à penser que le dispositif expérimenté permet aux étudiants de commencer à prendre conscience de l'existence de paradigmes géométriques différents, ainsi que d'évoluer dans leur positionnement dans les paradigmes G1 et G2. Il faudrait bien sûr étudier l'effet produit à moyen terme lors de la deuxième année de formation, puis ultérieurement sur le terrain, lorsque les étudiants devenus enseignants seront en classe avec les enfants.
Entre autres, améliorer la qualité du langage utilisé dans la rédaction de scénarios de construction m'est apparu indispensable et un dispositif a pour cela été proposé en environnement papier-crayon. L'environnement informatique pourrait aussi être exploité : la possibilité de faire apparaître l'historique, voire d'en faire facilement un fichier texte (avec un logiciel tel que « Déclic » par exemple) permettent d'envisager un travail dans ce sens. Mes premières expériences dans ce domaine, non relatées dans cette thèse, semblent montrer des effets intéressants. Ce sera certainement pour moi l'objet d'un prochain travail.

Une deuxième hypothèse de recherche sous-tendait ce travail :

> **HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.**

Le cadre théorique des paradigmes géométriques m'a été très utile pour analyser l'activité effective des PE1 au travers de leurs productions notamment, mais aussi activité supposée, au travers de l'analyse d'un sujet de concours par exemple. Le travail a été centré ici sur les PE1, avec quelques activités certes différentes mais néanmoins en nombre limité. Même si quelques exercices extraits de manuels de cycle 3 par exemple ont été analysés, et il faudrait maintenant tester ce cadre théorique plus largement avec une autre population, et avec d'autres types d'activité.

Mes collègues formateurs de futurs professeurs des écoles, comme les professeurs de collège, pourront, je l'espère, trouver dans mon travail un regard pertinent sur une des difficultés de leurs étudiants ou élèves en géométrie plane, ainsi que des pistes d'activité à expérimenter avec eux.

Bibliographie

Bibliographie

Ouvrages et articles

ARSAC Gilbert (1989) : La construction du concept de figure chez des élèves de 12 ans. *Actes de la 13ème conférence PME.* Paris. p 85-92. Artigue M., Rogalski J. et Vergnaud G.

ARSAC Gilbert, GERMAIN Gilles & MANTE Michel (1991) : *Problèmes ouverts et situation-problème.* Ed. IREM de Lyon.

ARSAC Gilbert et al. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Ed. Presses Universitaires de Lyon (en particulier chapitre 8, Le problème de la figure, le rôle de la figure dans l'argumentation)

ARSAC Gilbert (1994-1995) : Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *Petit x.* n° 37. p 5-33. Ed. IREM de Grenoble.

ARSAC Gilbert (1997-1998) : Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie. *Petit x.* n° 47. p 5-31. Ed. IREM de Grenoble.

ARSAC Gilbert (1998) : *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée*, Edition Aléas et IREM de Lyon

ARSAC Gilbert (2004) : Bases élémentaires de l'étude de la démonstration mathématique. *Séminaire de Didactique, Histoire et Épistémologie des Mathématiques, des Sciences et des Techniques* du PREMST. IUFM de Lyon. 28 janvier 2004. http://www.lyon.iufm.fr/pole_recherche/archives/premst_archives/Arsac-article_sur_dem.pdf

ASSUDE Teresa (1997) : De l'économie et de l'écologie du travail avec le logiciel Cabri-géomètre. *Petit x.* n° 44. p 53-79. Ed. IREM de Grenoble.

BALACHEFF Nicolas (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques.* Volume 3.3. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

BALACHEFF Nicolas. (1987) : Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*. n° 18. p 147-176. Ed. Kluwer Academic Publishers.

BALACHEFF Nicolas (2002) : Cadre, registre et conception. Note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les cahiers du laboratoire Leibniz.* n° 58. Laboratoire Leibniz. IMAG. Grenoble. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/2002/Cahier58/CLLeib58.pdf

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène (1992) : *Espace et géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux 1

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène (1994): Common spatial representations and their effects upon teaching and learning of space and geometry. *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Education,* II: 72-79

BERTHELOT René et SALIN Marie-Hélène (2000-2001) : L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x*. n°56. p 5-34. Ed. IREM de Grenoble.

BROUSSEAU Guy (2003) : *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* Texte disponible en ligne sur le site de Guy Brousseau http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf

BROUSSEAU Guy (1983) : Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. p 184-226 LSD IMAG.

CARREGA Jean-Claude (1989) : *Théorie des corps : la règle et le compas.* Ed. Hermann, Collection Formation des enseignants et formation continue.

CHARNAY Roland (1998) : De l'école au collège, les élèves et les mathématiques. *Grand N.* n° 62. p 35-46. Ed. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Yves (1992) : Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. vol. 12 n°1. p 73-112. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHEVALLARD Yves (1996) : La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la* 8ème *école d'été de didactique des mathématiques.* Saint Sauves d'Auvergne. (1995). Ed. IREM de Clermont Ferrand.

CHEVALLARD Yves (1997) : Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* vol. 17. n°1. p 17-54. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHEVALLARD Yves (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* vol. 19. n°2. p 221-266. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHOQUET Gustave (1964): *L'enseignement de la géométrie.* Ed. Hermann, Paris

CLAIRAUT Alexis (1741): *Eléments de Géométrie.* Ed. Hatier 1920.

COLMEZ François & PARZYSZ Bernard (1993) : Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde. *Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon). p 35-55. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

DAHAN Jean-Jacques (2005) : *La démarche de découverte expérimentalement médiée par Cabri-géomètre en mathématiques.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

DAHAN-DALMEDICO Amy & PEIFFER Jeanne (1986) : *Une histoire des mathématiques : routes et dédales.* Ed. du Seuil. Collection Points Sciences. (téléchargeable sur : http://www-iam.imag.fr/ThesesIAM/ThesejjDahan.pdf)

DOUADY Régine (1984) : *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement mathématique. Une réalisation dans tout le cursus primaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-7.

DOUADY Régine (1986) : Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 7. n°2 p 6-31. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

DOUADY Régine (1992) : Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM.* n°6. p 132-158. Ed. Topiques.

DUCROT Oswald (1972) : *Dire et ne pas dire, Principes de sémantique linguistique.* Ed. Hermann, Paris. Collection : Savoir.

DUCROT Oswald (1973) : *La preuve et le dire.* Ed. MAME. Paris. Collection : Repères. Série bleue.

DUVAL Raymond (1988) : Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Vol 1. p 57-74. Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg.

DUVAL Raymond (1992) : Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture cognitive? *Petit x.* n°31. p 37-61. Ed. IREM de Grenoble.

DUVAL Raymond (1994) : Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM.* n°17. p 121-138. Ed. IREM de Grenoble.

DUVAL Raymond (1995): *Sémiosis et pensée humaine.* Ed. Springer. Berne.

DUVAL Raymond (1996) : Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 16. n°3. p 349-382. Editions La Pensée Sauvage. Grenoble.

DUVAL Raymond (2000) : Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 20. n°2. p 135-170. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

EUCLIDE d'Alexandrie (1990) : *Les éléments, livre 1.* Traduit du texte de Heiberg. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Ed. Presses Universitaires de France.

FISCHBEIN Ephraim (1987) : Intuition in Science and Mathematics. An educational Approach. Ed. Reidel Publishing Company.

FISCHBEIN Ephraim (1993) : The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 24. n°2. p 139-162. Ed. Kluwer Academic Publishers.

GONSETH Ferdinand (1945-1955): *La géométrie et le problème de l'espace.* Ed. du Griffon. Lausanne

GRAS Régis (1996) : *L'implication statistique, nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique*. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

GRAS Régis & BAILLEUL Marc (2000), *Actes des journées la fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative : applications et traitements par C.H.I.C.* Caen. Juin 2000. Ed. Ecole polytechnique de l'Université de Nantes.

GRAS Régis (2005) : Panorama du développement de l'Analyse Statistique Implicative à partir de situations fondatrices. *Actes de la troisième Rencontre Internationale A.S.I.* Palerme. Octobre 2005. Supplément n° 15 de la Revue « Quaderni di Ricerca in Didattica ». p 9-33. Université de Palerme http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_gras_1.pdf

HENRY Michel (1999) : L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères IREM.* n° 36. p 15-34. Ed. Topiques.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (1999.1) : Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres. *Grand N.* n°64. p 65-78. Ed. IREM de Grenoble.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK, Alain (1999.2) : Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*. n°40. p 283-312. Ed. Kluwer Academic Publishers.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (1999.3) : Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*. n°51. p 5-21. Ed. IREM de Grenoble.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (2000) : Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 20. n°1. p 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (2001) : Sur la question des différents paradigmes géométriques. *Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* Tours. mai 2001. p 285-295. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (2002.1) : Approximations géométriques. *L'Ouvert.* n°105. p. 19-28. APMEP d'Alsace et IREM de Strasbourg. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (2002.2) : Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.* Editions La Pensée Sauvage. Grenoble.

HOUDEMENT Catherine et KUZNIAK Alain (2003) : Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal. *Petit x.* n ° 61. p 61-74. Ed. IREM de Grenoble.

JORE Françoise (2003.1) : Les PE1 et la médiatrice : Etude statistique et étude de cas. *Actes du 29ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* La Roche sur Yon. Mai 2002. p 59-72. Ed. IREM des Pays de la Loire. Nantes.

JORE Françoise (2003.2) : Rapport à la géométrie théorique des professeurs des écoles en formation initiale. *Chantier, Formations et Pratiques (Inforec).* p. 64-68. Ed. AFCFP. Paris.

JORE Françoise (2005) : Analyse de tests de géométrie plane dans le cadre de la formation des professeurs des écoles. *Actes de la troisième Rencontre Internationale A.S.I.* Palerme. Octobre 2005. Supplément n° 15 de la Revue « Quaderni di Ricerca in Didattica ». p 199-210. Université de Palerme. http://math.unipa.it/~grim/asi/asi_05_Jore_15.pdf

JORE Françoise et PARZYSZ Bernard (2005) : Metaphorical objects and actions in the learning of geometry. The case of French pre-service primary teachers. *Actes de CERME IV (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education).* San Feliu de Guixols (Espagne). Février 2005. http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/1/jore.pdf

KUZNIAK Alain (2001) : Espace(s) de travail de la géométrie. *Actes du colloque Inter-IREM 1er cycle : Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental.* La Grande Motte. Juin 2001. p 291-300. Ed. IREM de Montpellier.

KUZNIAK Alain et RAUSCHER Alain (2002) : Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. *Actes du 29éme colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* La Roche sur Yon. Mai 2002. p 271-290. Ed. IREM des Pays de la Loire. Nantes.

KUZNIAK Alain (2004) : *Paradigmes et espaces de travail géométriques.* Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Ed. IREM Paris 7.

LABORDE Colette (1988) : L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 9/3. p 337-364. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

LABORDE Colette et CAPPONI Bernard (1991) : Cabri-Géomètre, un environnement pour l'apprentissage de la géométrie élémentaire. *Actes de la 6ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques.* Plestin les Grèves. Septembre 1991. p 220-222.

LABORDE Colette & CAPPONI Bernard (1994) : Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 14. n° 1.2. p 165-210. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

LABORDE Colette et CAPPONI Bernard (1995) : Modélisation à double sens. *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques.* Saint Sauves d'Auvergne. Août 1995. Editions IREM de Clermont-Ferrand.

LEGRAND Marc (1993) : Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM.* n°10. p 123-159. Topiques Editions.

LEMOINE Emile (1888) : De la mesure de la simplicité dans les sciences mathématiques. *Compte rendu de la 17ème session de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.* tome 2, p 75-95. (disponible en version numérisée sur le site http://gallica.bnf.fr/ , pour ce texte : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201169f/f78.table)

LEMOINE Emile (1892) Application de la géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème. *Bulletin de la S.M.F.* tome 20. p 132-150 (disponible en version numérisée sur le site http://www.numdam.org/ , pour ce texte : http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF_1892__20_/BSMF_1892__20__132_1/BSMF_1892__20__132_1.pdf)

LEMOINE Emile (1902) : Géométrographie ou Art des constructions géométriques. *Revue Scientia. Partie Physico-Mathématique.* n° 18. (disponible en version numérisée sur le site http://gallica.bnf.fr/, pour ce texte : http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68143p.notice)

LERMAN Israël-César (1981) : *Classification et analyse ordinale des données.* Ed. Dunod.

LERMAN Israël-César, GRAS Régis et ROSTAM H. (1981) : Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires, I et II, *Mathématiques et sciences Humaines.* n°75. Paris

LUBCZANSKI Jacques (1985.1) : Les fiches cuisine de tonton Lulu. Comment réussir le triangle quelconque ! *Bulletin de l'APMEP.* n° 347. p 103-109.

LUBCZANSKI Jacques (1985.2) : Les fiches cuisine de tonton Lulu. Le triangle quelconque : une nouvelle recette. *Bulletin de l'APMEP.* n° 351. p 911-914.

LUBCZANSKI Jacques (1985.3) : Triangle quelconque : ce n'est pas fini ! *Bulletin de l'APMEP* n° 351, pp 915-918.

NICOLAS-LORRAIN Brigitte (2000) : Conceptualisation géométrique en formation de PE. *Actes du 27ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* Chamonix. mai 2000. p. 165-178. Ed. IREM de Grenoble.

OUVRIER-BUFFET Cécile (2003) : *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble 1. (téléchargeable sur : http://www-leibniz.imag.fr/perso/r4/buffet/public_html/These/index.html)

PARZYSZ Bernard (1988) : “Knowing” vs “seeing”. Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics.* n° 19. p79-92. Ed. Kluwer Academic Publishers.

PARZYSZ Bernard (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7

PARZYSZ Bernard (1991) : Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics.* n° 22. p 575-593. Ed. Kluwer Academic Publishers.

PARZYSZ Bernard (2002) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *Actes du 28ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* Tours. Mai 2001. p.99-110. Ed. Presses Universitaires d'Orléans.

PARZYSZ Bernard (2003) : Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, dans des environnements papier-crayon et informatique., *Actes du 29ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* La Roche sur Yon. Mai 2002. p 85-92. Ed. Irem des Pays de la Loire.

PARZYSZ Bernard (2004) : Preuve perceptive ou démonstration ? Le rapport des PE1 à la géométrie, étudié à travers leur discours « méta ». *Actes du 31ème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres.* Foix. Mai 2004. Ed. IREM de Toulouse.

PARZYSZ Bernard et JORE Françoise (2001) : Qu'ont-ils retenu de la géométrie du collège ? Le rapport à la géométrie des PE1. Espace(s) de travail de la géométrie. *Actes du colloque Inter-IREM 1er cycle : Quelles géométries au collège ? Geste physique, geste virtuel, geste mental.* La Grande Motte. Juin 2001. p 107-118. Ed. IREM de Montpellier.

PARZYSZ Bernard et JORE Françoise (2002) : What is geometry for french preservice elementary schoolteachers ? *Proceedings of the 26th Annual Conference of PME (Psychology of Mathematics Education).* p 1-308. Norwich (Grande Bretagne). Juillet 2002.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne (2002) : Milieu, cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady.* P 63-72. Ed. IREM Paris-7.
ROBERT Aline (1995) : *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques.* Tome I. Géométrie. Ed. Ellipses.

PLATON (1967) : *Protagoras, Euthydème, Gorgias, Ménexène, Ménon, Cratyle ; traduction, notices et notes par Emile Chambry.* Ed. Garnier-Flammarion.

ROGALSKI Marc (2002) : Les changements de cadres dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady.* P 13-30. Ed. IREM Paris-7.

SHIR K. et ZASLAVSKY O. (2001) : What constitutes a (good) definition? The case of a square. *Proceedings of 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 4. p 161-168. Netherlands, Utrecht University.

STRÄSSER Rudolf (?) : Dessin et figure. Géométrie et dessin technique à l'aide de l'ordinateur. *Séminaire n°126. LSDD.* IMAG. Université de Grenoble.

PLUVINAGE François et RAUSCHER Jean-Claude (1986) : La géométrie construite mise à l'essai. *Petit x.* n°11. p 5-36. Ed. IREM de Grenoble.

Van HIELE P.M. et Van HIELE GELDOF D. (1958) : A Method of initiation into geometry at secondary school. *Report on Methods of Initiation into Geometry.* J. B. Wolters

Van HIELE P.M.(1959) : La pensée de l'enfant la géométrie. *Bulletin de l'APMEP.* n° 198.

Van HIELE Pierre (1984) : *A child's thought and geometry*, in English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele (D. Geddes, D. Fuys & R. Tischler, eds.). Research in Science Education Program of the National Science Foundation (USA)

Van HIELE P.M.(1986) : *Structure and Insight.* Academic Press Orlando.

Instructions officielles

[IO 1885] : *Compléments aux programmes et instructions du 13 mai 1985. Activités géométriques.* Ministère de l'Education Nationale. Direction des écoles. Ecole élémentaire.

[Prog. 6. 1995], [Prog. 3. 1999] : Extraits de : *Enseigner au collège. Mathématiques. Programme et accompagnement.* Ministère de la jeunesse, de l'Education Nationale et de la recherche. Direction de l'enseignement scolaire. CNDP. Réimpression mars 2004. http://www.cndp.fr/doc_administrative/

[Appl. Maths C2. 2002] : *Document d'application des programmes. Mathématiques. cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2).* Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche. Direction de l'enseignement scolaire. Collection Ecole. CNDP. http://www.cndp.fr/doc_administrative/programmes/primaire/edu_scientifique/edu_scientifique.htm

[Appl. Maths C3. 2002] : *Document d'application des programmes. Mathématiques. cycle des approfondissements (cycle 3).* Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation nationale et de la Recherche. Direction de l'enseignement scolaire. Collection Ecole. CNDP. http://www.cndp.fr/doc_administrative/programmes/primaire/edu_scientifique/edu_scientifique.htm

[Prog. école. 2002] : Programme d'enseignement de l'école primaire. *Bulletin officiel de l'éducation nationale.* Numéro hors série n°1 du 14 février 2002. http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm

[Articulation école collège. 2004] : *Les nouveaux programmes de l'école primaire. Mathématiques. Document d'accompagnement. Articulation école collège.* Direction de l'enseignement scolaire. Bureau du contenu des enseignements. http://eduscol.education.fr/D0015/C3_6.pdf

[Prog. 6. 2004] : Programme des collèges. Mathématiques. Classe de sixième. *Bulletin officiel de l'éducation nationale.* Numéro hors série n°5 du 9 septembre 2004. ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2004/hs4/maths_sixieme.pdf

Manuels et livres du maître utilisés

[Bordas. Livre du professeur. 6ème. 1996] SERRA Eric et al. (1996) : *Mathématiques. 6ème*. Livre du professeur. Ed. Bordas.

[Bréal. 6ème. 2005] AUDREN Hélène et al. (2005) : Maths. 6ème. Ed. Bréal.

[Cap Maths CM1, 2003] CHARNAY Roland, COMBIER Georges et DUSSUC Marie-Paule (2003) : *Cap Maths. CM1*. Ed. Hatier

[Cap Maths CM2, 2004] CHARNAY Roland, COMBIER Georges et DUSSUC Marie-Paule (2004.1) : *Cap Maths. CM2*. Ed. Hatier

[Charnay et al. 2004] CHARNAY Roland, COMBIER Georges et DUSSUC Marie-Paule (2004.2) : *Cap Maths CM2 : le Guide des activités, pour l'enseignant.* Ed. Hatier.

[Cinq sur Cinq 4ème. 1998] DELORD Robert et al. (1998) : *Math 4ème*. Collection Cinq sur Cinq. Ed. Hachette Education. 1998.

[Delagrave. 6ème. 2005] AUDOIN Marie-Claude et al. (2005) : Mathématiques 6ème. Ed. Delagrave.

[Décimale 4ème. 1998] PENE Nicole et al. (1998) : *Mathématiques 4ème*. Collection Décimale. Ed. belin, 1998.

[Diabolo. 6ème. 2005] CHARMARTY Olivier et al. (2005) : Maths 6ème. Collection Diabolo. Ed. Hachette Education.

[Dimathème. 6ème. 2005] FOURTON Jean-Luc et al. (2005) : Dimathème. 6ème.Ed. Didier

[Dimathème 4ème, 1998] LANOELLE Alain et al. (1998) : *Mathématiques 4ème*. Collection Dimathème. Ed. Didier.

[Domino. 6ème. 2005] HACHE Christophe et al. (2005) : Math 6ème. Collection Domino. Ed. Nathan.

[Le nouveau Pythagore. 6ème. 1996] BONNEFOND Gérard et al. (1996) : *Mathématiques. 6ème*. Collection Le Nouveau Pythagore. Ed. Hatier.

[Le nouveau Pythagore 4ème, 1998] BONNEFOND Gérard et al. (1998) *Mathématiques 4ème*. Collection Le Nouveau Pythagore. Ed. Hatier.

[Magnard. 6ème. 2005] BORREANI Jacqueline et al. (2005) : Maths 6ème. Ed. Magnard.

[MB6. 6ème. 2005] SUCH S et al. (2005) : Maths Bordas 6ème. Ed. Bordas.

[Manuel.1940] : Manuel de géométrie, par une réunion de professeurs. 6e édition. Ed. Mame, Tours 1940 (programme de 1938)

[Multi Math. 6ème. 2005] PICCHIOTTINO Jean-Dominique et al. (2005) : Mathématiques 6ème. Collection Multi Math. Ed. Hatier.

[Prisme. 6ème. 2005] JACOB Nadine et al. (2005) : Math 6ème. Collection Prisme. Ed. Belin.

[Repère. 6ème. 2005] BRAULT Roger et al. (2005) : Mathématiques 6ème. Collection Repère. Ed. Hachette Education.

[Transmath. 6ème. 2000] MALAVAR Joël et al. (2000) : *Transmath. Mathématiques. 6ème*. Ed. Nathan

[Transmath. 6ème. 2005] MALAVAL Joël et al. (2005) : Transmath. 6ème. Ed. Nathan.

[Nouveau Transmath 4ème, 1998] MALAVAR Joël et al. (1998) : *Mathématiques 4ème*. Collection Transmath. Ed. Nathan. 1998

[Triangle. 6ème. 2005] CHAPIRON Gisèle et al. (2005) : Mathématiques. 6ème.Collection Triangle. Ed. Hatier.

[Triangle 4ème, 1998] CHAPIRON et al. (1998) : *Mathématiques 4ème*. Collection Triangle. Ed. Hatier. 1998.

Dictionnaires

[Larousse, 1995] *Le petit Larousse Grand format* 1996. Ed. Larousse, 1995.

[Bouvier & al., 1979], [Bouvier & al., 1993] BOUVIER Alain et al. (1979 & 1993) : *Dictionnaire des Mathématiques*. Ed. Presses Universitaires de France.

[BARUK Stella, 1992 & 1995] BARUK Stella (1992 & 1995) : *Dictionnaire de Mathématiques élémentaires*. Ed. du Seuil.

[Académie française. Neuvième édition] version informatisée : http://atilf.atilf.fr/academie9.htm

[Académie française. Huitième édition] version informatisée : http://atilf.atilf.fr/academie.htm

ANNEXES

Annexes

Table des annexes

Annexe 1 : Calcul de la simplicité des figures

Extrait des actes du colloque d'Oran de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences, compte rendu de la 17ème session, 1888.

Extrait de l'intervention d'Emile Lemoine, dans la séance du 2 avril 1888.

DE LA MESURE DE LA SIMPLICITÉ DES CONSTRUCTIONS

La solution graphique d'un problème peut s'obtenir le plus souvent de plusieurs manières et, à moins de circonstances particulières, il faut évidemment choisir la plus simple. Si ces constructions se réduisent au tracé de très peu de lignes, le choix entre elles est facile, puisque l'on voit sans difficultés celle qui en exige le moins; mais il n'en est pas toujours ainsi, d'autant plus que les constructions, dont l'énoncé se fait en peu de mots, sont souvent fort complexes (*). Nous pensons donc qu'il y a intérêt à *mesurer* le degré de la *simplicité* réelle des constructions, l'application *pratique* de cette recherche se trouvant, d'ailleurs, dans le tracé des épures, dans les questions de statique graphique, etc. Nous ne croyons pas que cette *mesure* précise de la simplicité ait été essayée jusqu'ici, et la chose a lieu de surprendre à cause de sa facilité.

Dans ce qui suit, nous ne nous occupons pas de la définition de la ligne abstraite, du point, etc. ; ainsi, pour nous, la ligne est le trait qui en est la représentation et le point est l'intersection de deux lignes ou la petite trace laissée sur le papier par la pointe d'un compas ; toute ligne étant, d'ailleurs, la juxtaposition de points.

Les épures se construisent ordinairement au moyen de la règle et du compas ; aussi, ce que nous allons étudier d'abord, c'est la simplicité d'une construction effectuée avec ces deux instruments.

Toutes les opérations à faire au moyen de la règle se réduisent à deux :

(*) Si, par exemple, on veut *construire la perpendiculaire abaissée du centre radical de trois circonférences sur leur axe de similitude externe*, ces quelques mots renferment évidemment l'indication d'une construction matérielle assez compliquée. Nous verrons plus loin que la simplicité de cette construction est représentée par le nombre 74.

1° Faire passer le bord de la règle par un point donné (opération R_1).

2° Tracer une ligne le long du bord de cette règle (opération R_2).

Ainsi la simplicité de la construction nécessaire pour faire passer une ligne droite par deux points donnés, sera $2R_1 + R_2$.

Toutes les opérations à faire au moyen du compas se réduisent à trois :

1° Mettre la pointe du compas en un point donné (opération C_1).

2° Mettre la pointe du compas en un point arbitraire d'une ligne donnée (opération C_2).

3° Tracer la circonférence (opération C_3).

Nous mesurerons donc la simplicité d'une construction par le nombre

$$n_1 R_1 + n_2 R_2 + n_3 C_1 + n_4 C_2 + n_5 C_3$$

des opérations élémentaires qu'elle exigera.

Observons que nous comptons tout arc de cercle tracé, quelque petit que soit cet arc, comme si la circonférence était tracée toute entière ; de même, nous ne tiendrons pas compte de la longueur de la partie tracée d'une droite.

Si nous admettons à chacune de ces cinq opérations une importance égale, c'est-à-dire si nous les considérons comme équivalentes, et ayant chacune 1 pour simplicité, la mesure d'une construction s'exprimera par le seul nombre :

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5.$$

Si l'on contestait l'équivalence de ces opérations, on pourrait exprimer par des coefficients, que déterminerait une série d'expériences faites par de bons dessinateurs, les valeurs relatives de R_1, R_2, C_1, C_2, C_3, mais nous n'y voyons pas utilité et nous ne connaissons aucune expérience de cette nature qui nous autorise à présumer ce que seraient les valeurs de ces coefficients.

Appliquons maintenant notre théorie.

CONSTRUCTION I. — *Tracer une droite passant par deux points donnés A et B.*

Nous avons vu que c'est : $2R_1 + R_2$.

La simplicité est 3.

CONSTRUCTION II. — *Prendre avec le compas une longueur donnée marquée par la distance de deux points A et B donnés.*

Je mets une pointe en A (op. C_1), l'autre en B (op. C_1) (*).

C'est donc : $2 C_1$.

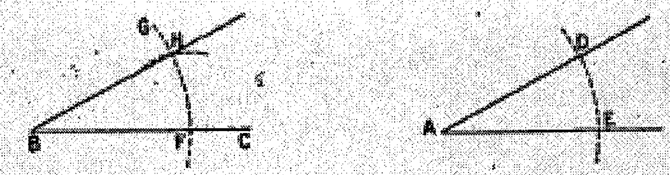
(*) J'admets que je fais une opération équivalente (op. C_1), en mettant la deuxième pointe en B lorsque la première est maintenue en A, à celle que j'ai faite lorsque j'ai placé la première en A, ce qui est (op. C_1) par définition ; cette assimilation peut être contestée, il serait facile de donner un nom, C'_1 par exemple, à cette seconde opération ; cela ne pourrait en tout cas avoir d'objet que si l'on appliquait un coefficient à chaque opération R_1, R_2, C_1, etc., mais aucun si nous les admettons équivalentes.

La simplicité est 2.

Nous étudions dans ce qui suit les problèmes résolus dans le *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse déjà cité (voir page 78) et, quand nous ne développons pas la construction que nous effectuons, il s'agit toujours de celle qui est indiquée dans cet ouvrage.

CONSTRUCTION III. — *Par un point* B *donné sur une droite* BC (fig. 2) *mener une seconde droite qui fasse avec la première un angle égal à un angle donné* DAE.

Je mets la pointe du compas en A (op. C_1); je décris une circonférence quelconque (op. C_3) qui coupe en D et en E les côtés de l'angle donné; je mets la pointe en B (op. C_1); je décris avec le rayon employé



2_2 Fig. 2. 2_1

précédemment l'arc GF (op. C_3), qui coupe en F la droite BC; je prends avec le compas la longueur DE (op. $2C_1$); je mets une pointe en F (op. C_1); je décris de F comme centre avec DE pour rayon un arc de cercle (op. C_3), qui coupe en H l'arc GF; je trace la droite BH (op. $2R_1 + R_2$).

Le résultat est donc $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$.

La simplicité est 11.

CONSTRUCTION IV. — *Connaissant deux angles* α *et* β *d'un triangle, construire le troisième* γ.

Je trace une droite AB (op. R_2); par l'un de ses points O, je mène une droite, qui forme avec OA un angle égal à α (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$); par le même point O, je mène une autre droite OD, qui forme avec OB un angle DOB égal à β (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3\,C_3$) : l'angle COD sera l'angle cherché.

Résultat : $4R_1 + 3R_2 + 10\,C_1 + 6C_3$.

La simplicité est 23.

CONSTRUCTION V. — *Construire un triangle, connaissant un côté* a *et les deux angles adjacents au côté* a.

Je trace une droite BC (op. R_2); je prends avec le compas la longueur a (op. $2C_1$); je mets une pointe en un point B arbitraire de BC (op. C_1); je décris de B comme centre avec a pour rayon un arc de cercle qui coupe BC en C (op. C_3); en B, je fais l'angle CBA égal à l'un des angles donnés (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$); en C, je fais l'angle BCA, égal à l'autre angle donné (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$).

Résultat : $4R_1 + 3R_2 + 12C_1 + C_2 + 7C_3$.

Simplicité : 27.

CONSTRUCTION VI. — *Construire un triangle* ABC, *connaissant deux côtés* b *et* c *et l'angle compris* A.

Je trace une droite AB (op. R_1); je prends avec le compas la longueur C (op. $2C_1$); de A comme centre avec une longueur quelconque comme rayon je trace un arc de cercle (op. $C_1 + C_3$); en A je fais l'angle BAC égal à l'angle donné (op. $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$); puis je trace CB (op. $2R_1 + R_2$).

Résultat : $5R_1 + 2R_2 + 8C_1 + 4C_3$.

Simplicité : 19.

CONSTRUCTION VII. — *Construire un triangle, connaissant deux côtés* a *et* b *et l'angle* B *opposé à l'un d'eux*.

On trouverait :

Résultat : $4R_1 + 3R_2 + 10C_1 + C_2 + 5C_3$.

Simplicité : 23.

CONSTRUCTION VIII. — *Construire un triangle, connaissant les trois côtés*.

Résultat : $4R_1 + 3R_2 + 8C_1 + C_2 + 3C_3$.

Simplicité : 19.

Remarque. — Nous supposons toujours les données posées à part et la feuille de notre épure complètement blanche à l'origine. Si certaines des données sont en place et qu'on s'en serve alors dans la construction, il est évident qu'elle se simplifie. Ainsi, dans le problème précédent, si l'on construisait le triangle sur un des côtés *donnés*, il faudrait diminuer l'expression résultante.

1° De $2C_1$, pour prendre la longueur du côté;

2° De R_2, pour le tracé de la ligne droite sur laquelle cette longueur serait placée;

3° De $C_2 + C_3$, pour placer la longeur du côté sur cette droite.

Le résultat serait donc seulement : $4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 2C_2$ et la simplicité : 14.

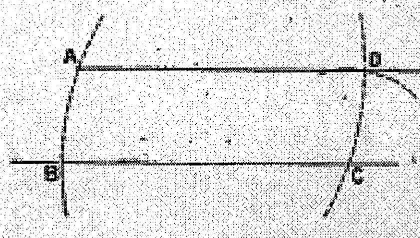


Fig. 3.

CONSTRUCTION IX. — *Par un point* A, *pris hors d'une droite* BC, *mener une parallèle à cette droite.*

Du point A (fig. 3) comme centre, avec une ouverture de compas arbitraire, je décris l'arc DC (op. $C_1 + C_3$); de C comme centre, avec la même ouverture, je décris l'arc AB (op. $C_1 + C_3$); je prends la longueur AB (op. $2C_1$) et de C comme centre, avec cette longueur AB comme rayon, je décris une circonférence (op. $C_1 + C_3$), qui coupe en D l'arc DC, puis je trace AD (op. $2R_1 + R_2$).

Résultat : $2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3$.

Simplicité : 11.

CONSTRUCTION X. — *Mener une perpendiculaire à une droite en son milieu ou trouver le milieu d'une droite donnée.*

Résultat : $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$.

Simplicité : 7.

CONSTRUCTION XI. — *Décrire un cercle sur une droite donnée* AB *comme diamètre.*

On cherche d'abord le milieu O de AB (op. $2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$), on prend la longueur OA (op. $2C_1$) et, la pointe du compas restant en O, on trace le cercle avec OA comme rayon (op. C_3).

Résultat : $2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3$.

Simplicité : 10.

CONSTRUCTION XII.— *Mener par un point* C, *pris sur une droite* AB, *une perpendiculaire à cette droite.*

Résultat : $2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$.

Simplicité : 9.

CONSTRUCTION XIII. — *Abaisser d'un point* C, *pris hors d'une droite, une perpendiculaire sur cette droite.*

Résultat : $2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3$.

Simplicité : 9.

CONSTRUCTION XIV. — *Élever une perpendiculaire à l'extrémité* A *d'une droite* AB *qu'on ne peut prolonger.*

Je place une pointe du compas en un point O arbitraire et l'autre pointe en A (op. C_1) ; je décris de O, avec OA comme rayon, une circonférence qui coupe AB en A et en B (op. C_3) ; je joins BO qui coupe cette circonférence en C (op. $2R_1 + R_2$) ; je joins AC qui est la perpendiculaire cherchée (op. $2R_1 + R_2$).

Résultat : $4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3$.

Simplicité : 8.

Remarque. — Ce résultat montre qu'il y a avantage à employer cette construction, même lorsque la droite AB peut être prolongée.

CONSTRUCTION XV. — *Décrire une circonférence passant par trois points donnés* A, B, C.

On décrira de A, B, C comme centres trois circonférences de même rayon, etc.

Résultat : $4R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 4C_3$.

Simplicité : 15.

Suivent ainsi d'autres constructions jusqu'à la page 94 où Lemoine conclue :

Remarquons encore que ce qui précède nous donne le moyen d'évaluer la simplicité des constructions de la géométrie de la règle seule, de la géométrie du compas et de la géométrie sur la sphère.

Nous avons toujours supposé, pour apprécier le degré de simplicité d'une construction, qu'il n'y avait sur le papier de l'épure que les données; en pratique, il n'en est pas toujours ainsi : par exemple, quand on dessine une épure où sont déjà diverses constructions. Supposons que j'aie à déterminer le centre de gravité d'un certain triangle ABC et que, dans ce triangle, les milieux A′ et B′ de deux côtés BC, BA soient déjà marqués par une construction antérieure, le centre de gravité se trouvera simplement en joignant AA′, BB′, c'est-à-dire par l'opération $2(2R_1 + R_2)$; simplicité : 6.

Dans le cas où l'on peut utiliser des résultats déjà marqués, il en résulte une simplification de la construction, c'est évident; mais il peut en résulter aussi un changement dans le choix de la meilleure construction. Ainsi, supposons que le résultat à atteindre puisse s'obtenir par plusieurs constructions, que j'appelle A, B, C, rangées dans leur ordre de simplicité graphique, lorsqu'on les effectue chacune indépendamment de l'épure que l'on exécute, A étant la plus simple :

Si plusieurs des opérations graphiques qu'il faudrait effectuer pour la construction C ont déjà leur résultat sur l'épure, celle-ci, quoique en principe plus complexe que A ou que B, peut devenir la plus simple.

D'autres circonstances peuvent encore faire préférer B ou C à A : par exemple, les données sont telles que l'exécution de A conduirait à des tracés qui se trouveraient hors de l'épure, ou qui seraient trop confus, ou dans lesquels il y aurait des intersections de droites ou de cercles sous des angles très aigus et, par conséquent, mal déterminés, tandis que les inconvénients seraient évités par l'emploi de B ou de C.

Nous pouvons ajouter, pour terminer, que l'exposé que nous venons de faire, montre clairement le point où est la difficulté d'obtenir l'exactitude dans les arts graphiques ; c'est qu'il faut, pour le moindre tracé, un grand nombre d'opérations élémentaires susceptibles chacune d'une erreur ; ainsi, par exemple, un problème aussi simple que : *mener les tangentes communes à deux cercles donnés*, a pour simplicité 54, c'est-à-dire nécessite 54 opérations élémentaires et, par conséquent, implique 54 erreurs; *inscrire un cercle dans un triangle*, 30, etc.

L'*exposé* de la méthode pour mesurer la simplicité dans les constructions géométriques est si simple qu'il y aurait, à notre avis, avantage à y employer quelques instants dans une des leçons du cours de géométrie élémentaire. Nous avons fait une remarque (page 81) à propos de la construction II, nous voulons y revenir en terminant, d'autant plus qu'on pourrait en ajouter d'autres analogues, par exemple à propos de la construction I; on peut évidemment contester, en effet, que faire passer le bord de la règle par deux points équivaille à faire passer deux fois le bord de la règle par un point; il suffirait, du reste encore, pour lever l'objection, de donner un nom nouveau R'_1 à cette opération en la comptant pour deux dans l'évaluation de la simplicité; une pareille division ne nous semble pas justifiée, pas plus que la nécessité de donner des coefficients aux diverses opérations, parce qu'il ne s'agit en somme que d'une évaluation de simplicité théorique permettant de remplacer ainsi par une notion précise l'idée restée vague de simplicité, car il faudrait aussi pour prétendre à l'exactitude tenir compte de l'échelle de l'épure, de la longueur des lignes tracées, du rayon des cercles; ce qui est évidemment impossible d'une façon générale.

Annexe 2 : Extrait du sujet de mathématiques pour le CRPE 2006 groupement des académies Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

EXERCICE 2 (4 points)

1) Pour cette question, tracer sur la copie une figure ressemblant à celle de l'annexe 2.
Il ne s'agit pas de reproduire exactement cette figure mais d'en respecter la forme et la disposition.
Construire à la règle et au compas les symétriques A', B' et C' des points A, B et C par rapport à la droite (OI) **en laissant apparents les traits de construction.**
Construire à la règle et au compas les symétriques A'', B'' et C'' des points A', B' et C' par rapport à la droite (OJ) **en laissant apparents les traits de construction.**

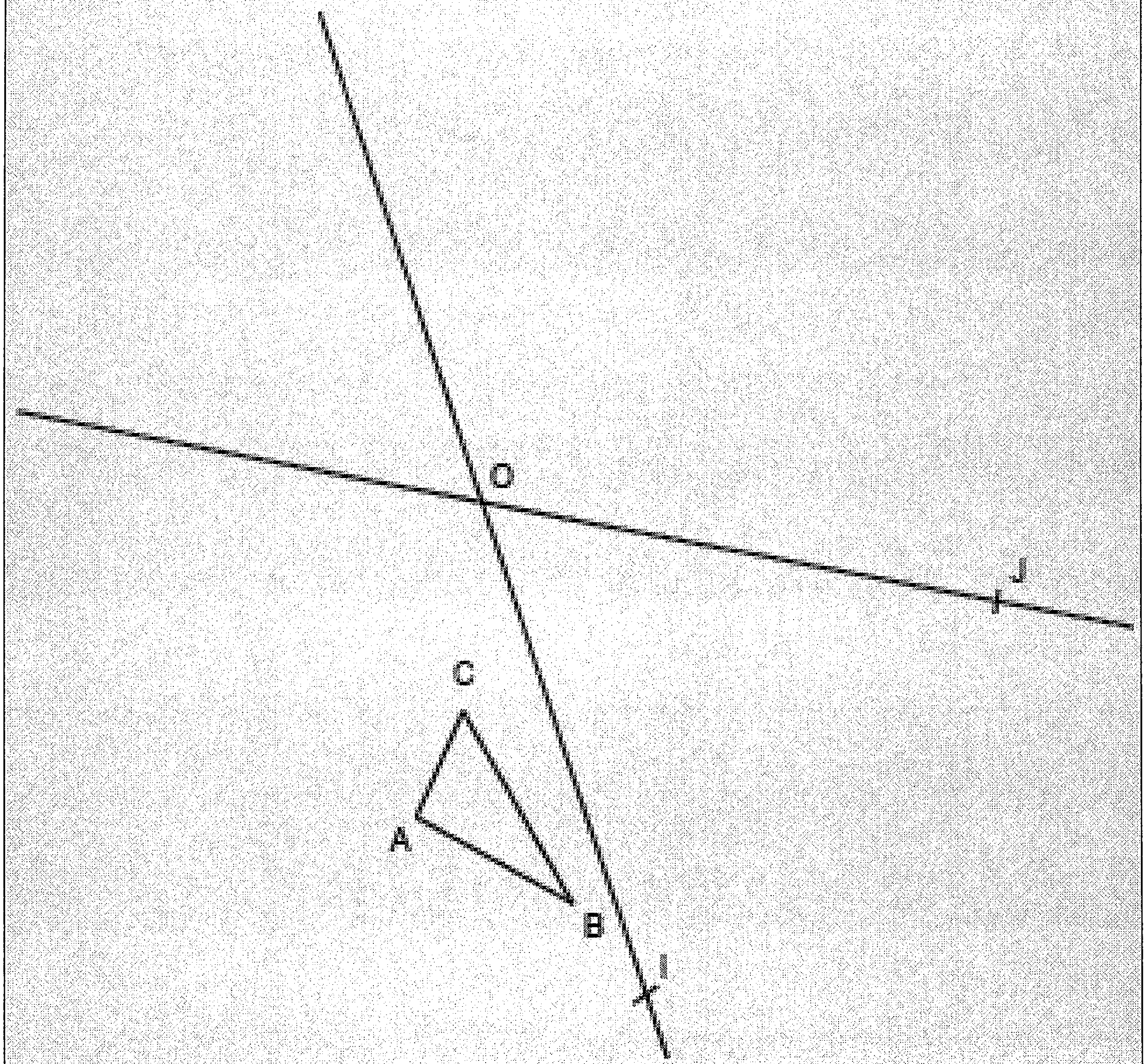
2) À partir de l'observation de la figure obtenue, donner un argument montrant qu'il n'existe pas de symétrie axiale qui transforme les trois points A, B et C en A'', B'' et C''.

3) Montrer que l'angle $B\widehat{O}B''$ vaut le double de l'angle $I\widehat{O}J$.

4) Quelle est la transformation du plan qui transforme le triangle ABC en $A''B''C''$? Justifier la réponse.

L'annexe 2 à laquelle il est fait référence est reproduite en page suivante

ANNEXE 2 :



Mathématiques	MAT-01-PG4	Page : 6/8

Annexe 3 : Tableau synthétique d'analyse de manuels sur la médiatrice

Manuel :	1 : Prisme	2 : MB	3 : Bréal	4 : Delagrave	5 : Dimathème	6 : Diabolo	7 : Repère	8 : Multi-Math	9 : Triangle	10 : Magnard	11 : Domino	12 : Transmath
La médiatrice est définie dans un chapitre avant la symétrie	x	x		x	x				x	x	x	x
La médiatrice est définie dans un chapitre autour de la symétrie			x			x	x	x				
La médiatrice est définie comme la droite perpendiculaire à un segment passant par son milieu	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Propriété : Si un point appartient à la médiatrice, alors il est situé à la même distance des extrémités de ce segment	x	x	x	x		x	x			x		x
Propriété : Si un point est situé à égale distance des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment.	x	x	x	x		x	x			x	x	x
Propriété : la médiatrice d'un segment est constituée de tous les points situés à égale distance des extrémités de ce segment.					x			x	x			
La construction de la médiatrice à la règle graduée et à l'équerre est explicitement présentée	x				x				x	x	x	
La construction de la médiatrice au compas, avec deux intersections de cercles ou d'arcs de cercles de même rayon est explicitement présentée		x	x	x	x		x	x	x	x	x	x
La construction de la médiatrice au compas, avec deux intersections de cercles ou d'arcs de cercles de rayons différents est explicitement présentée	x			x								
La construction à la règle et au compas décrit la construction de points équidistants	x			x			x					
La construction à la règle et au compas décrit la construction de cercles		x		x	x							
La construction à la règle et au compas décrit la construction d'arcs de cercles			x					x	x	x	x	x
Un lien est effectué entre la construction de la médiatrice à la règle et au compas et la propriété d'équidistance	x	x		x			x					

Annexe 4 : Test initial pages 1 2 3 4

Questionnaire initial. 878 étudiants.

1

Construisez avec soin un triangle ABC tel que :

AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm.

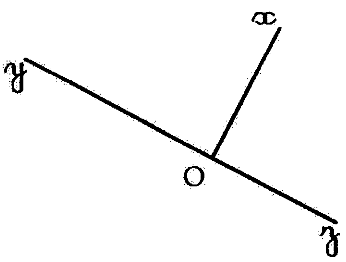
Que remarquez-vous ?

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

2

L'angle $x\hat{O}y$ est-il droit ?

Justifiez votre réponse.



Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

3

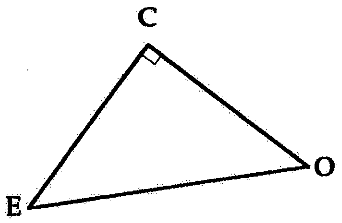
Construisez la médiatrice du segment [MN].

Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

- règle ☐
- graduation de la règle ☐
- rapporteur ☐
- compas ☐
- angle droit de l'équerre ☐

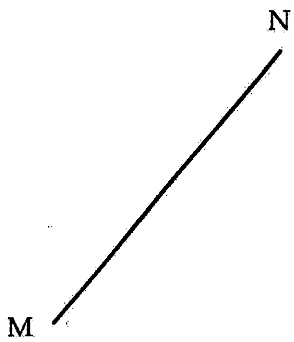
Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

4 Quelle est la nature du triangle ECO ?
Comment le savez-vous ?



Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

5 Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.



règle	☐
graduation de la règle	☐
rapporteur	☐
compas	☐
angle droit de l'équerre	☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

6

6.1 Construisez un losange ABCD en utilisant les instruments que vous voulez.
Marquez en couleur les deux premiers sommets placés.

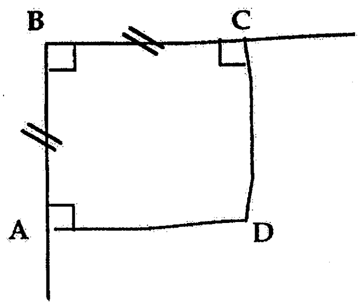
règle ❑
graduation de la règle ❑
rapporteur ❑
compas ❑
angle droit de l'équerre ❑

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

6.2 Donnez une définition du losange.

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

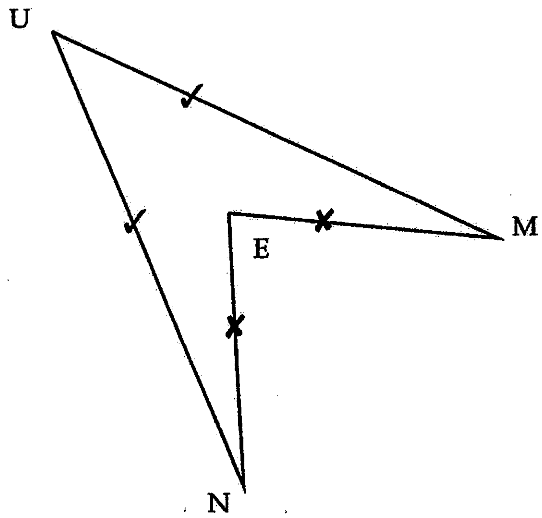
7



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

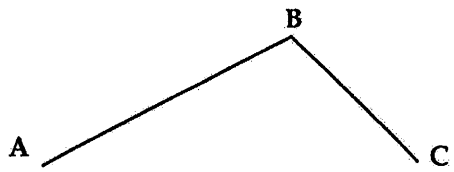
8 Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.



règle ☐
graduation de la règle ☐
rapporteur ☐
compas ☐
angle droit de l'équerre ☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

9 Complétez le dessin du parallélogramme ABCD représenté ci-dessous, en utilisant les instruments que vous voulez parmi les suivants : règle (graduée ou non) ; compas ; équerre ; rapporteur.
Vous indiquerez ceux dont vous vous êtes servi (cochez dans la liste). Vous laisserez les traits de construction.



règle ☐
graduation de la règle ☐
rapporteur ☐
compas ☐
angle droit de l'équerre ☐

Je ne sais pas	
Je n'ai pas eu le temps	

I.U.F.M. Lorraine - Juin 1998

Annexe 5 : Grille de codage initiale du test 1

QUESTION 1 : tracer le triangle

Q.1. P : Procédures de construction
A : tracés au compas : cercles sécants: triangle
B : tracés au compas : cercles tangents : triangle aplati
C : tracés au compas : cercles extérieurs : pas de triangle
D : tracés à la règle : ceux qui savent à priori
E : tracés à la règle : ceux qui tâtonnent
F : autres

Q.1. C : Commentaires
1 : aucun
2 : en accord avec le dessin
3 : en désaccord avec le dessin
4 : divers
α : référence à l'inégalité triangulaire

QUESTION 2 : xôy est-il droit ?

1 : on ne peut pas savoir
2 : utilisation d'instruments pour vérifier (équerre, rapporteur)
3 : utilisation de figure annexe
4 : paraphrase (droites perpendiculaires, angle de 90°)
5 : utilisation du théorème de Pythagore
6 : oui, sans justificatif
7 : non, il n'est pas droit

QUESTION 3 : construire une médiatrice

Q.3.I: Instruments
A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q.3.P : Procédures de construction
A : une intersection d'arcs de cercle
B : une intersection d'arcs de cercle + milieu
B* : une Intersection d'arcs de cercle + angle droit
C : deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment
C* : deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment
D : trois intersections d'arcs de cercle
E : milieu et angle droit
F : autre

Q.3.C: Commentaires
1 : pas de commentaire
2 : adéquation du commentaire et de la figure
3 : non adéquation du commentaire et de la figure

QUESTION 4: nature du triangle ECO

Q.4.N: Nature
A : rectangle
B : rectangle et isocèle
C : autre

Q.4.J : Justification
A : angle droit marqué sur le dessin
B : mesure des côtés
C : autre

QUESTION 5 : construire une médiatrice

Q.5.I: Instruments
A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q.5.P: Procédures de construction
A : une intersection d'arcs de cercle
B : une intersection d'arcs de cercle + milieu
B*: une intersection d'arcs de cercle + angle droit
C : deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment
C*: deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment
D : trois intersections d'arcs de cercle
E : milieu et angle droit
F : autre

Q.5.C : Commentaires
1 : pas de commentaire
2 : adéquation du commentaire et de la figure
3 : non adéquation du commentaire et de la figure

QUESTION 6: un losange

Q.6.I: Instruments
A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q. 6. 1. T: Tracé initial
A : à partir d'une diagonale
B : à partir d'un côté

Q. 6. 1. S : Support
Q : utilisation spécifique du papier quadrillé
U : utilisation, à un moment, d'une procédure papier uni (on ne code pas cette procédure)

Q.6.1.D : Dessin obtenu
E : polygone autre qu'un losange
F : carré

Q.6.2 : définition
A : quadrilatère ayant 4 côtés isométriques
B : parallélogramme ayant deux côtés consécutifs isométriques
C : parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires
D : juxtaposition de deux triangles isocèles symétriques
E : fourre-tout de propriétés
F : définition fausse
X : il est noté des propriétés qui empêchent d'obtenir un carré

QUESTION 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Q. 7. D : Dessin
O : oui
N : non

Q.7.J: Justification
A : 3 angles droits et 2 côtés isométriques
B : pas assez d'angles droits et / ou de côtés isométriques
C : manque de précision

QUESTION 8: construire une médiatrice

Q.8.1: Instruments
A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Q.8.P : procédures de tracé
A : tracé direct (joindre les points E et U)
B : tracé mixte 1 E ou U + milieu et / ou perpendiculaire
C : tracé mixte 2 E ou U + une intersection d'arcs de cercle
C* : tracé mixte 2* : E ou U + une intersection d'arcs de cercle du côté des points E et U
D : deux intersections d'arcs de cercle
E : tracé incorrect

Q. 8. T : nature du tracé
a : le segment [MN] est tracé
b : la médiatrice est une droite
C : la médiatrice est considérée comme un segment
d : la médiatrice est considérée comme une demi-droite
e : interprétation ambiguë

Q.8.C : commentaires
1 : sans commentaire
2 : équidistance des points
3 : référence au triangle isocèle
4 : divers

QUESTION 9: Parallélogramme

Q.9.P : Procédures
A côtés opposés de même longueur
B côtés opposés parallèles
C deux côtés parallèles et isométriques
D diagonales se coupant en leur milieu
E utilisation des angles (supplémentaires ou égaux)

Q.9.I: Instruments
A : règle
B : graduation de la règle
C : rapporteur
D : compas
E : angle droit de l'équerre

Brigitte NICOLAS-LORRAIN

Annexe 6 : Grille de codage du test 1, mars 2001

Formateur :
N° de la copie :
Bac :
Licence :
Suppléances : ………… Mois

Question 1 : Tracer le triangle

Q.1.P : Procédure de construction et commentaire

A. tracé au compas + cercles sécants
B. tracé au compas + cercles tangents + reconnaissance d'un triangle (éventuellement aplati, ou plat, ou …)
C. tracé au compas + cercles tangents + « ce n'est pas un triangle »
D. tracé au compas + cercles tangents + pas d'utilisation du mot triangle ou pas de commentaire du tout
E. tracé au compas + cercles extérieurs
F. tracé à la règle : ceux qui savent à priori
G. autres ou ambiguë
H. non-réponse (aucun tracé)

Q.1.C : Référence à l'égalité 13 = 8 + 5

A. référence à l'égalité 13 = 5 + 8
B. pas de référence à l'égalité 13 = 8 + 5

Q.1.I : Impossible de tracer le triangle

O. oui
N. non

Q.1.A : Les points sont alignés

O. oui
N. non

Question 2 : xôy est-il droit ?

Q.2 : Réponse et commentaires

A. on ne peut pas savoir
B. O/N + figure annexe
C. O/N + pas figure + 90° + instrument
D. O/N + pas figure + 90° + pas instrument
E. O/N + pas figure + pas 90° + instrument
F. O/N + pas figure + pas 90° + pas instrument ou pas de commentaire
G. autre ou ambiguë
H. non-réponse

Question 3 : construire une médiatrice

Q.3.I: Instruments

B. graduation de la règle
C. rapporteur
D. compas
E. angle droit de l'équerre

Q.3.P : Procédures de construction

A. une intersection d'arcs de cercle + milieu
B. une intersection d'arcs de cercle + angle droit
C. deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment
D. deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment
E. milieu et angle droit
F. autre procédure ou procédure indéterminée
G. non-réponse

Q.3.C : Commentaires

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 4 : nature du triangle ECO

Q.4.N : Nature

A. rectangle
B. rectangle et isocèle
C. autre
D. non-réponse

Q.4.JC : Justification de l'angle droit par le code du dessin

A. référence explicite au code sur le dessin
B. pas de référence explicite au code sur le dessin

Q.4.J M : Justification de l'angle droit par le mesurage de l'angle

A. référence explicite à une mesure effective de l'angle
B. pas de référence explicite à une mesure effective de l'angle

Question 5 : Construire une médiatrice

Q.5.I : Instruments

B. graduation de la règle
C. rapporteur
D. compas
E. angle droit de l'équerre

Q.5.P : Procédure

A. une intersection d'arcs de cercle + milieu
B. une intersection d'arcs de cercle + angle droit
C. deux intersections d'arcs de cercle de part et d'autre du segment
D. deux intersections d'arcs de cercle du même côté du segment
E. milieu et angle droit
F. autre procédure ou procédure indéterminée
G. non-réponse

Q.5.C : Commentaire

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 6 : un losange

Q.6.1.I : Instruments

B. graduation de la règle
C. rapporteur
D. compas
E. angle droit de l'équerre

Q.6.1.T : Tracé initial

A. à partir d'une diagonale
B. à partir d'un côté
C. pas de tracé ou pas de polygone

Q.6.1.S : Support et procédure

A. papier uni
B. papier quadrillé et utilisation spécifique du papier quadrillé
C. papier quadrillé et utilisation d'une procédure papier uni
D. pas de tracé ou pas de polygone

Q.6.1.D : Dessin obtenu

A. polygone non-losange
B. losange non-carré
C. carré
D. pas de tracé ou pas de polygone

Q.6.1.P : Posé sur la pointe

OD. Posé sur la pointe, debout
OC. Posé sur la pointe, couché
N. Pas posé sur la pointe

Q.6.2.D : Définition

A. quadrilatère ayant 4 côtés isométriques
B. parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires
C. autre définition correcte du losange
D. trop de propriétés du losange ou du parallélogramme
E. autre définition fausse
F. non-réponse

Q.6.2.C : Carré

A. il est cité quelque chose qui implique qu'un carré n'est pas un losange
B. il n'y a rien qui implique qu'un carré n'est pas un losange

Question 7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Q.7.RJ : Réponse et justification

A. oui et non
B. oui et justification exacte
C. oui et justification fausse
D. oui sans justification
E. non avec référence à des propriétés du carré
F. non avec une autre justification ou sans justification
G. autres réponses et non-réponse

Q.7.P : Précision du tracé

A. il y a une remarque explicite sur le peu de précision du tracé
B. il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

Question 8 : construire une médiatrice

Q.8.I: Instruments

B. graduation de la règle
C. rapporteur
D. compas
E. angle droit de l'équerre

Q.8.P : Procédures de tracé

A. tracé direct (joindre les points E et U)
B. tracé mixte 1 : E et/ou U+ milieu ou perpendiculaire
C. tracé mixte 2 : E et/ou U + une intersection d'arcs de cercle
D. deux intersections d'arcs de cercle
E. milieu et angle droit
F. autre procédure, correcte on non, ou procédure indéterminée
G. non-réponse

Q.8.TS : Nature du tracé du segment [MN]

A. la droite (MN) est tracée
B. le segment [MN] est tracé
C. ni l'un ni l'autre ne sont tracés

Q.8.TM : Nature du tracé de la médiatrice

A. la médiatrice est une droite
B. la médiatrice est considérée comme un segment
C. la médiatrice est considérée comme une demi-droite
D. interprétation ambiguë
E. médiatrice non tracée

Q.8.C : Commentaires

A. sans commentaire
B. référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM)
C. équidistance utilisée à bon escient des points E et/ou U (explicitement nommés) des points M et N sans référence au triangle isocèle
D. autre commentaire

Q.8.A : Adéquation

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 9 : parallélogramme

Q.9.I : Instruments

B. graduation de la règle
C. rapporteur
D. compas
E. angle droit de l'équerre

Q.9.P : Procédures

A. côtés opposés de même longueur
B. côtés opposés parallèles
C. deux côtés parallèles et isométriques
D. diagonales se coupant en leur milieu
E. autres procédures
F. non réponse

Annexe 7 : Grille de codage du test 1, mai 2001

Question 3PF : Procédure fine

A	1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B	1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1	2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon
C2	2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C4	1 intersection + angle droit + milieu
D	2 inters de cercles du même côté
E	milieu et angle droit
F	procédure indéterminée
G	non-réponse
H	retraçage du segment
I	trois intersections d'arcs de cercle

Question 3T : type de commentaire

M	milieu
A	angle droit
E	équidistance des points
I	référence au triangle isocèle
S	sans commentaire ou autre commentaire

Question 5PF : Procédure fine

A	1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B	1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1	2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon
C1B	2 intersection de cercles de rayon MN
C2	2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C3	2 intersections de cercles + milieu ou angle droit
D	2 inters de cercles du même côté
E	milieu et angle droit
F	procédure indéterminée
G	non-réponse

Question 5T : type de commentaire

M	milieu
A	angle droit
E	équidistance des points
I	référence au triangle isocèle
S	sans commentaire ou autre commentaire

Question 7G : quelle géométrie ?

1	commentaire dans G1
2	commentaire dans G2
12	G1 et G2
A	ambiguë
S	sans commentaire
E	exhaustivité

Question 8PF : procédure fine

A	direct
B1	E/U + milieu
B2	E/U + angle droit
C1	E/U + 1 inters de cercles du côté de E/U
C2	E/U + 1 inters de cercles de l'autre côté
CM	1 inters + milieu
CA	1 inters + angle droit
D1	2 inters de cercles de même rayon
D2	2 inters de cercles de rayon ≠
E	milieu et angle droit
F	autre, correcte ou non, indéterminée
G	non réponse

Question 8T : type de commentaire

S	sans commentaire
B	référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM)
C	équidistance de E et/ou U sans triangle isocèle
M	milieu
A	angle droit
E	équidistance des points
D	autre commentaire
F	bissectrice

Annexe 8 : Document d'accompagnement pour le codage

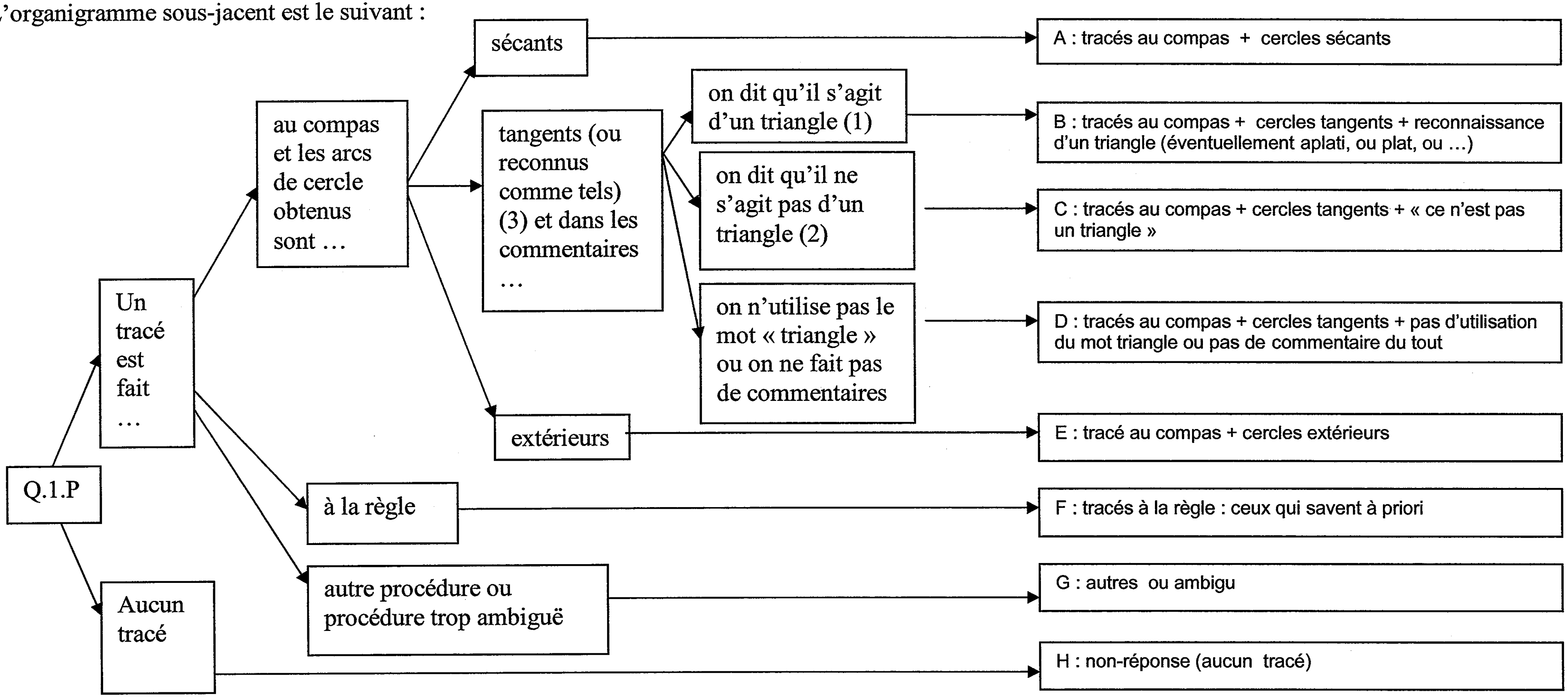
La première partie de la grille de codage est un peu complexe et les formulations volontairement succinctes pour pouvoir ensuite placer l'ensemble sur une même page de codage. Ces formulations ne sont pas prévues pour tout dire mais pour rappeler l'essentiel. Des précisions sont donc indispensables pour limiter les ambiguïtés de codage, surtout dans la perspective d'un codage par des formateurs différents. Un document d'accompagnement est donc rédigé à cet effet pour ceux qui vont coder.

Item 1 : Tracer le triangle

Q.1.P : Procédure de construction et commentaire

Le codage de cette question est disjonctif complet : il faut faire un choix unique dans les modalités proposées. Il s'agit d'une part de repérer les procédures utilisées, et d'autre part de pointer, parmi ceux qui ont tracé des cercles tangents, ceux qui ne reconnaissent pas la figure obtenue comme étant un triangle.

L'organigramme sous-jacent est le suivant :



(1) : il s'agit de toutes les réponses qui reconnaissent le triangle plat comme un triangle, même avec une remarque du type « c'est impossible, triangle plat car BC = AC + AB »

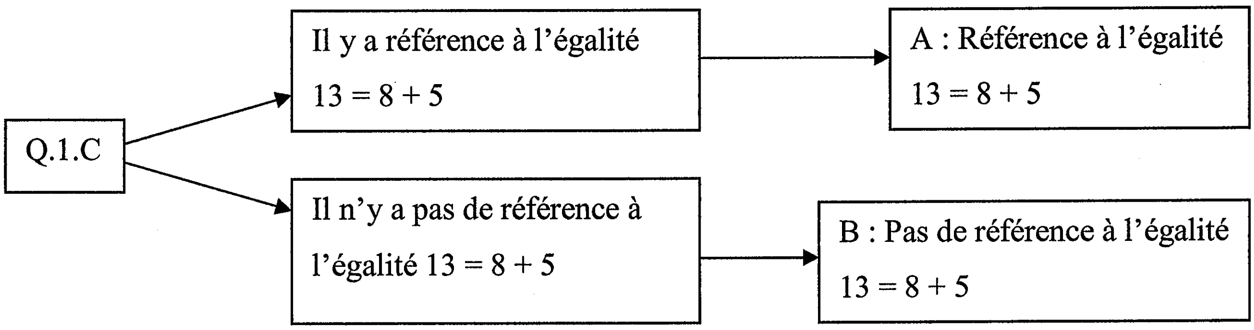
(2) : il s'agit de toutes les réponses qui ne reconnaissent pas le triangle plat comme un triangle. Cela peut prendre la forme : « A, B, C sont sur la même droite, on ne peut pas tracer le triangle » ou encore « BC doit être strictement inférieur à AC + AB ».

(3) : dans certains cas, les arcs de cercles sont en faits sécants ou disjoints mais l'étudiant conclut comme si les arcs de cercles étaient tangents, d'où le codage vers B ou C ou D

Q.1.C : Référence à l'égalité 13 = 8 + 5

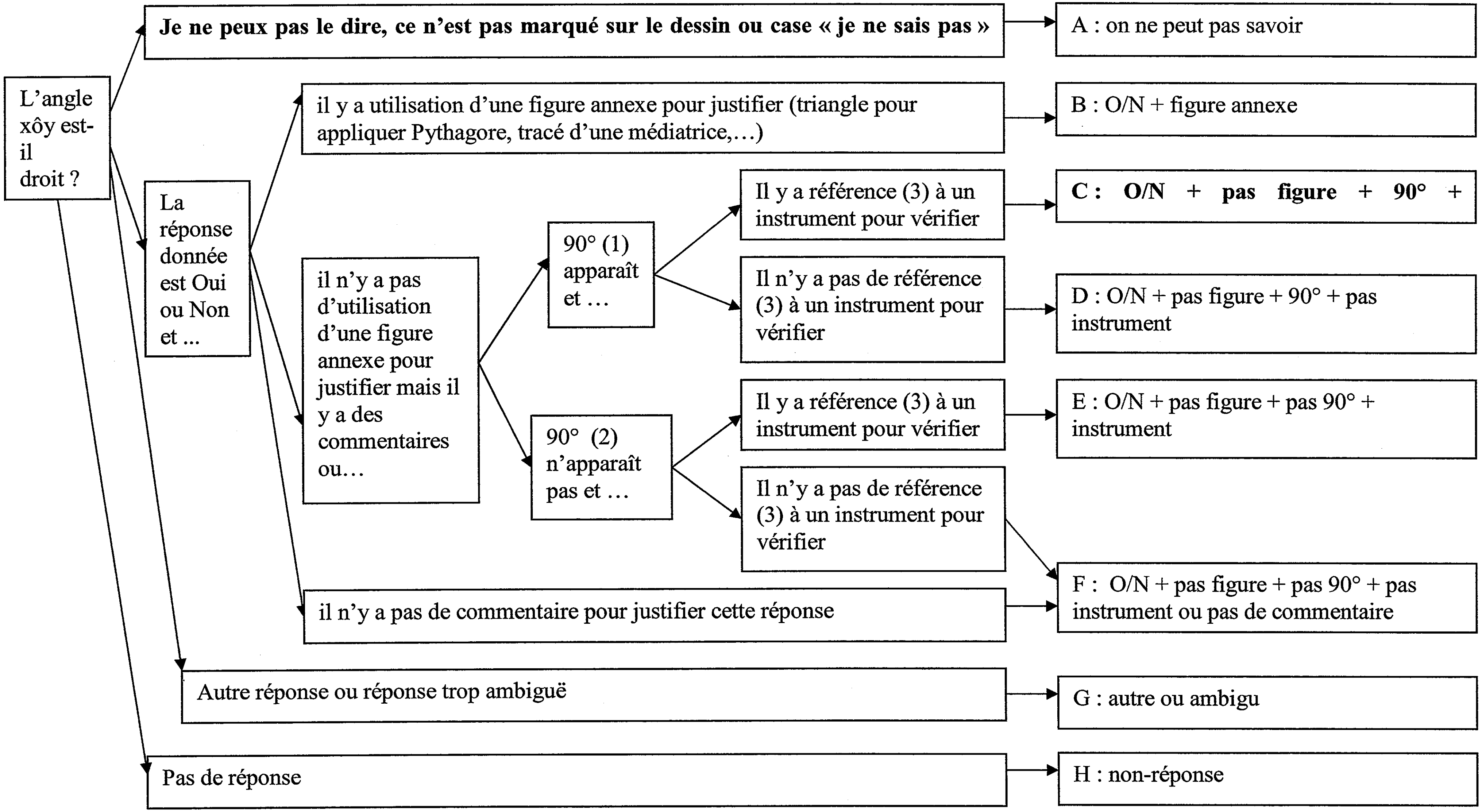
Le codage de cette question est disjonctif complet.

Il s'agit de préciser s'il y a ou non, sous une forme ou sous une autre, référence à l'égalité numérique : 13 = 8 + 5. Cette référence peut éventuellement être sans valeur numérique, comme par exemple : « AB + AC = BC ».



Comme pour la question précédente, le fait d'avoir imposé le disjonctif complet sans vouloir trop multiplier le nombre de questions a amené un codage un peu complexe qu'il est nécessaire de bien expliciter. Le document d'accompagnement comporte ainsi à nouveau un organigramme un peu volumineux …

Item 2 : xôy est-il droit ?
Le codage de cette question est disjonctif complet.



(1) Il faut qu'une valeur de mesure d'angle apparaisse explicitement. Il peut cependant s'agir de 89°, ou 91°,...

(2) : ni 89°, ni 91°, ...

(3) : Attention, la référence à un instrument doit être explicite (sauf pour les valeurs d'angles différentes de 90° pour lesquelles il y a nécessairement eu mesure). On repère ainsi les situations où l'on est sûr qu'un instrument a été utilisé, parce qu'il a été cité. Les cas où on parle de mesure sans parler d'instrument seront considérés sans référence à un instrument de mesure car on ne peut affirmer qu'il y a eu effectivement vérification. Exemples :

« En mesurant avec un rapporteur, l'angle semble droit (90°) »	Code : C
« L'angle n'est pas droit : la mesure du rapporteur indique 91 ° »	Code : C
« Quand on mesure, on a 90° » ou « l'angle est droit car il mesure 90° »	Code : D
« xôy = 90° donc xôy est un angle droit »	Code : D
« Oui, j'ai regardé avec mon équerre et il paraît droit »	Code : E

Item 3. Construire une médiatrice.

Q.3.I: Instruments

Il n'y a que les questions concernant les instruments utilisés qui ne sont pas codées en disjonctif complet. Rappelons qu'il s'agit des instruments effectivement cochés par l'étudiant.

Dans le cas où aucun des instruments cités n'est coché, barrer d'un trait la liste des instruments, pour signifier qu'il ne s'agit pas d'un oubli de codage mais bien d'une absence d'instrument coché (mis à part la règle).

Q.3.P : Procédures de construction

Le codage de cette question est disjonctif complet.

Les modalités retenues mettent en évidence les procédures les plus classiques. Dans le cas ou il y a ambiguïté sur la procédure utilisée, on s'aidera éventuellement des instruments cochés comme ayant été utilisés pour déterminer la procédure (en particulier dans le cas où trop d'éléments seraient notés sur le dessin). S'il y a cependant impossibilité de trancher sur la procédure utilisée, on utilisera le code F (procédure indéterminée).

Q.3.C : Commentaires

Le codage de cette question est disjonctif complet.

Dès qu'il y a trop de propriétés énoncées, on considèrera qu'il n'y a pas adéquation entre le commentaire et la figure. Par exemple : « la médiatrice est l'ensemble des points équidistants de M et N qui coupe le segment perpendiculairement en son milieu » est codé C.

Par contre, s'il n'y en a pas assez, il peut quand même y avoir adéquation. Par exemple, un étudiant utilise la procédure « une intersection d'arcs de cercle et angle droit » et fait comme commentaire « la médiatrice forme un angle droit avec le segment [MN] ». Ce commentaire est codé B.

Item 4 : nature du triangle ECO

Q.4.N : Nature

Le codage de cette question est disjonctif complet.

En particulier, si, en plus de « rectangle et isocèle », autre chose a été indiqué, on codera C (autres) seulement, mais on ne codera pas également B.

Par ailleurs, « deux côtés de même longueur » est considéré comme synonyme de « isocèle » et sera donc codé B (s'il est en plus dit rectangle bien sûr), même si le mot isocèle n'est pas donné. On ne cherche pas en effet à savoir s'ils connaissent ce mot, mais à savoir s'ils ont conclu que deux côtés ont même longueur.

Q.4.JC : Justification de l'angle droit par le code du dessin

Le codage de cette question est disjonctif complet. Il s'agit de repérer ceux qui font explicitement, dans leur commentaire, référence au fait qu'il y a un symbole sur la figure codant un angle droit.

Q.4.JM: Justification de l'angle droit par le mesurage de l'angle

Le codage de cette question est disjonctif complet. Il s'agit de repérer ceux qui mesurent l'angle pour répondre à la question, qu'ils aient ou non repéré le symbole d'orthogonalité, et que la conclusion en soit ou non « angle droit ». Pour la modalité A, il faut être sûr que des mesures ont été effectuées, d'où la recherche d'une référence **explicite** à un mesurage **effectif.** En l'absence de certitude, on codera B. En particulier, les paraphrases du genre « droit car l'angle vaut 90° » ne mettent pas en évidence un mesurage effectif et sont donc codées B.

Certains ne mesurent pas l'angle mais appliquent la réciproque du théorème de Pythagore en utilisant la mesure des côtés : on codera également A, dans la mesure où il s'agit bien d'une non-utilisation du symbole d'orthogonalité, remplacé par des mesures (et aussi des calculs dans le cas présent).

Item 5. Construire une médiatrice.

Le document d'accompagnement est du même type que celui de l'item 3

Item 6 : Un losange

Q.6.1.T : Tracé initial

Le codage de cette question est disjonctif complet. Il s'agit de repérer par quoi l'étudiant a commencé son dessin, à partir des deux points qui sont en couleur, afin d'identifier la procédure utilisée. Si les couleurs ne correspondent pas à la procédure visiblement utilisée, on code la procédure réellement utilisée. S'il n'y a pas de couleur ni rien d'apparent, on tient compte des instruments utilisés pour déterminer la procédure utilisée. Si le tracé n'est pas terminé, on n'a pas alors un polygone et on code C : pas de tracé ou pas de polygone.

Q.6.1.S : Support et procédure

Le codage de cette question est disjonctif complet. Cette question permet de repérer simultanément la nature du papier sur lequel le dessin a été fait, et, pour ceux qui ont eu du papier quadrillé, de savoir s'ils ont utilisé la spécificité de ce papier quadrillé ou si au contraire ils ont procédé comme si le papier était uni.

Q.6.1.D : Dessin obtenu

Le codage de cette question est disjonctif complet.

Dans certains cas, deux dessins ont été tracés : un carré et un losange non carré. On codera alors le losange non carré : B.

Q.6.2.D : Définition

Le codage de cette question est disjonctif complet.

Pour la modalité B, on inclut toutes les réponses donnant une définition exacte du parallélogramme à la place du mot parallélogramme. Exemple : quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

La modalité D regroupe toutes les propositions présentant des propriétés redondantes, mais néanmoins exactes. Exemple : « quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, et dont les 4 côtés sont de même longueur ». Le surplus de propriétés peut éventuellement ne concerner que la partie qui définit le parallélogramme. Ainsi « le losange est un parallélogramme dont les côtés sont parallèles 2 par 2 et égaux en mesure : AD = BC = AB = DC » sera codé D.

La modalité E regroupera donc les définitions incomplètes ou possédant des propriétés fausses, notamment celles qui font qu'un carré n'est pas un losange.

La modalité E est prioritaire sur la modalité D, c'est-à-dire que s'il y a des propriétés redondantes et des propriétés fausses, ou s'il manque quelque chose, on considère la réponse comme « autre définition fausse ». Exemple : « un losange est une figure géométrique dont les côtés opposés sont parallèles, dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu, dont les côtés ont même longueur. Elle a deux axes de symétrie » est codé E car il n'est pas précisé qu'il s'agit d'un quadrilatère.

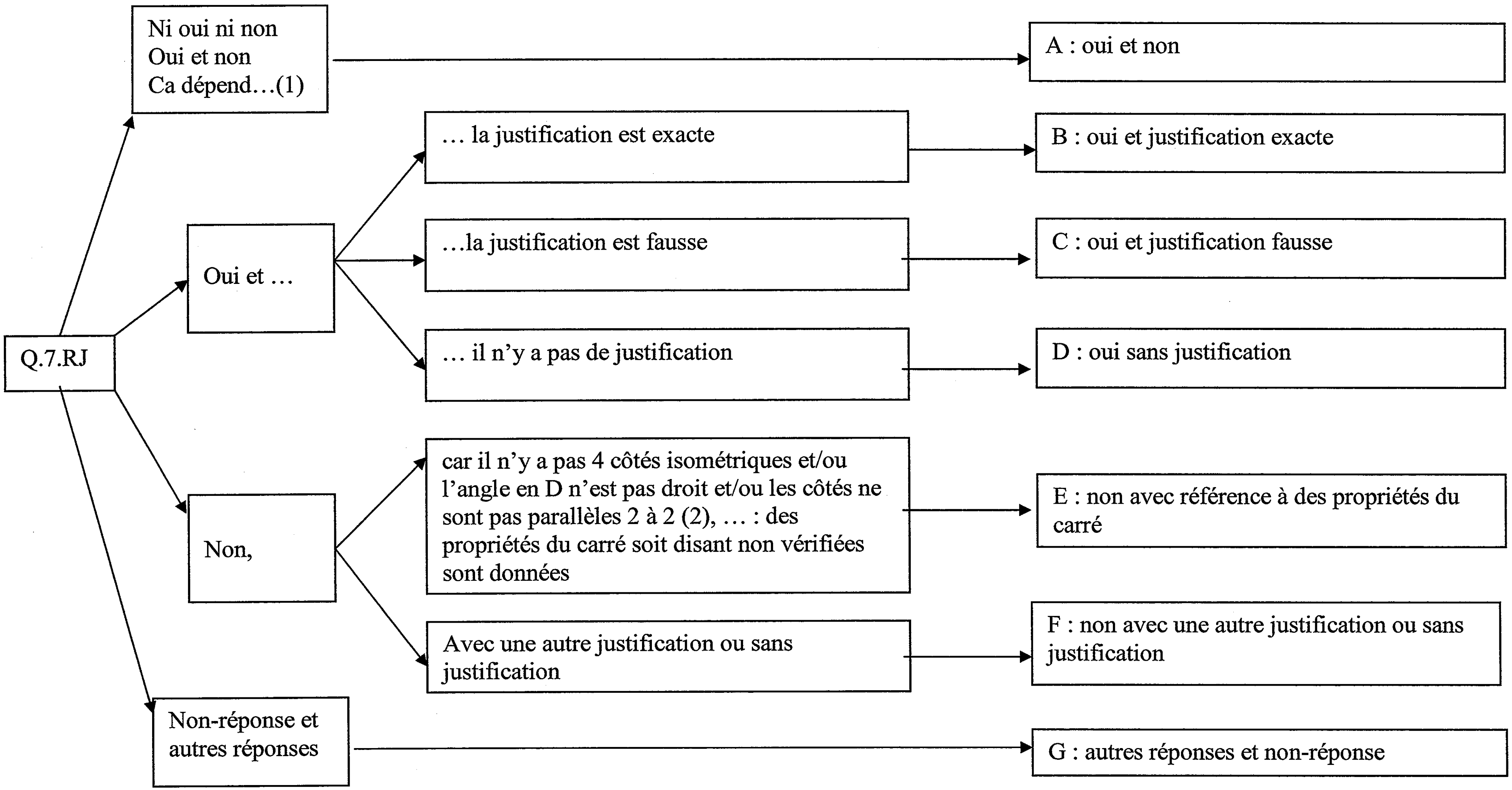
Q.6.2.C : Carré

Le codage de cette question est disjonctif complet. Il s'agit de repérer s'il y a quelque part une information qui permet d'affirmer que pour l'étudiant, un carré n'est pas un losange. Cela peut apparaître explicitement dans la définition (« le carré n'est pas un losange »), où implicitement dans la liste des propriétés données (« les diagonales ne sont pas de la même longueur »).

Item 7. Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

Q.7.RJ : Réponse et justification

Le codage de cette question est disjonctif complet. Il prend en compte à la fois la réponse elle-même et sa justification.



(1) : il s'agit de toutes les productions d'étudiants où il y a successivement les deux réponses, sans que l'étudiant en choisisse une.

(2) : il s'agit ici de toutes les réponses qui font intervenir des propriétés mathématiques du carré. On rencontre généralement trois types d'arguments, portant sur :

- la longueur des côtés. Par exemple, « les quatre côtés ne sont pas isométriques », ou « tel et tel segments ne sont pas de la même longueur », ...
- les angles. Par exemple, « l'angle en D n'est pas droit », ou « les quatre angles ne sont pas droits », ou encore « tel segment n'est pas perpendiculaire à tel autre »,...
- le parallélisme des côtés. Par exemple, « les quatre segments ne sont pas parallèles 2 à 2 », ou « tel et tel segments ne sont pas parallèles »,...

Ces trois types d'arguments peuvent apparaître seuls ou à 2 (plus rarement à 3).

Q.7.P : Précision du tracé

Le codage de cette question est disjonctif complet.

A. il y a une remarque explicite sur le peu de précision du tracé

B. il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

Par exemple, « les segments ne sont pas tracés à la règle » est considéré comme une remarque explicite sur le peu de précision du tracé.

Item 8. Construire une médiatrice.

Le document d'accompagnement reprend la grille de codage sans autre commentaire.

Item 9. Construire une médiatrice.

Idem item 8.

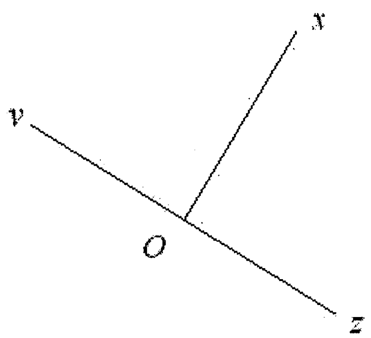
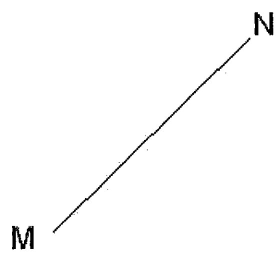
Annexe 9 : Test 2

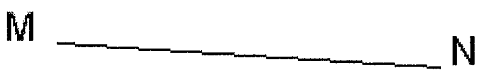
Groupe : Baccalauréat : Licence :

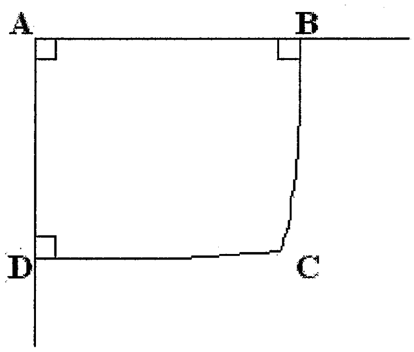
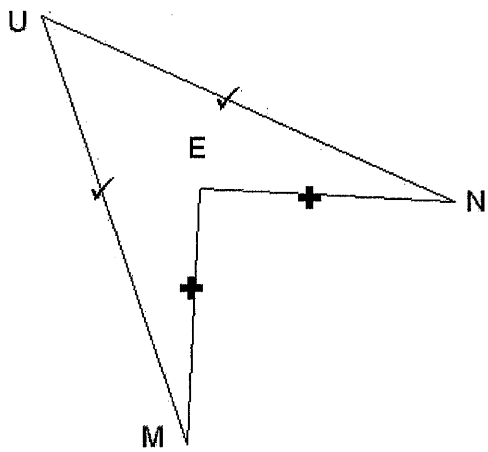
Il est vivement recommandé :

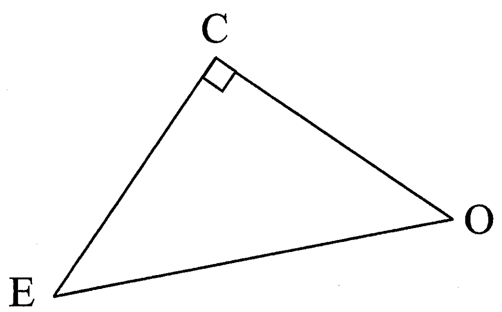
- *De laisser les traits de construction*
- *De n'inscrire de signe d'une propriété que si elle est utilisée pour la construction. Exemple : si on vous demande de tracer un triangle équilatéral et que vous le tracez au compas en utilisant la propriété que les côtés sont de même longueur, alors vous pouvez noter un symbole qui indique que les côtés sont de même mesure, mais vous n'indiquez pas que les angles sont égaux, bien que cette propriété soit vraie, puisque vous ne l'avez pas utilisée pour la construction.*
- *Ne pas modifier les réponses à une question après avoir répondu à une autre question*

On vous demande parfois d'indiquer quels instruments vous avez utilisés. Soyez vigilants sur l'utilisation de la règle, de la règle graduée ou de l'angle droit de l'équerre : une règle sert à tracer des droites (ou des segments,...), une règle graduée permet de mesurer un segment, pour reporter une longueur ou comparer des distances, l'angle droit de l'équerre permet seul de tracer des angles droits.

1	Que pouvez-vous dire de l'angle $x\hat{O}y$? Justifiez votre réponse. 
2.1	Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez. Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.  Règle ☐ Graduation de la règle ☐ Rapporteur ☐ Compas ☐ Angle droit de l'équerre ☐

2.2	Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 2.1. (Vous pouvez tourner la page pour regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)
3	Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. Que pouvez-vous dire de ABC ?
4.1	Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez. Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.  Règle ☐ Graduation de la règle ☐ Rapporteur ☐ Compas ☐ Angle droit de l'équerre ☐

4.2	Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 4.1. (Vous pouvez tourner la page pour regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)
5	 Le quadrilatère ABCD a-t-il 4 angles droits ? Comment le savez-vous ?
6.1	Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez. Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.  Règle ☐ Graduation de la règle ☐ Rapporteur ☐ Compas ☐ Angle droit de l'équerre ☐

6.2	Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 6.1. (Vous pouvez tourner la page pour regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)
7	Quelle est la nature du triangle ECO ? Justifiez. 
8.1	Construisez un carré ABCD de côté 5 cm. Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm. Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?
8.2	Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?

Annexe 10 : Grille de codage du test 2

N° de la copie :

Bac :

Licence

Question 1 : xôy est-il droit ?

Q1 : Réponse et commentaires

A. on ne peut pas savoir
B. O/N + figure annexe
C. O/N + pas figure + 90° + instrument
D. O/N + pas figure + 90° + pas instrument
E. O/N + pas figure + pas 90° + instrument
F. O/N + pas figure + pas 90° + pas instrument ou pas de commentaire
G. autre ou ambiguë
H. non-réponse

Question 2 : Médiatrice sans contrainte

Q2P : Procédure

A 1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B 1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1 2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon ≠ MN
C1B 2 intersection de cercles de rayon MN
C2 2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C3 2 intersections de cercles + milieu ou angle droit
D 2 inters de cercles du même côté
E milieu et angle droit
F procédure indéterminée
G non-réponse

Q2CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

M milieu
A angle droit
E équidistance des points
I référence au triangle isocèle
S sans commentaire ou autre commentaire

Q2A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 3 : Construire un triangle

Q3.P : Procédure de construction et commentaire

A. tracé au compas + cercles sécants
B. tracé au compas + cercles tangents + reconnaissance d'un triangle (éventuellement aplati, ou plat, ou …)
C. tracé au compas + cercles tangents + « ce n'est pas un triangle »
D. tracé au compas + cercles tangents + pas d'utilisation du mot triangle ou pas de commentaire du tout
E. tracé au compas + cercles extérieurs
F. tracé à la règle : ceux qui savent à priori
G. autres ou ambiguë
H. non-réponse (aucun tracé)

Q3C : Référence à l'égalité 13 = 8 + 5

A. référence à l'égalité 13 = 5 + 8
B. pas de référence à l'égalité 13 = 8 + 5

Q3I : Impossible de tracer le triangle

O. oui
N. non

Q3A : Les points sont alignés

O. oui
N. non

Question 4 : Médiatrice en bas de page

Q4P : Procédure

A 1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B 1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1 2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon
C2 2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C4 1 intersection + angle droit + milieu
D 2 inters de cercles du même côté
E milieu et angle droit
F procédure indéterminée
G non-réponse
H retraçage du segment
I trois intersections d'arcs de cercle

Q4CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

M milieu
A angle droit
E équidistance des points
I référence au triangle isocèle
S sans commentaire ou autre commentaire

Q4A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 5 : 4 angles droits ?

Q5G : quelle géométrie ?

G1 commentaire dans G1
G2 commentaire dans G2
12 G1 et G2
A ambigu
S sans commentaire
E exhaustivité

Q5RJ : Réponse et justification

A. oui et non
B. oui et justification exacte
C. oui et justification fausse
D. oui sans justification
E. non + angle non marqué
E2 non + angle mesuré
F1 non + tracé non droit
F2 non + autre commentaire
F3 non sans commentaires
G autre réponse et non-réponse

Q5P : Précision du tracé

A. remarque explicite sur le peu de précision
B. il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

Question 6 : Médiatrice et triangles isocèles

Q6P : procédure

A direct
B1 E/U + milieu
B2 E/U + angle droit
C1 E/U + 1 inters de cercles du côté de E/U
C2 E/U + 1 inters de cercles de l'autre côté
CM 1 inters + milieu
CA 1 inters + angle droit
D1 2 inters de cercles de même rayon
D2 2 inters de cercles de rayon ≠
E milieu et angle droit
F autre, correcte ou non, indéterminée
G non réponse

Q6CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

S sans commentaire
B référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM)
C équidistance de E et/ou U sans triangle isocèle
M milieu
A angle droit
E équidistance des points
D autre commentaire
F bissectrice

Q6A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation commentaire et figure

Question 7 : nature du triangle ECO

Q7N : Nature

A. rectangle
B. rectangle et isocèle
C. autre
D. non-réponse

Q7JC : Justification de l'angle droit par le code du dessin

A. référence explicite au code sur le dessin
B. pas de référence explicite au code

***Q7J M : Justification de l'angle droit par** le mesurage de l'angle*

A. référence explicite mesure effective angle
B. pas de référence explicite à une mesure effective de l'angle

Question 8 : Carré et Thalès

Q8P : Les droites sont :

A. parallèles +cite Thalès + ne démontre pas
B. parallèles + Thalès + calculs approchés
C. parallèles + cite Thalès + mesure des longueurs ou des angles, explicite ou non
F parallèles – Thalès+ mesure
G parallèles – Thalès + ça se voit
H non parallèles et figure fausse
I non parallèle et figure exacte
J autre commentaire (sans parallélisme)
K sans commentaire ni construction
L sans commentaire mais construction

Q8G : quelle géométrie ?

G1 commentaire dans G1
G2 commentaire dans G2
12 G1 et G2
A ambiguë
S sans commentaire

Annexe 11 : Test 3

Groupe : Baccalauréat : Licence :

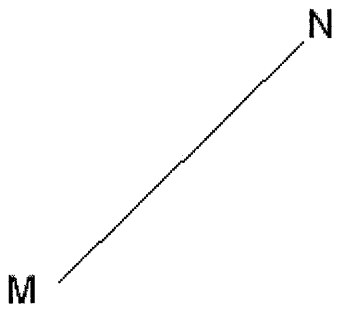
Il est vivement recommandé :

- *De laisser les traits de construction*
- *Ne pas modifier les réponses à une question après avoir répondu à une autre question*

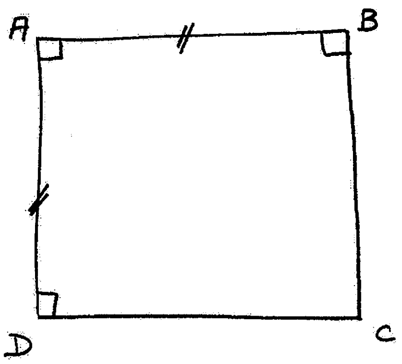
On vous demande parfois d'indiquer quels instruments vous avez utilisés. Soyez vigilants sur l'utilisation de la règle, de la règle graduée ou de l'angle droit de l'équerre : une règle sert à tracer des droites (ou des segments,...), une règle graduée permet de mesurer un segment, pour reporter une longueur ou comparer des distances, l'angle droit de l'équerre permet seul de tracer des angles droits.

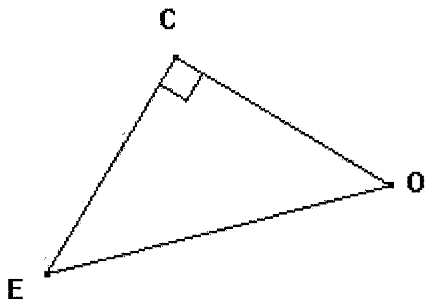
<table>
<tr><td>1.1</td><td>Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.

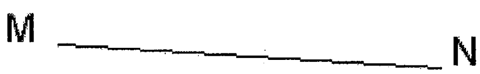


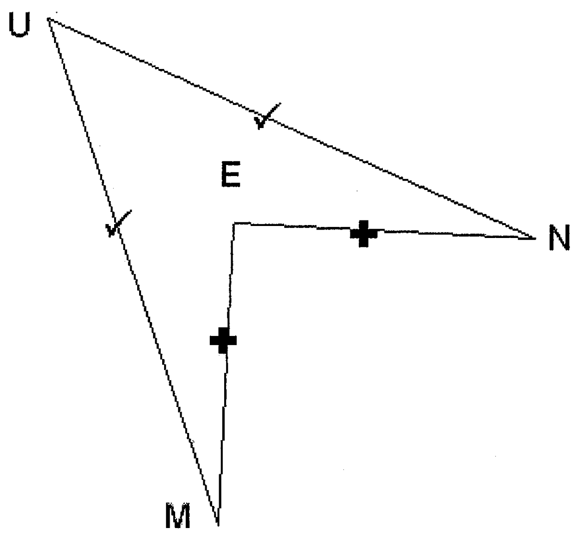
Règle ☐
Graduation de la règle ☐
Rapporteur ☐
Compas ☐
Angle droit de l'équerre ☐</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 1.1. (Vous pouvez regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)</td></tr>
</table>

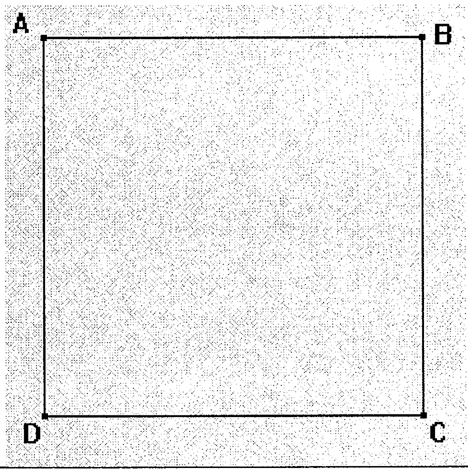
<table>
<tr><td>2</td><td>

Que pouvez-vous dire du quadrilatère ABCD ? Comment le savez-vous ? Expliquez en détail.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>

Quelle est la nature du triangle ECO ? Justifiez</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Construisez la médiatrice du segment [MN].
Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.
Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.

Règle ☐
Graduation de la règle ☐
Rapporteur ☐
Compas ☐
Angle droit de l’équerre ☐

</td></tr>
</table>

4.2	Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 4.1. (Vous pouvez tourner la page pour regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)
5.1	Construisez la médiatrice du segment [MN]. Précisez quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez. Indiquez les instruments que vous avez effectivement utilisés pour le tracé.  Règle ☐ Graduation de la règle ☐ Rapporteur ☐ Compas ☐ Angle droit de l'équerre ☐
5.2	Indiquez les étapes de votre construction de la médiatrice en 5.1. (Vous pouvez regarder comment vous avez fait, mais vous ne devez pas modifier ce que vous avez dessiné ou écrit)

6	Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm, BC = 6 cm, AC = 4,5 cm. Que peut-on dire du triangle ABC ? Comment le savez-vous ?
7.1	ABCD est un carré de côté 5 cm. Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3cm. Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ? 
7.2	Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?

Annexe 12 : Grille de codage du test 3

N° de la copie :

Bac :

Licence

Question 1 : Médiatrice sans contrainte

Q1P : Procédure

A 1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B 1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1 2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon ≠ MN
C1B 2 intersection de cercles de rayon MN
C2 2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C3 2 intersections de cercles + milieu ou angle droit
D 2 inters de cercles du même côté
E milieu et angle droit
F procédure indéterminée ou autre p
G non-réponse

Q1CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

M milieu
A angle droit
E équidistance des points
I référence au triangle isocèle
S sans commentaire ou autre commentaire

Q1A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 2 : Nature du quadrilatère ABCD

Q2G : quelle géométrie ?

G1 commentaire dans G1
G2 commentaire dans G2
12 G1 et G2
A ambigu
S sans commentaire
E exhaustivité

Q2RJ : Réponse et justification

A. carré et justification exacte
B. carré et justification fausse
C. carré sans justification
D. non carré
E autre réponse et non-réponse
F carré et non carré

Q2P : Précision du tracé

A. remarque explicite sur le peu de précision
B. il n'y a pas de remarque explicite sur le peu de précision du tracé

Question 3 : nature du triangle ECO

Q3N : Nature

A. rectangle
B. rectangle et isocèle
C. autre
D. non-réponse

Q3JC : Justification de l'angle droit par le code du dessin

A. référence explicite au code sur le dessin
B. pas de référence explicite au code

Q3J M : Justification de l'angle droit par le mesurage de l'angle

A. référence explicite mesure effective angle
B. pas de référence explicite à une mesure effective de l'angle

Question 4 : Médiatrice en bas de page

Q4P : Procédure

A 1 intersection d'arcs de cercle + milieu
B 1 intersection d'arcs de cercle + angle droit
C1 2 inters de cercles de part et d'autre de même rayon
C2 2 inters de cercles de part et d'autre de rayons ≠
C4 1 intersection + angle droit + milieu
D 2 inters de cercles du même côté
E milieu et angle droit
F procédure indéterminée
G non-réponse
H retraçage du segment
I trois intersections d'arcs de cercle

Q4CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

M milieu
A angle droit
E équidistance des points
I référence au triangle isocèle ou équilatéral
S sans commentaire ou autre commentaire

Q4A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation du commentaire et de la figure

Question 5 : Médiatrice et triangles isocèles

Q5P : procédure

A direct
B1 E/U + milieu
B2 E/U + angle droit
C1 E/U + 1 inters de cercles du côté de E/U
C2 E/U + 1 inters de cercles de l'autre côté
CM 1 inters + milieu
CA 1 inters + angle droit
D1 2 inters de cercles de même rayon
D2 2 inters de cercles de rayon ≠
E milieu et angle droit
F autre, correcte ou non, indéterminée
G non réponse

Q5CM : Commentaire sur les propriétés de la médiatrice citées

S sans commentaire
B référence au triangle isocèle (NUM et/ou NEM)
C équidistance de E et/ou U sans triangle isocèle
M milieu
A angle droit
E équidistance des points
D autre commentaire
F bissectrice

Q5A : adéquation du commentaire avec la procédure

A. pas de commentaire
B. adéquation du commentaire et de la figure
C. non-adéquation commentaire et figure

Question 6 : nature du triangle ABC

Q6T : Tracé

A. correct
B. incorrect
C. non-tracé

Q6N : Nature

A. rectangle
B. autre
C. non-réponse

Q6J : Justification de l'angle droit

A. Équerre
B. Pythagore
C. Équerre et Pythagore
D. Autre ou non réponse
I. Cercle circonscrit diamètre=hypoténuse

Question 7 : Carré et Thalès

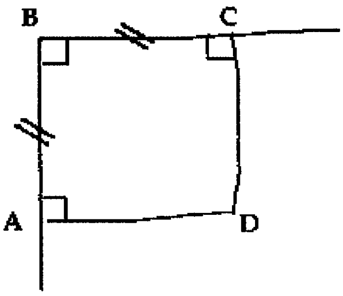
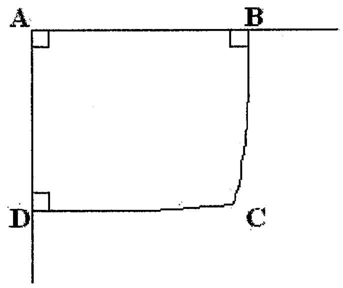
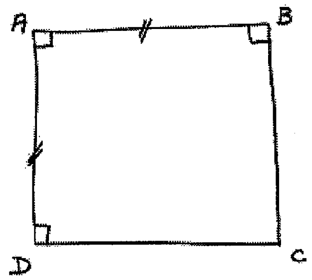
Q7P : Les droites sont :

A. parallèles +cite Thalès + ne démontre pas
B. parallèles + Thalès + calculs approchés
C. parallèles + cite Thalès + mesure des longueurs ou des angles, explicite ou non
F parallèles – Thalès+ mesure
G parallèles – Thalès + ça se voit ou rien du tout
H non parallèles et figure fausse ou raison. faux
I non parallèle et figure exacte
J autre commentaire (sans parallélisme)
K sans commentaire ni construction
L sans commentaire mais construction
M parallèles et non parallèles
N ne conclue pas

Q7G : quelle géométrie ?

G1 commentaire dans G1
G2 commentaire dans G2
12 G1 et G2
A ambiguë
S sans commentaire

Annexe 13 : Tableau récapitulatif des trois versions du test

<table>
<tr><th>Questionnaire initial</th><th>Questionnaire septembre 2001</th><th>Questionnaire septembre 2002</th></tr>
<tr><td>Q1 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que :
AB = 5 cm ; BC = 13 cm ;
AC = 8 cm.
Que remarquez-vous ?</td><td>Q3 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que :
AB = 5 cm ; BC = 13 cm ;
AC = 8 cm.
Que pouvez-vous dire de ABC ?</td><td>Q6 : Construisez avec soin un triangle ABC tel que : AB = 7,5 cm, BC = 6 cm,
AC = 4,5 cm.
Que peut-on dire du triangle ABC ? Comment le savez-vous ?</td></tr>
<tr><td>Q2 : L'angle $x\hat{O}y$ est-il droit ?
Justifiez votre réponse.</td><td>Q1 : Que pouvez-vous dire de l'angle $x\hat{O}y$?
Justifiez votre réponse.</td><td>supprimé</td></tr>
<tr><td>Q3 : médiatrice en bas de page</td><td>Q4 : médiatrice en bas de page</td><td>Q4 : médiatrice en bas de page</td></tr>
<tr><td>Q4 : Quelle est la nature du triangle ECO ?
Comment le savez-vous ?</td><td>Q7 : Quelle est la nature du triangle ECO ?
Justifiez</td><td>Q3 : Quelle est la nature du triangle ECO ?
Justifiez</td></tr>
<tr><td>Q5 : médiatrice sans contrainte</td><td>Q2 : médiatrice sans contrainte</td><td>Q1 : médiatrice sans contrainte</td></tr>
<tr><td>Q6 : losange</td><td>supprimé</td><td>supprimé</td></tr>
<tr><td>Q7 : le quadrilatère ABCD est-il un carré ? Justifiez.
</td><td>Q5 : ABCD a-t-il 4 angles droits ?
</td><td>Q2 : Que pouvez-vous dire du quadrilatère ABCD ? Comment le savez-vous ? Expliquez en détail.
</td></tr>
<tr><td>Q8 : médiatrice et triangles isocèles</td><td>Q6 : médiatrice et triangles isocèles</td><td>Q5 : médiatrice et triangles isocèles</td></tr>
<tr><td>Q9 : parallélogramme</td><td>supprimé</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Q8 : carré et Thalès</td><td>Q7 : carré et Thalès</td></tr>
</table>

Annexe 14 : Les hypothèses de recherche au sujet des tests

HR1 : Certains PE1 ne font pas de différence entre les statuts des dessins géométriques : objets de la géométrie (G1) ou représentants d'un objet géométrique théorique (G2) ni entre les validations de type perceptif (G1) ou de type hypothético-déductif (G2) qu'ils utilisent. Ils fonctionnent tantôt dans G1, tantôt dans G2, tantôt dans un pseudo-paradigme personnel qui relève de G1 et de G2, sans en avoir conscience.

HR2 : Les paradigmes géométriques tels qu'ils ont été précédemment définis, et tout particulièrement G1 et G2, sont un outil pertinent pour analyser l'activité des PE1 en géométrie plane.

hr 1 : Les étudiants ayant une formation scientifique travaillent spontanément dans G2, les étudiants avec une autre formation travaillent spontanément dans G1.

hr 2 : Les étudiants ayant une expérience d'enseignement dans l'élémentaire travaillent plus spontanément dans G1.

hr 3 : La majorité des PE1 ne se pose pas la question de l'existence du triangle « 5 – 8 – 13 »

hr 4 : Certains PE1 tracent un triangle non aplati pour le triangle « 5 – 8 – 13 »

hr 5 : Certains PE1 ne considèrent pas trois points alignés comme constituant un triangle

hr 6 .1: Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G1

hr 6 .2 : Dans une tâche ambiguë entre G1 et G2, certains PE1 se placent dans G2

hr 7 : Certains PE1 se placent inconsciemment dans G1 tout en croyant travailler dans G2

hr 8 : Certains PE1 peuvent, dans une même question, utiliser des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.

hr 9 : Certains PE1 utilisent la règle d'exhaustivité en géométrie plane

hr 10 : Certains PE1 manquent de connaissances en géométrie plane.

hr 11 : Certains PE1 ne maîtrisent pas les règles usuelles de codage des dessins en géométrie plane.

hr 12 : certains PE1 disposent de procédures de tracé très routinisées et peu adaptables

hr 13 : certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes

hr 14 : il y a un lien entre les procédures utilisées dans une situation et celles utilisées dans une autre

hr 15 : certains PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux

hr 16 : certains PE1, même sur papier uni, tracent le losange sur la pointe.

hr 17 : certains PE1 considèrent qu'un carré n'est pas un losange.

hr 18 : les définitions proposées par certains PE1 sont redondantes, d'autres sont incomplètes.

hr 19 : des profils d'étudiants, utilisant des procédures de même type, apparaissent dans la population.

hr 20 : l'ordre des questions influence la procédure utilisée par l'étudiant.

hr 21 : la formulation de la question influence la réponse de l'étudiant.

hr 22 : un dessin à main levée favorise un travail dans G2

Annexe 15 : Les réponses aux hypothèses de recherche

r1 : dans les items 3, 5 et 8, les étudiants ayant une formation scientifique travaillent souvent dans G2, les étudiants avec une formation littéraire travaillent souvent dans G1.

r 3 : La majorité des PE1 ne se pose pas la question de l'existence du triangle dans l'item 1.

r 4 : 17 % des étudiants tracent un triangle aplati dans l'item 1.

r 5 : dans l'item 1, 28 % des PE1 indique de manière explicite qu'il est impossible de tracer un tel triangle.

r 6.1 : dans la situation de l'item 2, ambiguë entre G1 et G2, seulement 3% des PE1 se placent dans G2 pour répondre.

r 6.2 : dans la situation de l'item 7, ambiguë entre G1 et G2, 43 % des étudiants se placent dans G1, 51 % dans G2 pour répondre.

r 6.3 : 16 % d'étudiants se situent dans G2 à l'item « Carré et Thalès ».

r 6.4 : 28 % d'étudiants se situent dans G1 à l'item « Carré et Thalès ».

r 7.1 : 18% des PE1 dans la situation de l'item 2 se placent dans G1 en pensant travailler dans G2.

r 7.2 : Dans la situation de l'item « carré et Thalès », 14 % des PE1 utilisent se situent en partie dans G1 en pensant se situer dans G2.

r 7.3 : Dans la situation de l'item « tracer un triangle rectangle », 20 % des étudiants se placent en fait dans G1 tout en croyant travailler dans G2.

r 8.1 : 18% des PE1 utilisent dans la situation de l'item 2 des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2.

r 8.2 : 77 % des PE1 utilisent dans la situation de l'item 4 des arguments liés à une vérification sur le dessin, relevant de G1 et d'autres issus du codage, relevant de G1 ou de G2.

r 8.3 : Dans la situation de l'item « carré et Thalès », 14 % des PE1 utilisent des arguments relevant de G1 et d'autres relevant de G2

r 8.4 : dans la situation de l'item « tracer un triangle rectangle », 9,5 % des étudiants utilisent des arguments qui relèvent de G1 et d'autres qui relèvent de G2.

r 9 : dans la situation de l'item 7, 20 % des étudiants semblent utiliser la règle d'exhaustivité.

r 10 : l'item « carré et Thalès » montre qu'une partie non négligeable des PE1 manque de connaissances et de compétences en géométrie plane

r 11 : la majorité des PE1 maîtrisent les symboles de codage d'un angle droit et de deux côtés isométriques. (seule hypothèse infirmée)

r 12 : certains PE1 disposent de procédures de tracé de médiatrice très automatisées et peu adaptables

r 13 : certains PE1 effectuent des changements de procédures pour le tracé de médiatrices en fonction des contraintes.

r 14 : il y a un lien entre certaines procédures utilisées dans une situation de tracé de médiatrice et celles utilisées dans une autre.

r 15.1 : dans la situation de la médiatrice en bas de page, environ 40 % des PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux.

r 15.2 : au sujet du losange, certains PE1 disposent d'une part de techniques de tracé (dans G1) et d'autre part de définitions ou de propriétés (dans G2) mais n'établissent pas de lien entre les deux.

r 16.1 : sur papier uni, 75 % des PE1 « posent le losange sur la pointe ».

r 16.2 : sur papier quadrillé, 94 % des PE1 placent le losange sur la pointe.

r 17 : 9 % des PE1 considèrent que le carré n'est pas un losange.

r 18 : près de la moitié des PE1 proposent une définition du losange redondante.

r 19 : Il n'est pas possible de mettre en évidence des profils d'étudiants, répondant de manière semblable à la série d'items 1, 2, 4 et 7.

r 22.1 : un dessin à main levée invite les étudiants à travailler dans G2

r 22.2 : la nature « bâtarde » d'un dessin incite certains étudiants à travailler dans G1

r 23 : la formulation de la question peut influencer la réponse de l'étudiant.

Annexe 16 : Extraits du fichier de résultat de l'AFCM sur l'item 1 seul

VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION .. 2.5000

SOMME DES VALEURS PROPRES 2.5000

HISTOGRAMME DES 10 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT.	POURCENT. CUMULE	
1	0.4739	18.95	18.95	**
2	0.3975	15.90	34.85	***
3	0.2949	11.80	46.65	**
4	0.2500	10.00	56.65	***
5	0.2500	10.00	66.65	***
6	0.2500	10.00	76.65	***
7	0.2500	10.00	86.65	***
8	0.1817	7.27	93.91	*******************************
9	0.1015	4.06	97.98	*****************
10	0.0506	2.02	100.00	*********

COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES MODALITES ACTIVES

AXES 1 A 5

MODALITES			COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
IDEN - LIBELLE	P.REL	DISTO	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1 . Q1P																	
AA_1 - C3=A	4.30	4.81	-0.66	-1.48	-0.34	-0.41	0.74	4.0	23.6	1.7	2.8	9.4	0.09	0.45	0.02	0.03	0.11
AA_2 - C3=B	6.63	2.77	-0.53	0.01	0.83	0.05	-0.80	3.9	0.0	15.3	0.1	16.9	0.10	0.00	0.25	0.00	0.23
AA_3 - C3=C	4.70	4.32	1.46	0.50	-0.24	-0.77	0.63	21.2	3.0	1.0	11.3	7.5	0.50	0.06	0.01	0.14	0.09
AA_4 - C3=D	5.01	3.99	-0.74	1.19	-0.83	0.33	0.15	5.7	17.9	11.7	2.2	0.4	0.14	0.36	0.17	0.03	0.01
AA_5 - C3=E	1.14	20.95	1.56	-1.02	-1.61	0.34	-3.47	5.9	3.0	10.0	0.5	54.8	0.12	0.05	0.12	0.01	0.57
AA_6 - C3=F	1.82	12.72	0.04	0.09	1.69	-0.87	0.28	0.0	0.0	17.6	5.5	0.6	0.00	0.00	0.22	0.06	0.01
AA_7 - C3=G	0.71	34.12	0.69	-1.30	-1.08	1.56	1.61	0.7	3.0	2.8	6.9	7.4	0.01	0.05	0.03	0.07	0.08
AA_8 - C3=H	0.68	35.58	1.22	-0.21	1.17	5.09	1.04	2.2	0.1	3.2	70.8	3.0	0.04	0.00	0.04	0.73	0.03
			CONTRIBUTION CUMULEE =					43.6	50.6	63.2	100.0	100.0					
2 . Q1C																	
AB_1 - C4=A	8.63	1.90	0.56	0.43	0.83	0.00	0.00	5.7	4.0	19.9	0.0	0.0	0.16	0.10	0.36	0.00	0.00
AB_2 - C4=B	16.37	0.53	-0.29	-0.22	-0.43	0.00	0.00	3.0	2.1	10.5	0.0	0.0	0.16	0.10	0.36	0.00	0.00
			CONTRIBUTION CUMULEE =					8.7	6.0	30.4	0.0	0.0					
3 . Q1I																	
AC_1 - C5=N	18.05	0.38	-0.57	-0.03	0.12	0.00	0.00	12.4	0.0	0.9	0.0	0.0	0.85	0.00	0.04	0.00	0.00
AC_2 - C5=O	6.95	2.60	1.49	0.08	-0.31	0.00	0.00	32.3	0.1	2.3	0.0	0.0	0.85	0.00	0.04	0.00	0.00
			CONTRIBUTION CUMULEE =					44.8	0.2	3.1	0.0	0.0					
4 . Q1A																	
AD_1 - C6=N	14.98	0.67	0.19	-0.68	0.16	0.00	0.00	1.2	17.3	1.3	0.0	0.0	0.06	0.69	0.04	0.00	0.00
AD_2 - C6=O	10.02	1.49	-0.29	1.01	-0.24	0.00	0.00	1.8	25.9	2.0	0.0	0.0	0.06	0.69	0.04	0.00	0.00
			CONTRIBUTION CUMULEE =					2.9	43.3	3.3	0.0	0.0					

Annexe 17 : Tableau croisé sur test 1 : Q7RJ x Q7P

TABLEAU 1 EN LIGNE : Q7RJ POIDS TOTAL : 878.

EN COLONNE : Q7P

POIDS / % COLONNE / % LIGNE	C3=A	C3=B	ENSEMBLE
C2=A	34 13.23 97.14	1 0.16 2.86	35 3.99 100.00
C2=B	28 10.89 7.76	333 53.62 92.24	361 41.12 100.00
C2=C	6 2.33 7.41	75 12.08 92.59	81 9.23 100.00
C2=D	3 1.17 42.86	4 0.64 57.14	7 0.80 100.00
C2=E	93 36.19 33.45	185 29.79 66.55	278 31.66 100.00
C2=F	92 35.80 94.85	5 0.81 5.15	97 11.05 100.00
C2=G	1 0.39 5.26	18 2.90 94.74	19 2.16 100.00
ENSEMBLE	257 100.00 29.27	621 100.00 70.73	878 100.00 100.00

KHI2 = 387.02 / 6 DEGRES DE LIBERTE / 2 EFFECTIFS THEORIQUES INFERIEURS A 5
PROBA (KHI2 > 387.02) = 0.000 / V.TEST = 99.99

Annexe 18 : Tableaux croisés sur test 1 : Q3PF x Q3I et Q5PF x Q5I

Tableau des effectifs observés :

	Q3PF-A	Q3PF-B	Q3PF-C1	Q3PF-C2	Q3PF-C4	Q3PF-D	Q3PF-E	Q3PF-F	Q3PF-G	Q3PF-H	Q3PF-I	Total
Q3I-B	1	1	0	0	0	0	4	1	0	1	0	8
Q3I-BC	2	1	0	0	0	0	8	0	0	0	0	11
Q3I-BCDE	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
Q3I-BCE	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Q3I-BD	63	2	2	1	0	0	1	0	0	0	0	69
Q3I-BDE	7	6	1	0	9	0	2	0	0	0	0	25
Q3I-BE	1	3	0	0	1	0	199	0	0	7	0	211
Q3I-C	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Q3I-CD	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
Q3I-CDE	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Q3I-CE	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	3
Q3I-D	27	10	43	21	0	50	0	4	1	8	5	169
Q3I-DE	0	312	3	2	3	2	3	0	0	0	0	325
Q3I-E	0	0	0	0	0	0	26	7	0	2	0	35
Q3I-R	2	1	0	0	0	0	1	3	5	0	0	12
Total	103	343	49	24	13	52	249	15	6	19	5	878

	Q5PF-A	Q5PF-B	Q5PF-C1	Q5PF-C1B	Q5PF-D	Q5PF-E	Q5PF-F	Q5PF-G	Total
Q5I-B	0	0	0	0	0	2	0	0	2
Q5I-BC	0	0	0	0	0	2	0	0	2
Q5I-BD	5	0	5	1	0	2	2	0	15
Q5I-BDE	3	1	1	2	0	0	1	0	8
Q5I-BE	0	0	0	0	0	79	1	0	80
Q5I-C	0	0	1	0	0	0	0	0	1
Q5I-D	7	3	467	163	1	0	3	1	645
Q5I-DE	0	52	15	13	0	0	0	0	80
Q5I-E	1	0	1	0	0	9	5	0	16
Q5I-R	0	1	7	6	0	6	2	7	29
Total	16	57	497	185	1	100	14	8	878

Annexe 19 : Extraits du fichier de résultat de l'AFCM sur l'item 3 seul

ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES

VALEURS PROPRES

APERCU DE LA PRECISION DES CALCULS : TRACE AVANT DIAGONALISATION .. 4.7500
SOMME DES VALEURS PROPRES 4.7500

HISTOGRAMME DES 19 PREMIERES VALEURS PROPRES

NUMERO	VALEUR PROPRE	POURCENT.	POURCENT. CUMULE	
1	0.6117	12.88	12.88	**
2	0.5687	11.97	24.85	***
3	0.4923	10.36	35.22	***
4	0.4479	9.43	44.65	***
5	0.3151	6.63	51.28	**
6	0.2859	6.02	57.30	**************************************
7	0.2696	5.68	62.97	************************************
8	0.2612	5.50	68.47	***********************************
9	0.2520	5.30	73.78	*********************************
10	0.2389	5.03	78.81	********************************
11	0.2360	4.97	83.77	*******************************
12	0.2155	4.54	88.31	*****************************
13	0.2037	4.29	92.60	***************************
14	0.1320	2.78	95.38	******************
15	0.0954	2.01	97.39	*************
16	0.0565	1.19	98.57	********
17	0.0394	0.83	99.40	******
18	0.0210	0.44	99.85	***
19	0.0073	0.15	100.00	*

COORDONNEES, CONTRIBUTIONS ET COSINUS CARRES DES MODALITES ACTIVES

AXES 1 A 5

MODALITES			COORDONNEES					CONTRIBUTIONS					COSINUS CARRES				
IDEN - LIBELLE	P.REL	DISTO	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
8 . Q3Isb																	
AH_5 - Q3Isb=BD	2.22	10.26	-0.41	-0.51	-0.47	2.55	0.71	0.6	1.0	1.0	32.2	3.6	0.02	0.03	0.02	0.63	0.05
AH_6 - Q3Isb=BDE	0.91	26.44	-0.24	0.01	0.08	0.87	-1.49	0.1	0.0	0.0	1.5	6.4	0.00	0.00	0.00	0.03	0.08
AH_7 - Q3Isb=BE	6.24	3.01	1.17	0.95	-0.12	0.00	-0.26	13.9	9.8	0.2	0.0	1.3	0.45	0.30	0.00	0.00	0.02
AH12 - Q3Isb=D	4.87	4.13	0.44	-1.68	-0.08	-0.36	-0.33	1.5	24.2	0.1	1.4	1.7	0.05	0.68	0.00	0.03	0.03
AH13 - Q3Isb=DE	9.51	1.63	-0.99	0.27	0.28	-0.51	0.19	15.2	1.2	1.5	5.4	1.1	0.60	0.04	0.05	0.16	0.02
AH14 - Q3Isb=E	1.25	18.95	0.90	0.69	-0.48	0.09	0.92	1.7	1.1	0.6	0.0	3.4	0.04	0.03	0.01	0.00	0.05
							CONTRIBUTION CUMULEE =	32.9	37.3	3.3	40.6	17.5					
10 . Q3C																	
AJ_1 - Q3C=A	5.24	3.77	-0.51	0.15	-1.82	-0.27	-0.03	2.2	0.2	35.4	0.9	0.0	0.07	0.01	0.88	0.02	0.00
AJ_2 - Q3C=B	10.22	1.45	0.94	0.07	0.28	-0.08	0.48	14.7	0.1	1.6	0.1	7.6	0.61	0.00	0.05	0.00	0.16
AJ_3 - Q3C=C	9.54	1.62	-0.73	-0.16	0.70	0.23	-0.50	8.2	0.4	9.6	1.1	7.6	0.32	0.02	0.31	0.03	0.15
							CONTRIBUTION CUMULEE =	25.1	0.7	46.6	2.2	15.2					
11 . Q3PF																	
AK_1 - Q3PF=A	3.08	7.13	-0.32	-0.66	-0.27	2.20	0.42	0.5	2.3	0.5	33.2	1.8	0.01	0.06	0.01	0.68	0.03
AK_2 - Q3PF=B	9.94	1.52	-0.97	0.25	0.30	-0.47	0.18	15.3	1.1	1.8	4.9	1.0	0.62	0.04	0.06	0.14	0.02
AK_3 - Q3PF=C1	1.59	14.68	0.21	-1.39	-0.24	-0.36	-0.88	0.1	5.4	0.2	0.5	3.9	0.00	0.13	0.00	0.01	0.05
AK_4 - Q3PF=C2	0.80	30.36	0.55	-1.79	0.21	-0.52	-0.95	0.4	4.5	0.1	0.5	2.3	0.01	0.11	0.00	0.01	0.03
AK_6 - Q3PF=D	1.62	14.40	0.86	-2.16	-0.08	-0.93	0.54	2.0	13.3	0.0	3.1	1.5	0.05	0.32	0.00	0.06	0.02
AK_7 - Q3PF=E	7.26	2.44	1.15	0.93	-0.15	0.04	-0.07	15.7	11.1	0.3	0.0	0.1	0.54	0.36	0.01	0.00	0.00
AK10 - Q3PF=H	0.71	34.12	0.10	-0.14	-0.97	0.12	-1.80	0.0	0.0	1.4	0.0	7.3	0.00	0.00	0.03	0.00	0.09
							CONTRIBUTION CUMULEE =	34.0	37.7	4.2	42.2	17.9					
12 . Q3T																	
AL_1 - Q3T=A	0.65	37.17	-0.06	0.14	0.45	0.03	2.85	0.0	0.0	0.3	0.0	16.9	0.00	0.00	0.01	0.00	0.22
AL_2 - Q3T=AE	1.25	18.95	-0.61	0.26	0.80	-0.86	2.38	0.8	0.1	1.6	2.1	22.5	0.02	0.00	0.03	0.04	0.30
AL_3 - Q3T=E	1.99	11.54	1.15	-2.40	0.15	-0.80	0.46	4.3	20.1	0.1	2.9	1.3	0.11	0.50	0.00	0.06	0.02
AL_4 - Q3T=M	0.71	34.12	-0.09	-0.65	0.24	1.92	0.31	0.0	0.5	0.1	5.8	0.2	0.00	0.01	0.00	0.11	0.00
AL_5 - Q3T=MA	14.04	0.78	0.12	0.34	0.54	0.11	-0.43	0.3	2.8	8.2	0.4	8.2	0.02	0.14	0.37	0.02	0.24
AL_6 - Q3T=MAE	0.85	28.27	-0.50	-0.59	0.51	1.30	0.28	0.3	0.5	0.5	3.2	0.2	0.01	0.01	0.01	0.06	0.00
AL_8 - Q3T=S	5.50	3.55	-0.49	0.11	-1.77	-0.25	-0.03	2.2	0.1	35.1	0.8	0.0	0.07	0.00	0.88	0.02	0.00
							CONTRIBUTION CUMULEE =	7.9	24.2	45.8	15.1	49.4					

COORDONNEES ET VALEURS-TEST DES MODALITES

AXES 1 A 5

MODALITES			VALEURS-TEST					COORDONNEES					
IDEN - LIBELLE	EFF.	P.ABS	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	DISTO.
8 . Q3Isb													
AH_1 - Q3Isb=B	8	8.00	1.7	1.1	-0.9	1.3	-0.9	0.58	0.37	-0.32	0.47	-0.33	108.75
AH_2 - Q3Isb=BC	11	11.00	2.1	1.7	-0.5	1.3	0.7	0.62	0.50	-0.14	0.38	0.22	78.82
AH_3 - Q3Isb=BCDE	2	2.00	1.5	1.0	0.3	1.1	0.2	1.06	0.68	0.19	0.75	0.17	438.00
AH_4 - Q3Isb=BCE	1	1.00	0.8	0.6	0.4	0.5	-1.2	0.80	0.59	0.38	0.53	-1.20	877.00
AH_5 - Q3Isb=BD	69	69.00	-3.7	-4.9	-3.3	23.4	6.6	-0.43	-0.57	-0.38	2.71	0.77	11.72
AH_6 - Q3Isb=BDE	25	25.00	-2.2	-0.3	-0.1	4.9	-8.6	-0.43	-0.06	-0.02	0.96	-1.71	34.12
AH_7 - Q3Isb=BE	211	211.00	19.5	15.8	-2.1	0.0	-4.3	1.17	0.95	-0.13	0.00	-0.26	3.16
AH_8 - Q3Isb=C	1	1.00	0.4	0.8	-2.1	-0.2	0.6	0.43	0.83	-2.14	-0.22	0.62	877.00
AH_9 - Q3Isb=CD	4	4.00	-1.0	0.4	-1.4	0.6	3.0	-0.49	0.19	-0.70	0.30	1.52	218.50
AH10 - Q3Isb=CDE	2	2.00	-1.3	0.4	1.2	0.0	-1.6	-0.89	0.25	0.87	0.03	-1.11	438.00
AH11 - Q3Isb=CE	3	3.00	0.3	0.3	-0.7	0.0	-2.2	0.15	0.17	-0.42	0.01	-1.25	291.67
AH12 - Q3Isb=D	169	169.00	6.5	-24.5	-0.8	-5.1	-4.7	0.45	-1.69	-0.05	-0.36	-0.32	4.20
AH13 - Q3Isb=DE	325	325.00	-22.6	6.3	7.0	-11.9	4.4	-0.99	0.28	0.31	-0.52	0.20	1.70
AH14 - Q3Isb=E	35	35.00	5.7	4.4	-2.6	0.4	6.0	0.95	0.72	-0.44	0.06	0.99	24.09
AH15 - Q3Isb=R	12	12.00	-1.4	-0.6	-4.2	1.6	0.1	-0.40	-0.17	-1.21	0.45	0.02	72.17
10 . Q3C													
AJ_1 - Q3C=A	184	184.00	-7.7	2.3	-27.8	-4.2	-0.5	-0.51	0.15	-1.82	-0.27	-0.03	3.77
AJ_2 - Q3C=B	359	359.00	23.1	1.8	6.8	-1.9	11.9	0.94	0.07	0.28	-0.08	0.48	1.45
AJ_3 - Q3C=C	335	335.00	-16.9	-3.7	16.4	5.4	-11.7	-0.73	-0.16	0.70	0.23	-0.50	1.62
11 . Q3PF													
AK_1 - Q3PF=A	103	103.00	-3.6	-7.2	-2.7	24.4	4.3	-0.34	-0.66	-0.25	2.26	0.39	7.52
AK_2 - Q3PF=B	343	343.00	-23.3	6.2	7.1	-11.3	4.3	-0.98	0.26	0.30	-0.48	0.18	1.56
AK_3 - Q3PF=C1	49	49.00	1.6	-10.7	-1.6	-3.0	-6.7	0.23	-1.49	-0.22	-0.42	-0.93	16.92
AK_4 - Q3PF=C2	24	24.00	3.2	-9.4	1.2	-3.2	-4.2	0.65	-1.90	0.23	-0.64	-0.84	35.58
AK_5 - Q3PF=C4	13	13.00	-1.0	-0.1	0.4	1.5	-7.0	-0.27	-0.02	0.11	0.42	-1.93	66.54
AK_6 - Q3PF=D	52	52.00	6.7	-16.7	-0.2	-7.1	3.6	0.90	-2.25	-0.03	-0.96	0.48	15.88
AK_7 - Q3PF=E	249	249.00	21.9	17.6	-2.3	0.6	-1.3	1.18	0.94	-0.12	0.03	-0.07	2.53
AK_8 - Q3PF=F	15	15.00	0.7	-1.4	-1.9	1.0	2.4	0.18	-0.35	-0.49	0.25	0.62	57.53
AK_9 - Q3PF=G	6	6.00	-0.9	-1.1	-3.9	-0.1	0.1	-0.35	-0.44	-1.58	-0.04	0.05	145.33
AK10 - Q3PF=H	19	19.00	1.1	-0.9	-5.3	-0.1	-7.1	0.24	-0.20	-1.19	-0.02	-1.62	45.21
AK11 - Q3PF=I	5	5.00	1.2	-3.9	-0.5	-0.5	0.3	0.52	-1.72	-0.21	-0.22	0.14	174.60
12 . Q3T													
AL_1 - Q3T=A	22	22.00	-0.3	0.8	2.2	-0.4	13.4	-0.06	0.17	0.47	-0.09	2.82	38.91
AL_2 - Q3T=AE	42	42.00	-4.3	2.0	5.5	-6.4	15.7	-0.64	0.30	0.83	-0.96	2.36	19.90
AL_3 - Q3T=E	70	70.00	10.0	-20.9	1.3	-7.0	4.0	1.15	-2.40	0.15	-0.80	0.46	11.54
AL_4 - Q3T=M	19	19.00	-0.6	-2.7	1.6	6.0	-0.3	-0.13	-0.61	0.36	1.36	-0.08	45.21
AL_5 - Q3T=MA	491	491.00	4.0	11.3	18.0	3.4	-14.4	0.12	0.34	0.54	0.10	-0.43	0.79
AL_6 - Q3T=MAE	28	28.00	-2.8	-3.2	2.9	6.5	1.1	-0.52	-0.59	0.53	1.21	0.20	30.36
AL_7 - Q3T=ME	15	15.00	0.0	-2.6	-0.3	9.8	6.1	-0.01	-0.66	-0.07	2.51	1.56	57.53
AL_8 - Q3T=S	191	191.00	-7.7	1.9	-27.8	-4.0	-0.7	-0.49	0.12	-1.78	-0.26	-0.04	3.60

Annexe 20 : Document de travail pour les étudiants pour l'initiation à Cabri-géomètre

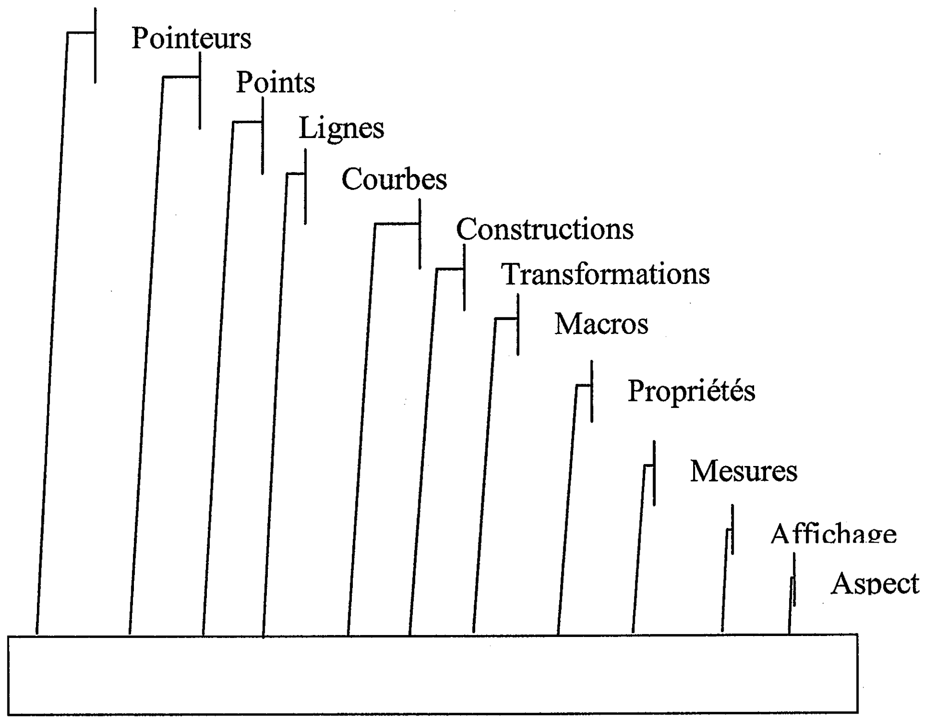
Réalisé à partir du site de Pascal Dewaele[175] et du cours d'Hamid Chachoua[176]

Première approche de Cabri-Géomètre

Ouvrez l'application Cabri-géomètre.

Cabri-géomètre permet de construire des figures à l'aide de divers outils de la géométrie classique.

La plupart des outils sont accessibles à l'aide d'une barre d'icônes qui donne accès à des menus.



Dans la suite nous désignerons les menus par les termes apparaissant dans cette figure, il faudra s'y reporter en cas de besoin.

Pour sélectionner un article il suffit de cliquer rapidement sur l'icône correspondant. Chaque menu contient plusieurs articles ; pour obtenir un article dont l'icône n'est pas présent dans la barre appuyez plus longuement sur l'icône présent et vous déroulez un menu textuel dans lequel vous pouvez opérer votre choix avec la souris.

Vous disposez par ailleurs d'un document donnant la liste de chaque « outil »de chaque menu, appelé aussi « boîte à outils ».

Aides :

• Vous trouverez toujours une aide concernant les outils que vous utilisez en cliquant sur Aide (F1). Cette aide textuelle s'affiche en bas de la fenêtre.

---

[175] http://users.skynet.be/cabri/index.htm. Le site a évolué depuis que je l'ai utilisé.

[176] Cours qu'Hamid Chachoua a préparé pour les PE de l'IUFM de Grenoble, et qu'il m'a aimablement confié.

Par exemple si l'icône est actif dans la barre des menus vous obtenez l'aide suivante :

Cette aide est une information sur l'outil. Elle comporte parfois une aide pour la mise en œuvre de l'outil quand celle-ci présente des difficultés particulières.

Vous pouvez prendre la (bonne) habitude de cliquer sur « aide » au début de chaque session de travail

• Des messages s'affichent au niveau du curseur, comme "*ce point*", "*perpendiculaire à cette droite*" etc... . Ils donnent souvent des indications sur les objets et l'action en cours.

Atelier : Prise en main de Cabri-géomètre

Exercice 1 : Construction d'un triangle ABC.

Construire un triangle en utilisant l'article Triangle du menu des Lignes. Pour cela :

❍ Cliquez sur l'outil triangle du menu des lignes

Vous pouvez observer qu'en descendant dans le menu, les icônes de chaque article défilent et que l'icône du triangle reste actif dans la barre des icônes une fois le choix de l'article effectué.

Le curseur placé dans la feuille a la forme d'un crayon :

❍ cliquez dans la feuille pour obtenir le premier point (tapez tout de suite au clavier le nom du point : A)

❍ cliquez pour le deuxième point (tapez aussi son nom au clavier : B)

❍ faites de même pour le troisième point C.

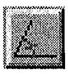
Remarque : Cette façon de nommer les points "à la volée" est commode et rapide, mais elle ne permet pas de rectifier une erreur de saisie de plus elle est limitée à 5 caractères.

Exercice n°2

- Ouvrez un nouveau fichier et cliquez sur « aide » (F1).
- Construisez un **point** et nommez ce point A (*nous utilisons une lettre majuscule car nous nommons un point*).
- Construisez un **point** et nommez ce point B.
- Construisez le **segment** [AB] en joignant le point A au point B par un segment.
- Construisez la **perpendiculaire** **au** segment [AB] **passant par** le point A et nommez cette droite m (*nous utilisons une lettre minuscule car nous nommons une droite*).
- Construisez la **perpendiculaire** **au** segment [AB] **passant par** le point B et nommez cette droite n.
- Placez un **point** sur la droite n et nommez ce point C.
- Construisez la **parallèle** **au** segment [AB] **passant par** le point C. Nommez cette droite p
- Placez un **point** à l'intersection des droites p et m. Nommez ce point D.

- Saisissez le point C grâce au pointeur et déplacez-le.
- Effectuez la même tâche avec les points A et B. Que constatez-vous ?
- Essayez de même avec le point D. Pourquoi ne bouge-t-il pas ?

Vous pouvez éventuellement améliorer votre dessin.

- Construisez les **segments** [BC], [CD] et [AD]. (pour le moment, les droites sont définies, mais Cabri ne connaît pas les segments.)
- **Gommez** les droites m, n et p en utilisant « cacher/montrer ».
- **Mesurez** les segments [AB], [BC], [CD] et [AD].
- **Mesurez** l'angle ABC en présentant dans l'ordre les points A, B et C (*le sommet de l'angle doit toujours être présenté en deuxième position*) et procédez de la même manière pour les 3 autres angles.
- **Marquez**  les angles en procédant de la même manière. Observez bien la forme de la marque.
- Déplacez à nouveau les points et observez si tout se passe bien.

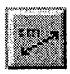
Exercice n°3

- Ouvrez un nouveau fichier et cliquez sur « aide ».
- Construisez un **point** et nommez ce point A.
- Construisez un **point** et nommez ce point B.
- Construisez le **segment** [AB] en joignant le point A au point B par un segment.
- Construisez la **perpendiculaire** **au** segment [AB] **passant** par le point A et nommez cette droite p.
- Construisez le **cercle** **de centre** A **et de rayon** AB. Pour effectuer cette tâche présentez en premier le point A , puis le point B .
- Placez un **point** à l'intersection entre le cercle et la droite p et nommez ce point D.
- Compléter la construction avec un point C tel que ABCD soit un carré (il y a évidemment plusieurs manières)
- Tracer les segments ABCD et effacer les droites et cercles inutiles.
- Saisissez le point A grâce au pointeur et déplacez-le.
- Effectuez la même tâche avec les points B, C et D.

Que se passe-t-il et pourquoi ? ____

____

Exercice n°4

- Ouvrez un nouveau fichier et cliquez sur « aide ».
- Construisez une **droite** et nommez-la a.
- Construisez un **point** sur cette droite a et nommez-le X.
- Construisez un autre **point** sur cette même droite a et nommez-le Y.
- Construisez la **perpendiculaire** à la droite a passant par X et nommez-la b.
- Construisez la **perpendiculaire** à la droite a passant par Y et nommez-la c.
- Vérifiez votre constatation grâce au bouton  ou **mesurez**  la distance entre les 2 droites (*n'oubliez pas de construire un point mobile sur une des deux droites*).
- Faîtes bouger tout ce qui peut bouger et observez.

Exercice n°5

❍ Ouvrez un nouveau fichier et cliquez sur « aide ».

❍ Construisez une **droite** et nommez-la a.

❍ Construisez un **point** sur cette droite a et nommez-le X.

❍ Construisez un autre **point** sur cette même droite a et nommez-le Y.

❍ Construisez la **perpendiculaire** à la droite a passant par X et nommez-la b.

❍ Construisez la **parallèle** à la droite b passant par Y et nommez-la c.

❍ Vérifiez votre constatation grâce au bouton .

Exercice n°6

❍ Ouvrez un nouveau fichier et cliquez sur « aide ».

❍ Indiquez 

le **nombre** 3,5 sur la feuille de dessin Cabri.

❍ Construisez un **point** et nommez-le A.

❍ Reportez  la mesure 3,5 à partir du point A. *Pour cela, montrez le nombre (3,5) et le point A.*

❍ Nommez ce nouveau point B.

❍ Placer un point C à une distance 4,8 cm de B (on procèdera de même, en indiquant le nombre 4,8 puis en créant, par report de mesure, un point C à la distance 4,8 cm de B)

❍ Effectuez un cercle de centre B et de 4,8 cm de rayon (c'est-à-dire un cercle de centre B passant par C).

❍ Effectuez un cercle de centre A et de rayon 5.2 cm.

❍ Placer un point D à 5,2 cm de A et à 4,8 cm de B.

❍ Tracez les segments [AB], [AD] et [BD]. Mesurez-les.

❍ Faîtes bouger tout ce qui peut bouger et observez.

Exercice n°7

❍ Construire de même un rectangle de côtés 4 cm et 5 cm.

❍ Indiquez les mesures des côtés et les marques des angles.

❍ Observez, une fois la construction faite, ce qui peut bouger et ce qui ne peut pas.

Exercice n°8

❍ Construisez trois points A, B, C.

❍ Construisez le points D pour que ABCD soit un parallélogramme.

❍ Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez.

Exercice n°9

- Construisez deux points A, B.
- Construisez les points C et D pour que ABCD soit un losange.
- Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction.
- Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez.

Exercice n°10

- Construisez deux points A, C.
- Construisez les points B et D pour que ABCD soit un losange.
- Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction.
- Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez.

Exercice n°11

- Construisez un triangle équilatéral
- Marquez les longueurs des côtés et les mesures des angles.
- Faîtes bouger les points qui peuvent bouger et observez.

Exercice n°12

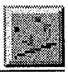
Construisez un triangle rectangle isocèle.

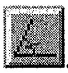
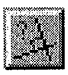
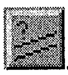
Exercice n°13

Construisez un beau bateau qui ne se déforme « pas trop » quand on bouge un de ses points; ou une fleur, ou…

Deuxième séance de découverte de Cabri

Avec un ordinateur, on ne sait jamais ce qui peut se passer : penser à enregistrer régulièrement votre travail !

Exercice n°7 : Utiliser « bien » l'outil « report de mesures » 

- Construire un rectangle ABCD de côtés 4 cm et 5 cm. Enregistrez.
- Indiquez les mesures des côtés  et les marques des angles . Enregistrez.
- Faîtes bouger tout ce qui peut bouger. Le rectangle doit rester un rectangle, avec les mêmes dimensions.
- Vérifier que les côtés consécutifs sont perpendiculaires  et que les côtés opposés sont parallèles .

Exercice n°8. Connaître les quadrilatères : le parallélogramme

❍ Construisez trois points A, B, C.

❍ Construisez le points D pour que ABCD soit un parallélogramme. Enregistrez.

❍ Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction. Enregistrez.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez. ABCD reste-t-il un parallélogramme ?

❍ Vérifiez que les longueurs des côtés opposés sont égales et que les côtés opposés sont parallèles.

Exercice n°9 . Connaître les quadrilatères : le losange

❍ Construisez deux points A, B.

❍ Construisez les points C et D pour que ABCD soit un losange. Enregistrez.

❍ Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction. Enregistrez.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez. ABCD reste-t-il un losange ?

Exercice n°10. Connaître les quadrilatères : le losange

❍ Construisez deux points A, C.

❍ Construisez les points B et D pour que ABCD soit un losange. Enregistrez.

❍ Tracer les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Effacez les traits de construction. Enregistrez.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Observez.

❍ Vérifiez que les côtés ont tous la même longueur, que les côtés opposés sont parallèles, que les diagonales sont perpendiculaires.

Exercice n°11. Les propriétés des triangles particuliers : le triangle équilatéral.

❍ Construisez un triangle équilatéral. Enregistrez

❍ Marquez les longueurs des côtés et les mesures des angles. Enregistrez.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger et observez.

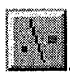
Exercice n°12. Les propriétés des triangles particuliers : le triangle rectangle isocèle.

❍ Construisez un triangle rectangle isocèle. Enregistrez.

❍ Faîtes bouger les points qui peuvent bouger. Le triangle reste-t-il isocèle ?

Exercice n°13. Utiliser la symétrie axiale et reconnaître un quadrilatère

❍ Construisez deux points A et B et une droite d ne passant ni par A ni par B.

❍ Construisez le symétrique A' de A par la symétrie axiale d'axe d . Faîtes de même pour B.

❍ Tracer les segments [AB], [BB'], [B'A'], [A'A] . Enregistrez.

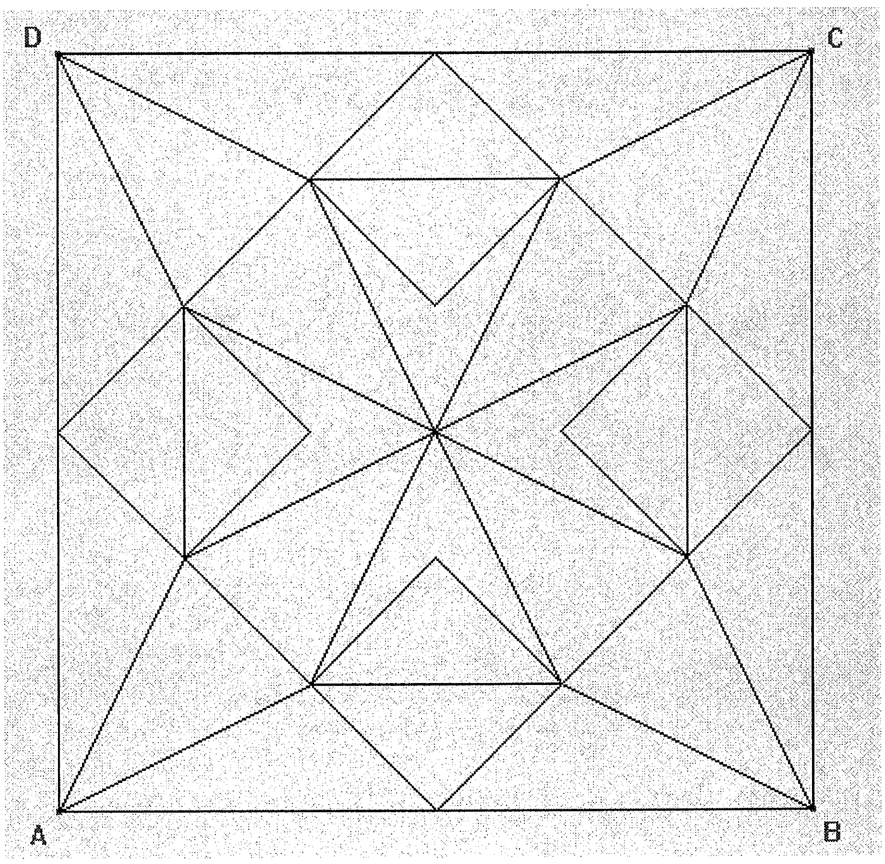
❍ Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ?

Exercice n°14. Suivre un scénario de construction

- Construire un cercle de centre O.
- Tracer deux diamètres perpendiculaires [AB] et [A'B'].
- Tracer le cercle de diamètre [OA'] de centre M puis la droite (AM).
- Nommer P et Q les intersections de cette droite et du petit cercle.
- Tracer le cercle c1 de centre A passant par P et c2 de centre A passant par Q.
- Nommer C, D, E et F les intersections des cercles C1 et C2 avec le grand cercle.
- Relier les points B, C, D, E et F dans un ordre approprié.

Exercice n°15. Reproduire une figure.

Reproduire la figure ci-dessous, où ABCD est un carré de côté 10 cm.



Pour aller plus loin avec Cabri

Exercice n°1 : médiatrices

- Construisez un triangle ABC.
- Construisez les médiatrices de [AB] et de [BC].
- Nommer I l'intersection de ces deux médiatrices
- Tracer la droite d perpendiculaire à [AC] passant par I.
- Soit J le milieu de [AC].
- Vérifier que J est sur la droite d.
- Tracer le cercle de centre I passant par A.
- Que peut-on dire des points B et C ?
- Pourquoi ? Comment nomme-t-on ce cercle ?
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.

Exercice n°2 : médianes

- Construisez un triangle ABC.
- Tracer les milieux K de [AB] et L de [BC].
- Construisez les médianes relatives aux cotés [AB] et [BC].
- Nommer I l'intersection de ces deux médianes
- Tracer la droite d passant par I et par B.
- Soit J le milieu de [AC].
- Vérifier que J est sur la droite d.
- Mesurer les segments [AI], [IL], [KI], [CI], [JI], [BI].
- Que constate-on ?
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.

Exercice n°3 : hauteurs

- Construisez un triangle ABC.
- Construisez les hauteurs relatives aux côtés [AB] et [BC].
- Nommer I l'intersection de ces deux hauteurs.
- Tracer la droite d perpendiculaire à [AC] passant par I.
- Vérifier que B est sur la droite d.
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.

Exercice n°4 : bissectrices

- Construisez un triangle ABC.
- Construisez les bissectrices des angles en A et en B.
- Nommer I l'intersection de ces deux bissectrices.
- Tracer la bissectrice de l'angle en C.
- Vérifier que I est sur cette bissectrice.
- Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par I. Nommer c le point d'intersection de cette droite et de (AB).
- Faîtes de même pour construire des points a et b.
- Tracer le cercle de centre I et de rayon Ic.
- Que peut-on dire des points a et b ?
- Quel est le nom de ce cercle ?
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.

Exercice n°5 : triangle inscrit dans un cercle

- Construisez un segment [AB].
- Nommer I le milieu de ce segment.
- Tracer le cercle de centre I passant par A.
- Placer un point C sur ce cercle.
- Mesurez l'angle du triangle en C.
- Faîtes bouger les points A, B, C.
- Que constate-t-on ?

Exercice n°6 : triangle inscrit dans un cercle

- Construisez un segment [AB].
- Tracer la perpendiculaire d à [AB] passant par B.
- Placer un point C sur d.
- Tracer le segment [AC].
- Placer le milieu I de [AC].
- Tracer le cercle de centre I de rayon IC.
- Que constate-t-on pour les points A et B ?
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.

Exercice n°7 : angle inscrit et angle au centre.

- Construisez un segment [AB].
- Tracer un cercle de centre A de rayon AB.
- Placer un point D sur le cercle.
- Placer un autre point E sur le cercle, mais qui ne soit pas dans le demi-plan délimité par la droite (AB) et contenant D
- Tracer les segments [AB], [AD], [ED] et [EB].
- Mesurer les angles en A et en E. Comparer.
- Faîtes bouger tout ce qui le peut . Observer.
- Conclure.

Exercice n°8

Trouver le plus de manières possibles de construire un losange, ou un parallélogramme, ou …

Reprendre les exercices décrits dans le ta ou la liste d'activités de géométrie plane donnée en cours.

Annexe 21 : Le test sous Cabri

(version complète du dernier groupe)

Groupe : Nom : Poste n° : Baccalauréat : Licence :

1	*Ne lancez pas Cabri directement. Ouvrez le fichier « Médiatrice.men » qui se trouve sur la disquette par l'intermédiaire du poste de travail ou de l'explorateur. Faîtes ensuite « fichier », « ouvrir », et ouvrez le fichier « Médiatrice1 » qui est sur la disquette. Faîtes ensuite « fichier », « Enregistrez sous », et enregistrez avec le nom : « 'votre nom' exo 1 ».* Construisez sous Cabri la médiatrice de [AB]. *Enregistrez.* Précisez ici quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.
2	*Ouvrez le fichier « Triangle ».* Construisez sous Cabri un triangle (ABC) tel que : AB = 5 cm ; BC = 13 cm ; AC = 8 cm. *Enregistrez immédiatement sous « 'votre nom' exo 2 ».* Que pouvez-vous dire de (ABC) (répondez ici)?
3	*Ouvrez le fichier « Médiatrice2 ».* Construisez sous Cabri la médiatrice de [AB]. *Enregistrez immédiatement sous « 'votre nom' exo 3 ».* Précisez ici quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.
4	*Ouvrez le fichier « Médiatrice3 ».* Construisez sous Cabri la médiatrice de [MN]. *Enregistrez immédiatement sous « 'votre nom' exo 4 ».* Précisez ici quelles propriétés de la médiatrice vous utilisez.

5	*Fermez Cabri. Ouvrez le fichier « Carré.men » sur la disquette, puis le fichier « Carré.fig ».* ABCD est un carré de côté 5 cm. Placez le point I de [BD] tel que BI = 2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC = 3 cm. *Enregistrez immédiatement sous « 'votre nom' exo 5 ».* Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) (répondez ici) ?
6	Comment avez-vous fait pour répondre à la question : « *Que pouvez-vous dire des droites (IJ) et (DC) ?* » ?
7	*Fermez Cabri. Relancer Cabri à partir de l'icône sur le bureau.* Tracer un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 5 cm. *Enregistrez immédiatement sur la disquette sous « 'votre nom' exo 7 ».* Ce triangle est-il rectangle ? Comment faîtes-vous pour répondre à cette question ? Répondez ici à ces deux questions.

Image apparaissant à l'écran Cabri avec le fichier « Médiatrice1.fig »

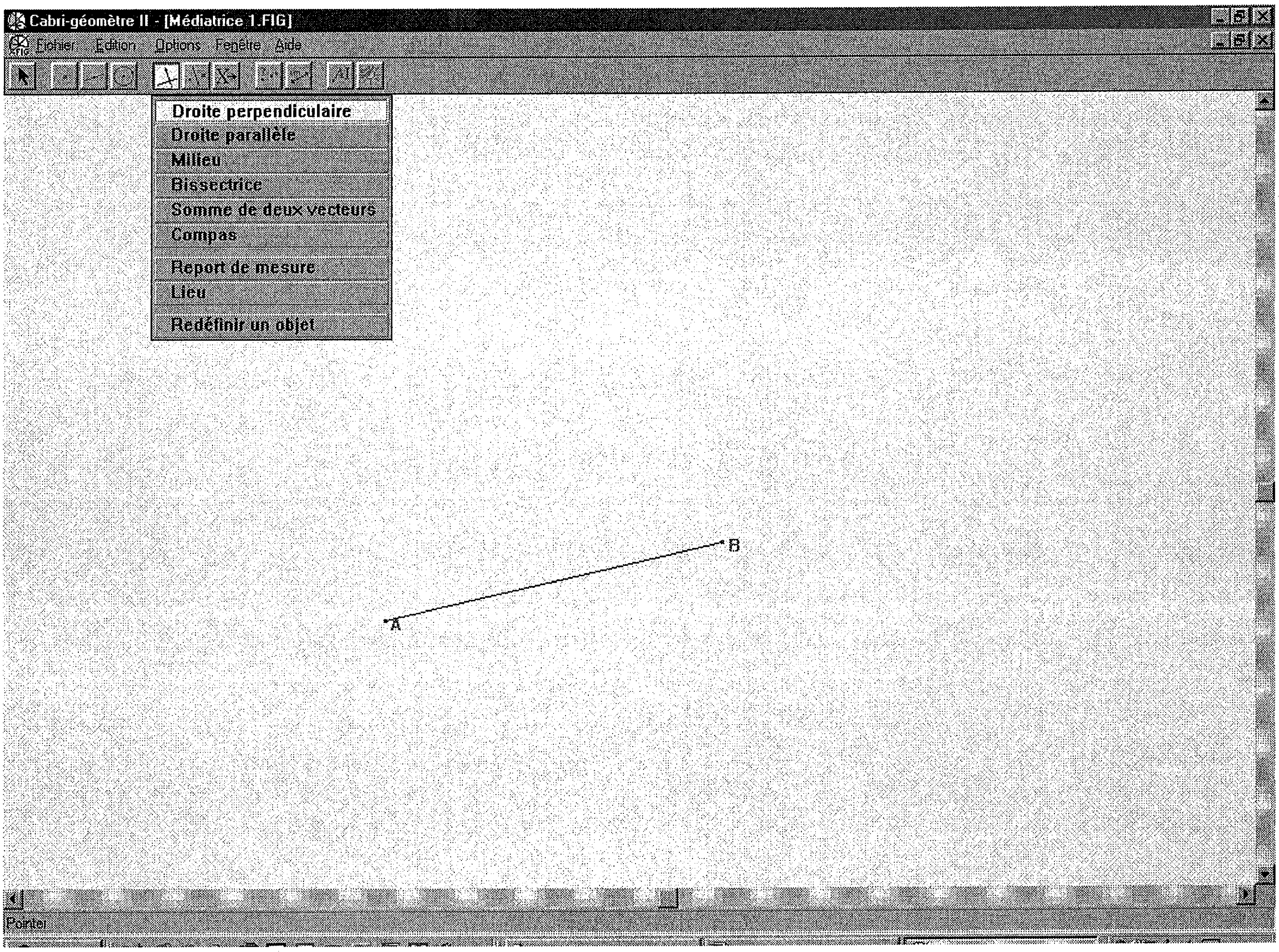


Image apparaissant à l'écran Cabri avec le fichier « Triangle.fig »

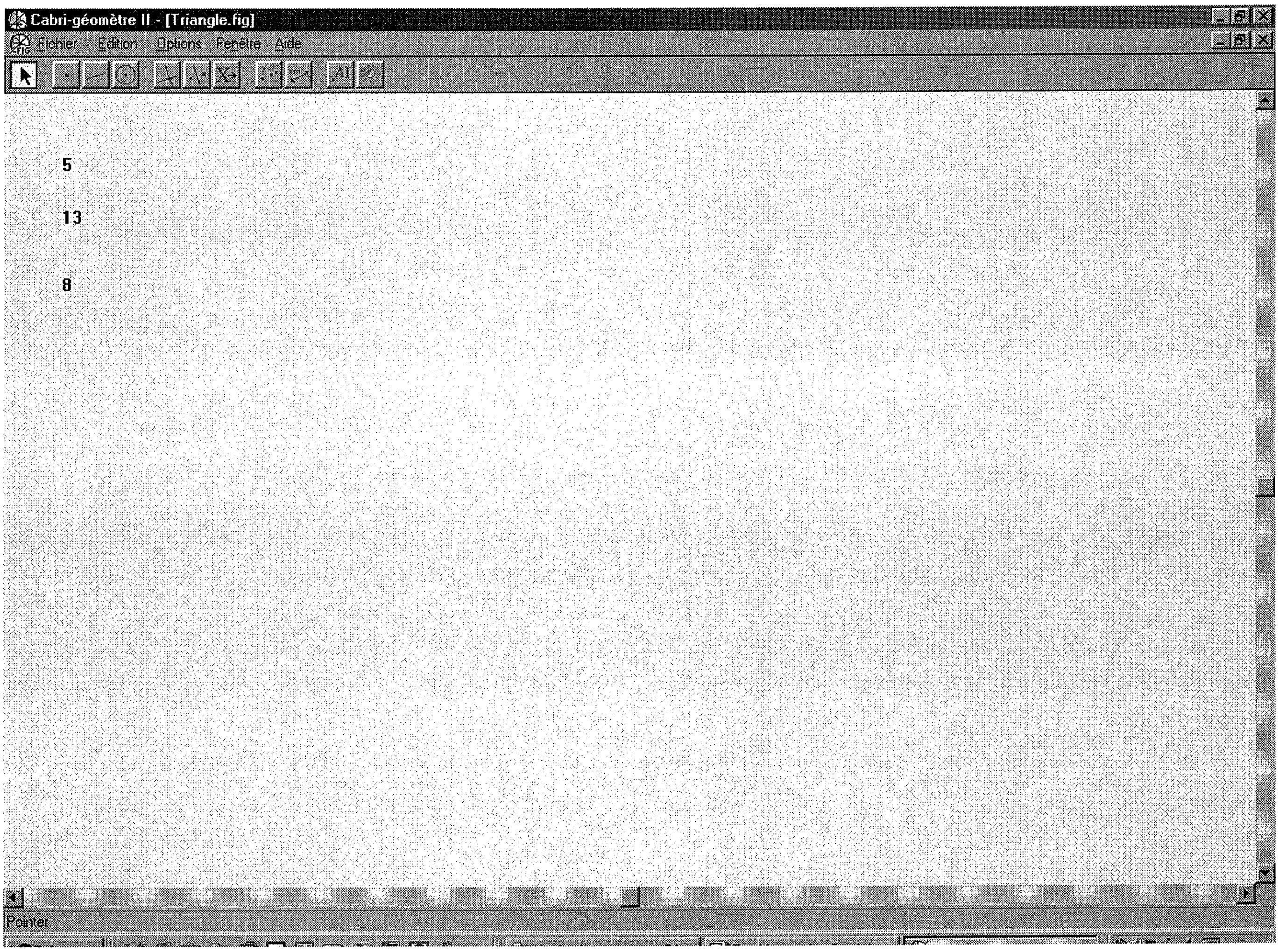


Image apparaissant à l'écran Cabri avec le fichier « Médiatrice2.fig »

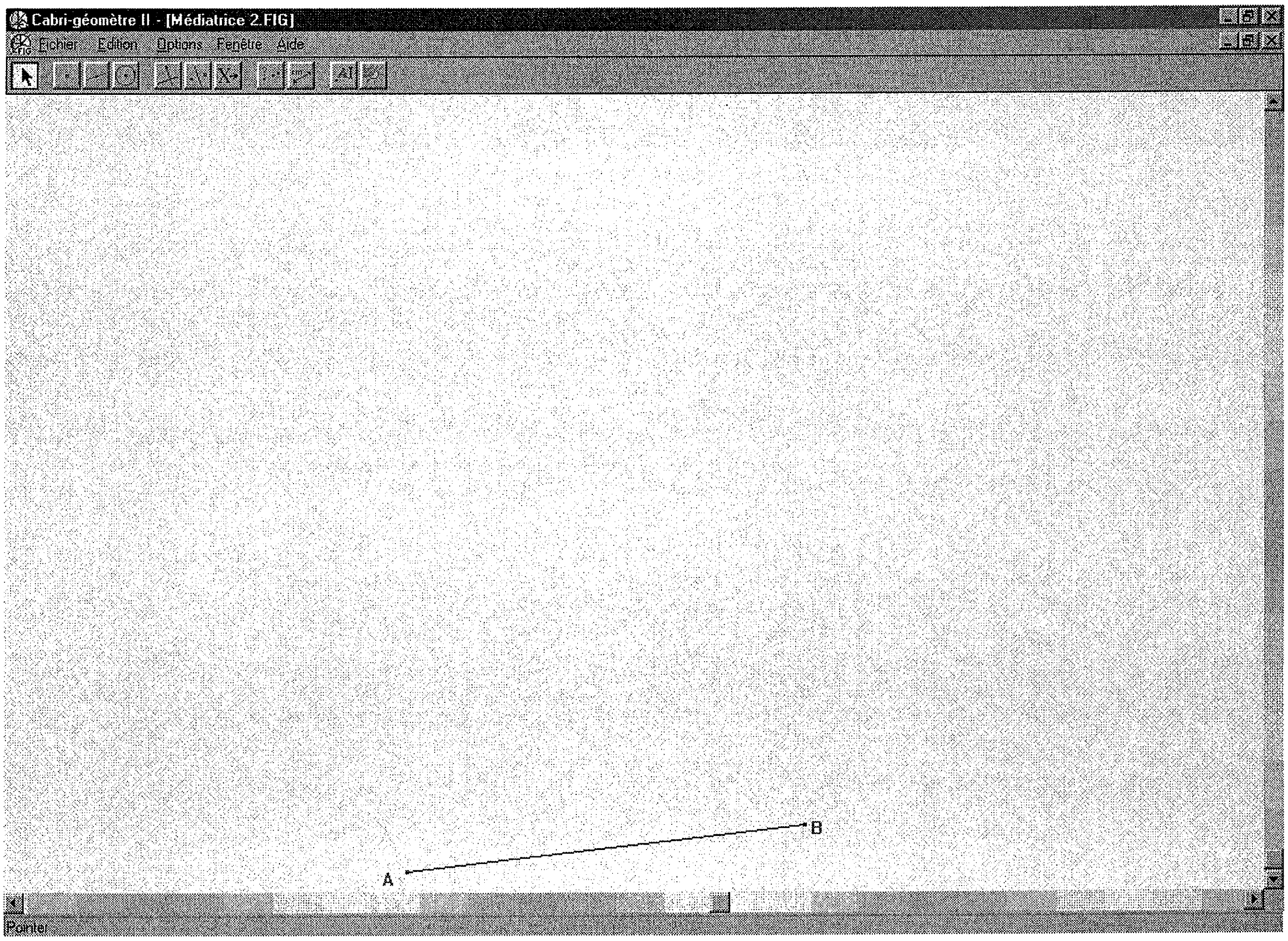


Image apparaissant à l'écran Cabri avec le fichier « Médiatrice3.fig »

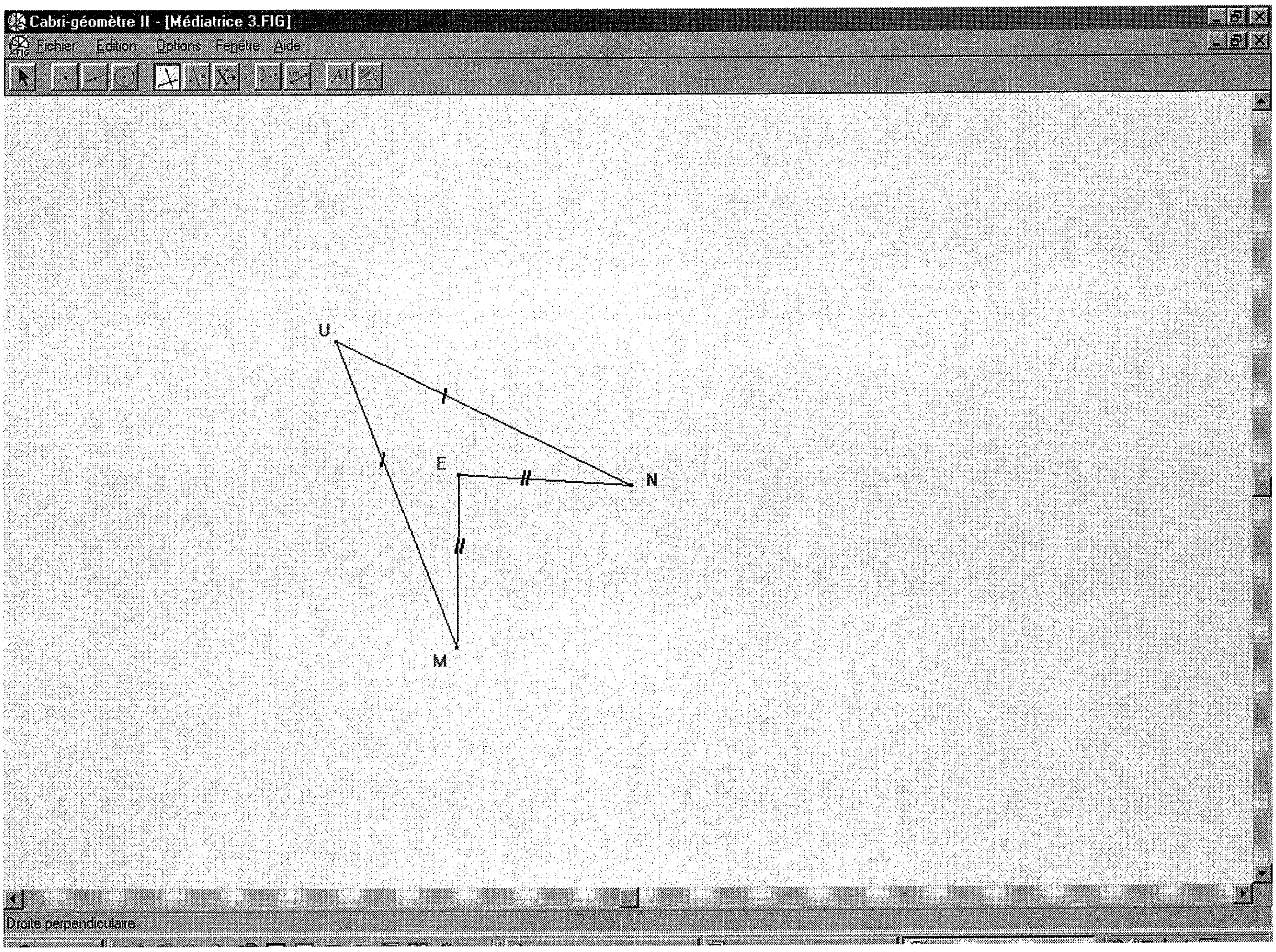
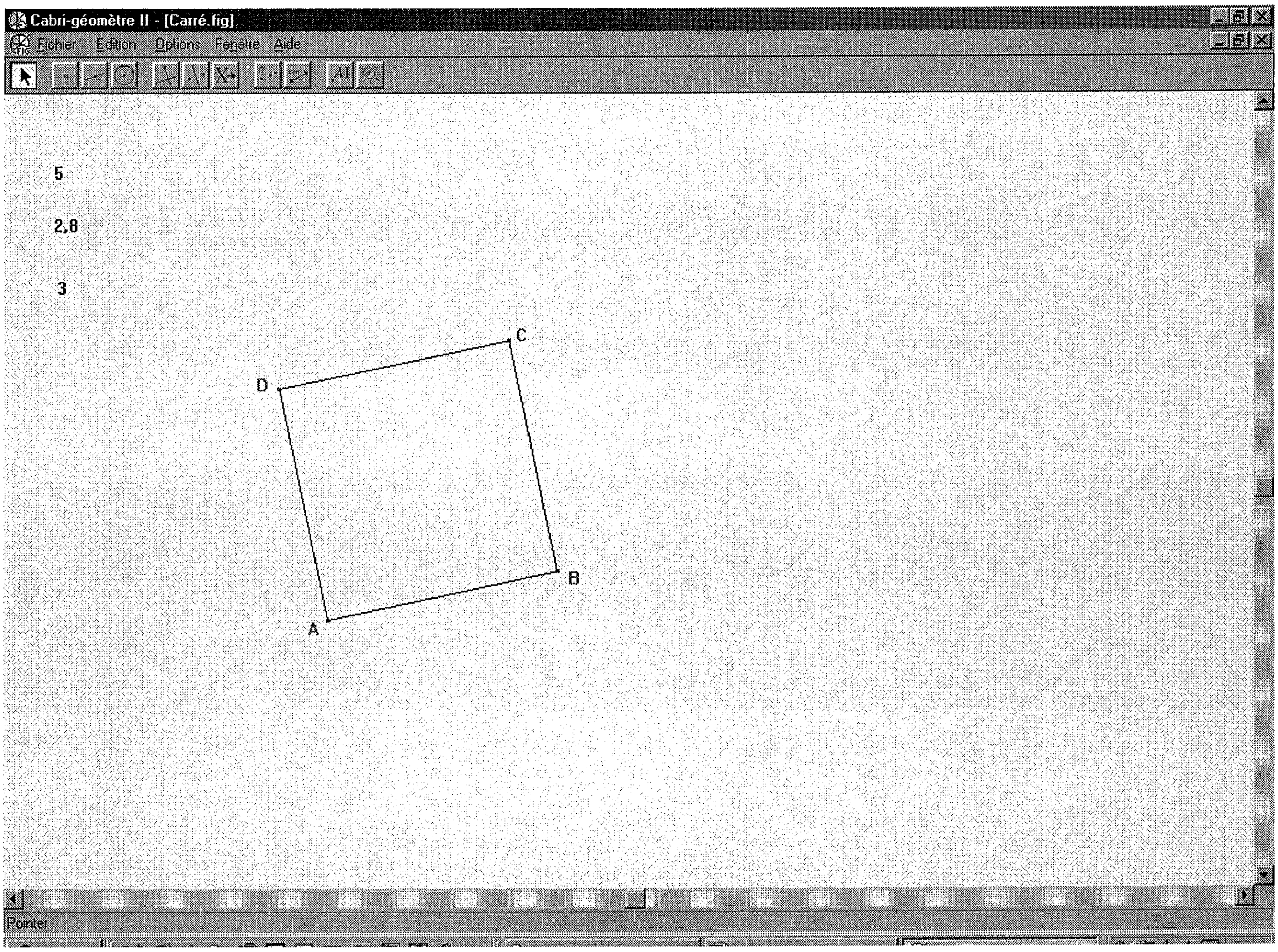


Image apparaissant à l'écran Cabri avec le fichier « Carré.fig »



Annexe 22 : Résultat du test sous Cabri

	Anne	
bac	L	
licence	histoire	
Q1 papier	passe par le milieu du segment est perpendiculaire au segment	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	c'est un triangle plat	G1I
Q2 pc	*Trace un segment de longueur 13 cm puis deux cercles tangents.*	
Q3 papier	voir exercice 1	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	les mêmes on se rend compte que dans un triangle isocèle la médiatrice est aussi la bissectrice et la hauteur	
Q4 pc	*Trace [MN].* *Trace le milieu de [MN]* *Trace la bissectrice de MUN.*	
Q5 papier	ces droites semblent parallèles mais elles ne le sont pas	G2I
Q5 pc	*Premier essai avec les points I et J mal positionnés.* *Utilise l'outil "parallèles ?"*	
Q6 papier	utilisation de l'outil "parallèles ?" J'ai cliqué sur le segment [CD] puis sur la droite (IJ) et l'ordinateur m'a donné la réponse	
Q7 papier		
Q7 pc		

	Béa	
bac	ES	
licence	AES	
Q1 papier	La médiatrice passe par le milieu de [AB] Chercher le milieu de [AB] Tracer la perpendiculaire à [AB] passant par le milieu	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	pas de réponse	
Q2 pc	*Construit un dessin correct mais donne le nom C à un point qui est seulement à 13 cm de B. N'arrive pas à conclure.*	
Q3 papier	Je trace les cercles de centre A et de rayon AB Je trace les cercles de centre B et de rayon BA Les points d'intersection de ces 2 cercles sont deux points de la médiatrice de [AB]	
Q3 pc	*Trace le segment [AB], les cercles de centre A et de rayon B et de centre B et de rayon A, puis les intersections de ces cercles et enfin la droite joingnat ces deux intersections.*	
Q4 papier	Dans ce triangle isocèle, je sais que UN et UM sont de même longueur, donc U appartient à la médiatrice de [MN]	
Q4 pc	*Fait apparaître la médiatrice cachée utilisée pour construire le dessin proposé*	
Q5 papier	Les droites IJ et DC sont parallèles.	
Q5 pc	*Effectue un dessin correct. N'effectue pas de Cabri-vérification.*	G1I
Q6 papier	J'ai regardé les droites	
Q7 papier		
Q7 pc		

	Carole	
bac	D	
licence	lettres modernes + FLE	
Q1 papier	droite perpendiculaire milieu d'un segment	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Ces points se situent sur une même droite. Il s'agit d'un triangle plat.	G1I
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre A, de rayon 8, puis le cercle de centre B de rayon 13, puis trace [AC]*	
Q3 papier	pas de réponse	
Q3 pc	*Place le milieu en mesurant et en calculant par ailleurs la moitié de la longueur du segment, puis trace la perpendiculaire.*	
Q4 papier	pas de réponse	
Q4 pc	*Trace le milieu puis la perpendiculaire passant par le milieu.*	
Q5 papier	Elles sont parallèles.	G2I puis G2
Q5 pc	*Effectue un dessin correct.*	
Q6 papier	J'ai pensé au théorème de Thalès. L'ordinateur dit que les 2 segments ne sont pas parallèles. Besoin de passer par les calculs pour en être convaincue. (*Elle finit par faire effectivement les calculs avec Thalès pour voir exactement d'où vient le problème.)*	
Q7 papier		
Q7 pc		

	Dévi	
bac	A2	
licence	espagnol	
Q1 papier	Doute sur la médiatrice (différent médiane ?) La droite qui passe par le milieu du segment AB	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	l'angle est très "ouvert" une erreur de précision BC$\neq$ 13, BC = 12,98cm	G1I
Q2 pc	*Trace un segment [AB] de 5 cm. Trace un cercle de centre B de rayon 13 cm. Utilise le bouton "report de longueur" pour positionner visuellement un point à 8 cm de A sur le cercle précédent, mais ce point n'est pas aligné avec les deux autres. Trace ensuite le triangle et mesure les trois longueurs pour vérifier.*	
Q3 papier	AB=8,47cm AC=4,235 cm idem n°1	
Q3 pc	*Place le milieu en mesurant avec la règle sur l'écran et en calculant par ailleurs la moitié de la longueur du segment, puis trace la perpendiculaire. Utilise mal le bouton "report de longueur".*	
Q4 papier	La médiatrice partage le triangle en deux autres triangles "égaux"	
Q4 pc	*Trace la perpendiculaire au segment passant par E.*	
Q5 papier	Je pensais qu'ils étaient parallèles mais en vérifiant ils ne le sont pas	G2I
Q5 pc	*Les points I et J sont correctement placés mais ni la droite (IJ) ni le segment [IJ] ne sont tracés. Le segment a dû être tracé et le parallélisme vérifié avec Cabri mais il n'en reste pas trace sur le fichier enregistré.*	
Q6 papier	j'ai tracé ces droites et j'ai vérifié avec la boite à outils "parallèles ?"	
Q7 papier		
Q7 pc		

	Emma	
bac	D	
licence	biologie	
Q1 papier	Propriété de perpendicularité au segment donné. Tous les points de la médiatrice sont équidistants de A et B.	
Q1 pc	*Procédure "deux intersections d'arcs de cercles de rayons 5 cm".*	
Q2 papier	ABC est un triangle aplati ; A, B et C sont sur la même droite Ils sont alignés.	G1I
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre B de rayon 13, puis le cercle de centre A, de rayon 8, puis trace [AC] et [AB]*	
Q3 papier	La médiatrice passe par le milieu du segment.	
Q3 pc	*Procédure : "Une intersection de cercles de rayons 6 cm puis milieu"*	
Q4 papier	Une médiatrice est une droite perpendiculaire au milieu du segment.	
Q4 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q5 papier	Les droites (IJ) et (DC) ne sont pas parallèles.	G2I
Q5 pc	*Dessin correct. Cabri-vérification "parallèles ?"*	
Q6 papier	J'ai vérifié le parallélisme des droites grâce à la boîte à outils "parallèles ?".	
Q7 papier		
Q7 pc		

	France	
bac	A1	
licence	lettres modernes	
Q1 papier	La médiatrice d'un segment est perpendiculaire à celui-ci et passe par son milieu.	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Impossible de trouver le point C qui soit à la fois à 13 cm de B et 8 cm de A.	G1I avec problème technique
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre B de rayon 13, puis le cercle de centre A, de rayon 8, mais Cabri n'arrive pas à déterminer l'intersection des deux cercles, qui apparaissent comme inclus l'un dans l'autre à l'écran !*	
Q3 papier	mêmes propriétés que pour l'exercice 1.	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	On sait que les points d'une médiatrice sont à égale distance des 2 extrémités du segment donc [ME]=[EN] et [MU]=[UN]. J'ai donc tracé la droite passant par U et E.	
Q4 pc	*Trace directement la droite (EU)*	
Q5 papier	(IJ) et (DC) sont parallèles	G1I
Q5 pc	*Dessin correct. Pas de cabri-vérification.*	
Q6 papier	j'ai regardé les droites	
Q7 papier		
Q7 pc		

	Gala	
bac	ES	
licence	histoire	
Q1 papier	Médiatrice passe par le milieu. Perpendiculaire à un segment.	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Les 3 points sont alignés car [AB]+[AC]=[BC] 5+8=13 dessin du segment [BC] avec le point A dessus	G2
Q2 pc	*Trace le segment [BC] de longueur 13 cm, puis avec l'outil "report de mesure", place directement un point sur le segment à 5 cm de A.*	
Q3 papier	Un point milieu d'un segment puis perpendiculaire report de mesure (moitié du segment [AB])	
Q3 pc	*Mesure la longueur du segment, calcule par ailleurs sa moitié, puis utilise le report de longueur pour positionner directement un point à la distance adéquate du milieu. Trace ensuite la perpendiculaire.*	
Q4 papier	M image de N par l'axe de symétrie UE.	
Q4 pc	*Trace directement la droite (EU) puis utilise l'outil "perpendiculaires ?" pour vérifier que cette droite est bien perpendiculaire au segment.*	
Q5 papier	Les 2 droites ne sont pas parallèles.	G2I puis G1I
Q5 pc	*Effectue une construction correcte. Utilise l'outil "parallèles ?" puis trace la parallèle à (DC) passant par J pour vérifier le non-parallélisme, et probablement pour se convaincre.*	
Q6 papier	Vérification "parallèles ?". Tracer la droite parallèle à (DC) passant par J. La droite (IJ) n'est pas perpendiculaire à (BC).	
Q7 papier		
Q7 pc		

<table>
<tr><td></td><td>Hélène</td><td></td></tr>
<tr><td>bac</td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td>licence</td><td>Information, Communication</td><td></td></tr>
<tr><td>Q1
papier</td><td>Recherche du milieu [AB] qui donne point C.
Perpendiculaire à [AB] qui passe par C.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q1 pc</td><td>Procédure : "Milieu et perpendiculaire"</td><td></td></tr>
<tr><td>Q2
papier</td><td>Les points A, B et C sont alignés.
L'angle CÂB mesure 180° à lui tout seul.
(est-ce toujours un triangle ?)</td><td rowspan="2">G1I</td></tr>
<tr><td>Q2 pc</td><td>Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre B de rayon 13, puis le cercle de centre A, de rayon 8, puis trace [AC] et [BC] mais Cabri ne veut pas placer le point d'intersection.</td></tr>
<tr><td>Q3
papier</td><td>Recherche du milieu [AB] qui donne C.
Tracer perpendiculaire à [AB] passant par C.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q3 pc</td><td>Procédure : "Milieu et perpendiculaire"</td><td></td></tr>
<tr><td>Q4
papier</td><td>Tracer segment [MN].
Recherche du milieu de [MN] qui donne g.
Tracer perpendiculaire [MN] passant par g.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q4 pc</td><td>Procédure : "Milieu et perpendiculaire"</td><td></td></tr>
<tr><td>Q5
papier</td><td>[IJ] et [DC] sont parallèles à l'œil nu.
Pour vérifier, je trace un nouveau point K tel que :
K appartient à [DA] et DK=3cm.
Je trace [KJ], le point I se trouve sur ce segment qui est lui-même parallèle à [DC] donc si [DC] est parallèle à [KJ] alors [DC] est parallèle à [IJ]</td><td rowspan="3">G1I</td></tr>
<tr><td>Q5 pc</td><td>Effectue la construction décrite ci-dessus.</td></tr>
<tr><td>Q6
papier</td><td>J'ai justifié sur ordinateur, en cherchant "une preuve", que ce que je voyais à l'œil nu était vrai.</td></tr>
<tr><td>Q7
papier</td><td>Ce triangle est rectangle en B.
Pour le vérifier, je prends le menu "mesure d'angle".
$A\hat{B}C$ est égal à 90° donc est rectangle en B.</td><td rowspan="2">G2I</td></tr>
<tr><td>Q7 pc</td><td>Effectue une construction correcte. Fais mesurer l'angle ABC.</td></tr>
</table>

	Irène	
bac	ES	
licence	AES	
Q1 papier	Médiatrice : passe par le milieu du segment; droite perpendiculaire au segment.	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Le triangle est "à plat", il représente un segment [BC] sur lequel se trouve un point A, ce point A se situe à 5 cm de B et à 8 cm de C (5 + 8 = 13 cm)	G1I puis G2
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre B de rayon 13, puis le cercle de centre A, de rayon 8, puis trace [AC] et [AB]*	
Q3 papier	La médiatrice passe par le sommet du triangle et coupe le côté opposé à ce sommet perpendiculairement et en son milieu (triangle équilatéral ou isocèle)	
Q3 pc	*Procédure : "Une intersection d'arcs de cercle et perpendiculaire"*	
Q4 papier	Dans un triangle isocèle, les médiatrices sont les droites qui passent par les sommets et qui coupent perpendiculairement et en son milieu le segment opposé au sommet.	
Q4 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q5 papier	(IJ) et (DC) sont parallèles, car (IJ) est perpendiculaire à [BC] en J et (BCD) est un triangle rectangle en C d'où (IJ) et (DC) dont parallèles.	G2I
Q5 pc	*Effectue une construction correcte. Fait mesurer l'angle CJI.*	
Q6 papier	je pensais que ces droites étaient parallèles mais en mesurant l'angle $\widehat{IJC}$, je trouve 90,6° donc les droites ne sont pas parallèles. (j'ai peut-être fait une erreur de construction !)	
Q7 papier	oui le mesure l'angle BÂC et il mesure 90° donc le triangle est rectangle en A	G2I
Q7 pc	*Effectue une construction correcte. Fais mesurer l'angle BAC.*	

	Jeanne	
bac	L	
licence	Lettres modernes	
Q1 papier	la médiatrice coupe le segment [AB] en son milieu. La médiatrice est une droite perpendiculaire à [AB]	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"* *Utilise la fonction "perpendiculaire ?"*	
Q2 papier	Je ne sais pas si le point C appartient aux deux cercles vu que les points sont pratiquement alignés	
Q2 pc	*Trace un segment [AB] de longueur 5 cm.* *Trace un cercle (appelons-le C1) de centre B de rayon 13 cm.* *Place un point C à 8 cm de A par report de mesure. Ce point est positionné* ***perceptivement*** *sur le cercle C1.* *Trace un cercle C2 de centre A passant par C.* *Demande si C est sur C1. "Le point n'est pas sur l'objet".* *Repose la question " le point est-il sur l'objet ?". Obtient alors une réponse positive (les cercles n'étant pas nommés, elle montre alors probablement le cercle C2).* *Mets un point à l'intersection des deux cercles.* *Trace le segment [AC].* *demande si A, B, et C sont alignés (réponse négative).*	G2I mal utilisé
Q3 papier	La médiatrice coupe [AB] en son milieu. La médiatrice est une droite perpendiculaire à [AB]	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	mêmes propriétés que pour les exercices 1 et 3.	
Q4 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q5 papier	Elles semblent parallèles.	
Q5 pc	*Effectue une construction correcte.* *Demande si (IJ) et (DC) sont parallèles (réponse négative).* *Demande si (IJ) et [CB] sont perpendiculaires (réponse négative).*	G2I
Q6 papier	Mais en utilisant le bouton propriétés (parallèle), il apparaît que les droites ne sont pas parallèles.	
Q7 papier	oui Calcul des angles. Recherche d'un angle à 90°.	G2I
Q7 pc	*Effectue une construction correcte. Fais mesurer les trois angles du triangle.*	

	Kédy	
bac	D	
licence	Biologie	
Q1 papier	La médiatrice passe par le milieu d'un segment. La médiatrice est perpendiculaire au segment.	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Le triangle (ABC) est plat, les côtés CA et AB sont superposés à CB. Est-ce un triangle ? Peut-on parler de figure à trois côtés ?	G1I
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [AB], puis trace le cercle de centre B de rayon 13, puis le cercle de centre A, de rayon 8, puis trace [AC] et [AB] et [BC].*	
Q3 papier	La médiatrice passe par le centre d'un segment La médiatrice est perpendiculaire au segment	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	La médiatrice de la base dans un triangle isocèle passe par le sommet et le milieu de la base.	
Q4 pc	*Trace directement la droite (EU).Demande si (EU) est perpendiculaire à [MN] puis si l'intersection de (EU) et de [MN] est équidistante de M et de N.*	
Q5 papier	Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.	G1I
Q5 pc	*Effectue une construction correcte.* *Fait mesurer les longueurs CJ, JB, DI, IB.*	
Q6 papier	Visuellement. C'est probablement en rapport avec le théorème de Thalès. On trouve 2/3=2,8/4,27 JB/CJ=IB/DI	
Q7 papier	Oui, en A. Si ABC est un triangle rectangle, alors on peut vérifier le théorème de Pythagore. $AC^2=AB^2+BC^2$ $AC^2=9+16$ $AC^2=25$ $AC=5$ On vérifie le théorème donc ABC est un triangle rectangle en B.	G2
Q7 pc	*Effectue une construction correcte.*	

	Louis	
bac	B	
licence	histoire	
Q1 papier	La médiatrice de [AB] passe par son milieu et est perpendiculaire à ce même segment. Elle passe par le point J, point d'intersection des cercles C et C' C a pour centre A, rayon AB. C' a pour centre B, de rayon AB.	
Q1 pc	*Place le milieu du segment. Trace deux cercles de même rayon AB de centres A et B, place un point à l'une des intersections. Enfin, trace la droite perpendiculaire au segment passant par le point I (et n'utilise donc pas les deux cercles et leurs intersections).*	
Q2 papier	(ABC) = angle de 180° en A BÂC = angle plat	G1I
Q2 pc	*Construit un dessin correct en commençant par [BC], puis trace le cercle de centre C, de rayon 8, puis le cercle de centre B de rayon 5 mais Cabri ne veut pas placer le point d'intersection.*	
Q3 papier	La médiatrice de [AB] est perpendiculaire à [AB] passant par I, milieu de [AB].	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	La médiatrice de [MN] , perpendiculaire à [MN], passant par I, milieu de [MN]. Médiatrice de [MN], bissectrice de l'angle MÛN, passant par E, sommet du triangle MEN.	
Q4 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire", puis vérifie en faisant mesurer à Cabri les angles MUE et EUN.*	
Q5 papier	Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles.	G2I mais exploite mal les conclusions de Cabri
Q5 pc	*Effectue une construction correcte.* *Trace la perpendiculaire à [AB] passant par I, place un point K à l'intersection de cette droite et de [AB], et un point L à l'intersection de cette droite et de [CD]. Marque tous les angles des quadrilatères (IJBK) et (IJCL). Cabri marque certains angles comme droits, d'autres non.*	
Q6 papier	J'ai tracé une perpendiculaire à (IJ) passant par le point I. Cette droite est également perpendiculaire à (DC) donc (IJ) et (DC) sont parallèles.	
Q7 papier	Je mesure l'angle CÂB=90°.	G2I
Q7 pc		

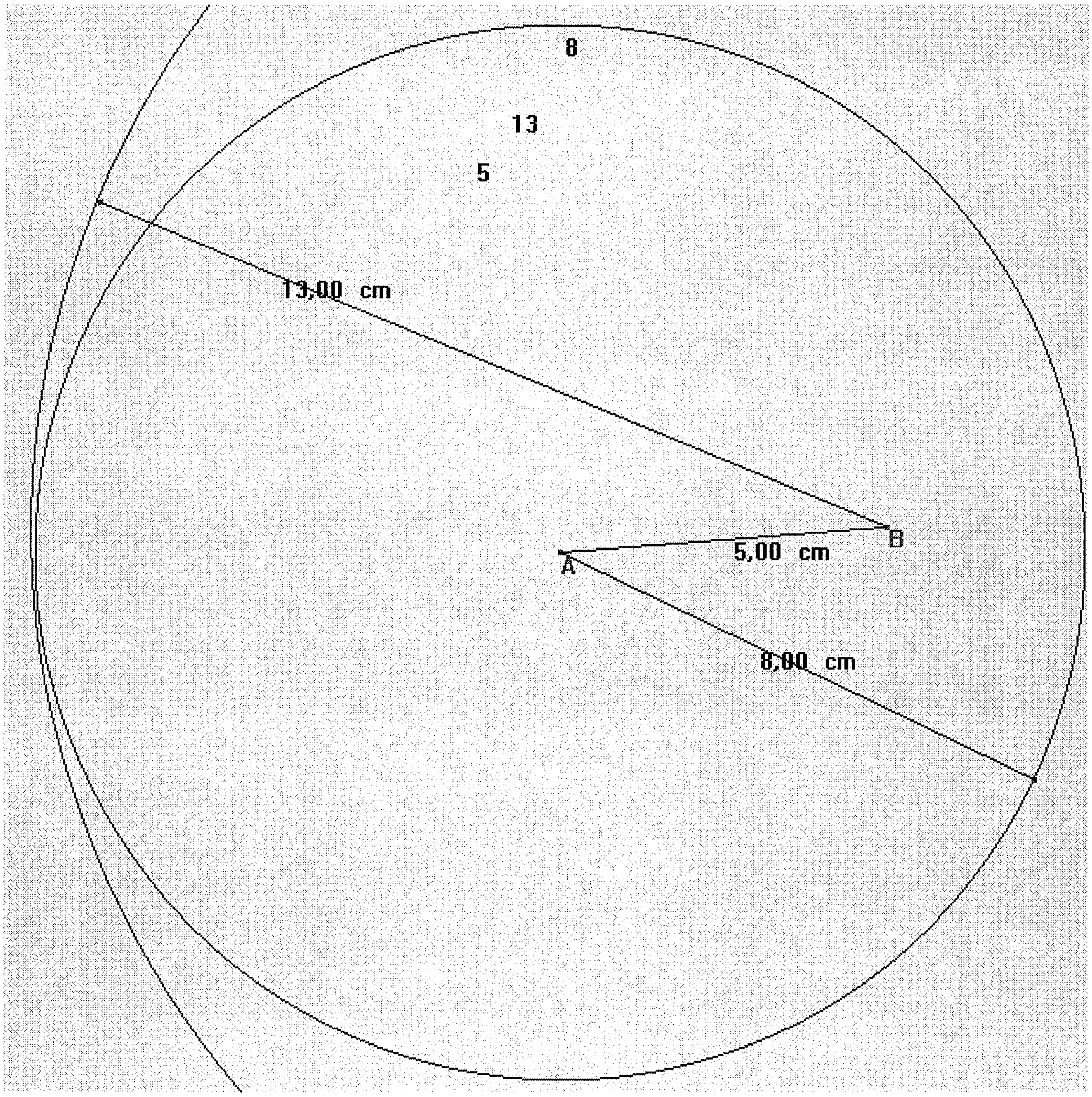
<table>
<tr><td></td><td>Marie</td><td></td></tr>
<tr><td>bac</td><td>ES</td><td></td></tr>
<tr><td>licence</td><td>géographie</td><td></td></tr>
<tr><td>Q1 papier</td><td>La médiatrice d'un segment le coupe en son milieu et est perpendiculaire à ce segment.
Tous les points de la médiatrice sont équidistants aux extrémités du segment.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q1 pc</td><td>Procédure : "Milieu et perpendiculaire"</td><td></td></tr>
<tr><td>Q2 papier</td><td>ABC sont alignés donc c'est un triangle plat.</td><td rowspan="2">G1I</td></tr>
<tr><td>Q2 pc</td><td>Construit un dessin correct en commençant par [BC], puis trace le cercle de centre B, de rayon 5, puis le cercle de centre A de rayon 8.</td></tr>
<tr><td>Q3 papier</td><td>Prendre le milieu de [AB] et faire la perpendiculaire à ce segment passant par le milieu.
Vérifier si les points de la médiatrice sont équidistants des points (extrémités) du segment.
+ avec cercle de centre A et cercle de centre B ayant le même rayon. Les points d'intersection donnent les points de la médiatrice.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q3 pc</td><td>Procédure : "Milieu et perpendiculaire"
Place un point sur la droite et vérifie avec Cabri qu'il est à même distance de A et de B.
Trace ensuite deux cercles de rayon 11 cm de centres A et B.</td><td></td></tr>
<tr><td>Q4 papier</td><td>Tous les points de la médiatrice sont équidistants aux extrémités du segment [MN]
donc je trace la droite passant par U et E car [EM]=[EN] et [UM]=[UN].</td><td></td></tr>
<tr><td>Q4 pc</td><td>Trace directement (EU).</td><td></td></tr>
<tr><td>Q5 papier</td><td>(IJ) et (DC) ne sont pas parallèles</td><td rowspan="3">G2I</td></tr>
<tr><td>Q5 pc</td><td>Effectue une construction correcte. Trace la droite (IJ). Nomme F l'intersection de cette droite et de [AD]. Mesure DF et obtient 3,05 cm.</td></tr>
<tr><td>Q6 papier</td><td>Après avoir placé le point I et le point J, j'ai tracé la droite passant par I et J. Puis j'ai placé le point F intersection de la droite (IJ) et du segment [DA]. J'ai mesuré [DF] et [CJ]. Les segments ne sont pas égaux. Donc la droite (IJ) et la droite (DC) ne sont pas parallèles.</td></tr>
<tr><td>Q7 papier</td><td>Le triangle ABC est rectangle en B.
Je mesure l'angle $\widehat{ABC}$. Il est de 90°. (Je regarde ainsi si [AB] est perpendiculaire à [BC].)</td><td rowspan="2">G2I</td></tr>
<tr><td>Q7 pc</td><td></td></tr>
</table>

	Noémie	
bac	B	
licence	allemand	
Q1 papier	La médiatrice est une droite qui est perpendiculaire à un segment et qui passe en son milieu.	
Q1 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q2 papier	Il est plat.	G1I
Q2 pc	*Trace [AB] puis place les points avec l'outil "report de mesure" perceptivement de sorte qu'ils soient alignés.*	
Q3 papier	La médiatrice est une droite qui est perpendiculaire à un segment et qui le coupe en son milieu.	
Q3 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q4 papier	idem	
Q4 pc	*Procédure : "Milieu et perpendiculaire"*	
Q5 papier	Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles (Thalès).	G1I
Q5 pc	*Effectue une construction en utilisant les reports de mesure visuellement. Fait mesurer à Cabri chacune des longueurs DI, DB, CJ.*	
Q6 papier	1) J'ai observé la figure obtenue et supposé que (IJ) et (DC) sont parallèles. 2) J'ai cherché une justification. Or on sait d'après le théorème de Thalès, si [IB]/[BD]=[BJ]/[BC] alors on peut dire que les droites (IJ) et (DC) sont parallèles. (*Elle constate qu'il n'y a pas exactement égalité mais "ça se rapproche quand même beaucoup, donc je peux considérer que c'est égal")*	
Q7 papier	Oui, le triangle est rectangle. D'après le théorème de Pythagore, on sait que dans un triangle rectangle, la somme des carrés des côtes est égale au carré de l'hypoténuse. Vérifions pour ce triangle : $3^2 + 4^2 = 5^2$; $9 + 16 = 25$ donc ce triangle est bien un triangle rectangle. *(Elle voit les dimensions, pense au théorème de Pythagore sans effectuer les calculs, vérifie sous Cabri puis effectue les calculs)*	G2I puis G2
Q7 pc	*Effectue une construction correcte. Fais mesurer l'angle ABC.*	

Annexe 23 : Des cercles « tangents disjoints »

Voici un exemple de situation dans laquelle Cabri n'a pas pu tracer l'intersection des deux cercles.

Les deux points sans nom sont tracés par report de mesure à partir des points A ou B et des nombres édités à l'écran.



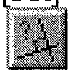
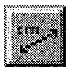
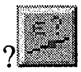
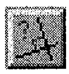
Annexe 24 : Document étudiant pour la situation PARC

Groupe : Nom : Poste n° : Baccalauréat : Licence :

1	*Ne lancez pas Cabri directement. Ouvrez le fichier Médiatrice.men qui se trouve sur la disquette par l'intermédiaire du poste de travail ou de l'explorateur. Faîtes ensuite « fichier », « Enregistrez sous », et enregistrez avec le nom : « 'votre nom' PARC ».* Placer 4 points quelconques P, A, R, C. Tracer les segments [PA], [AR], [RC], [CP], [PR], [AC], Tracer les médiatrices de [PA] et de [AR]. Elles se coupent en un point I. Tracer les médiatrices de [RC] et de [CP]. Elles se coupent en un point K. *Enregistrez.* Déplacer les points P, A, R et C dans le plan. Que peut-on dire de la droite (IK) ? (Répondez ici)
2	Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour justifier cette réponse ? (répondez ici et mettez en œuvre ces moyens si possible)

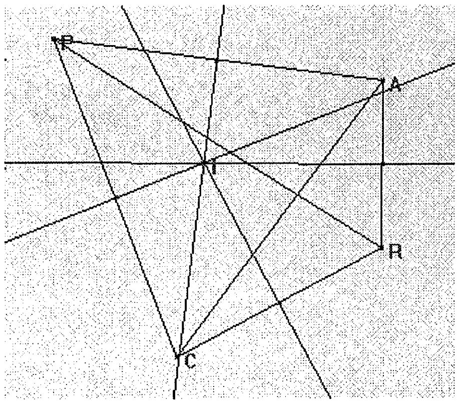
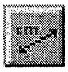
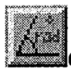
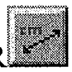
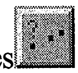
Annexe 25 : Productions des étudiants et des groupes pour la situation PARC

Groupe A

Production numéro	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur (IK)	Ce qui est fait sous Cabri
A Anne	MP	A puis C G1I G2I	La droite (KI) coupe le segment [PR] en son milieu. (KI) et [PR] sont perpendiculaires. Donc (IK) est la médiatrice du segment [PR]. Tous les points placés sur (IK) sont équidistants de [PR].	Pour vérifier la présence de la médiatrice, fait tracer à Cabri les symétriques des points I et K, puis du point P par la symétrie axiale d'axe (IK), et est tout étonnée de ne rien voir à l'écran, comme si ça ne marchait pas (les points étant superposés à d'autres, il ne se passe apparemment rien à l'écran). Ensuite, trace le segment [PR], le milieu de [PR], s'assure visuellement qu'il est bien sur la droite (IK), vérifie que le segment [PR] est perpendiculaire à la droite (IK) , puis mesure les longueurs PI et IR, pour vérifier qu'elles sont égales .
A Béa	MP	A puis C G2I	La droite (IK) est la médiatrice de [PR], car on vérifie que IK est perpendiculaire à [RP], et RK = KP.	Sous Cabri, vérifie que (IK) est perpendiculaire à [PR] avec l'outil perpendiculaire ?  puis que l'intersection de (IK) et de [PR] est au milieu de [PR] en mesurant les distances 
A Carole	MP	A puis E G2I G2	La droite (IK) passe par 2 points d'intersection de médiatrices de 2 triangles ayant deux sommets en communs (PRA, PRB). Ils ont obligatoirement une médiatrice commune qui est la droite(IK)	Sous Cabri, détermine le milieu de [PR] et vérifie qu'il est bien sur (IK) avec l'outil appartient ? 
A Dévi	MP	A puis C G1I G2I	IK est la médiatrice de PR. On vérifie que IK passe bien par le milieu de PR et qu'elle est perpendiculaire à PR.	Place le milieu de [PR], vérifie **visuellement** qu'il est sur (IK), puis vérifie que [PR] et (IK) sont perpendiculaires 

A Emma	MP	A puis C **G2I**	(IK) coupe [PR] en son milieu : d'abord vu puis vérifié. Construction du point d'intersection puis mesure des 2 segments obtenus. Quand on déplace R ou P dans le plan, les 2 segments sont toujours de même longueur. (IK) est perpendiculaire à [PR] : vu puis vérifié avec le boîte à outils « Perpendiculaire ? ». Caractéristiques de la droite (IK). La droite (IK) coupe le segment [PR] en son milieu. La droite est perpendiculaire au segment [PR]. La droite (IK) est la médiatrice du segment [PR].	Place l'intersection de [PR] et de (IK) et mesure les distances de ce point aux extrémités P et R du segment. Constate qu'elles sont toujours identiques quand on fait bouger les points. Puis vérifie que [PR] et (IK) sont perpendiculaires.
A France	MP	A puis B **G1I**	(IK) est médiatrice de [PR]. Je ne sais pas pourquoi.	vérification visuelle
A Gala	MP	A puis B **G2I**	(IK) est médiatrice de [PR] car ?	Place le milieu de [PR] et vérifie qu'il est sur la droite (IK) puis vérifie que [PR] et (IK) sont perpendiculaires

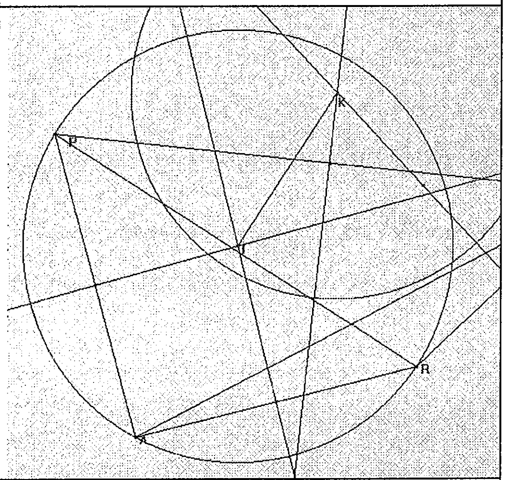
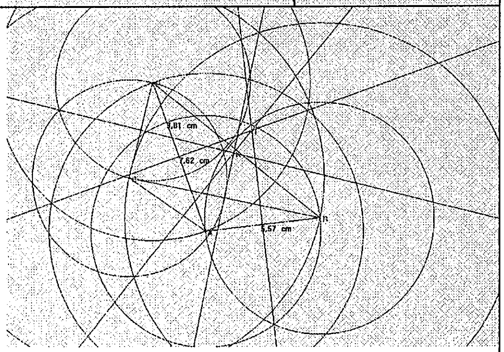
Groupe B

Production	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur(IK)	Ce qui est fait sous Cabri
B Hélène	MP	A	Je pense que la droite (IK) diminue ou s'agrandit car les points I et K sur cette droite se modifient (se rapprochent ou s'éloignent)	Demande des précisions sur la notation (IK). La question porte-t-elle sur la droite, le segment [IK], les points I et K ? Elle fait ensuite bouger les points pour obtenir des cas particuliers, comme dans l'exemple ci-dessous. 
B Irène	MP	C **G2I**	(IK) est perpendiculaire à [PR] et coupe ce segment en son milieu. Donc (IK) est la médiatrice de [PR]	Mesure la distance des points R et P à la droite (IK)  Mesure les angles et fait bouger « J'ai fait les mesures, je pense que c'est ça, mais je ne peux rien prouver »
B Jeanne	MP	C **G2I**		Vérifie que (IK) et [PR] sont perpendiculaires Place l'intersection O de [PR] et de (IK) et mesure OP et OR Vérifie que O, P et R sont alignés
B Kédy	MP	A		

Groupe C

Production	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur(IK)	Ce qui est fait sous Cabri
C Louis	MP	C **G1I** **G2I**	(IK) est la médiatrice de [PR]. vérifier que (IK) est perpendiculaire à [PR] et passe par son milieu. mesurer l'angle $\widehat{PTI}$.	Vérifie visuellement que le milieu de [PR] est sur (IK) et mesure un angle  pour vérifier l'orthogonalité
C Marie	MP	A	Tous les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment., donc quand je bouge R ou P, la droite bouge.	

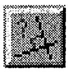
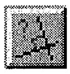
Groupe D, sous-groupe D1

Production	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur(IK)	Ce qui est fait sous Cabri
D1 Olga	MP	A	L'intersection des médiatrices : orthocentre, centre de gravité. C'est le centre du cercle circonscrit. P appartient aux 2 cercles circonscrits ainsi que R donc les 2 points bougent.	
D1 Pierre	MP	A		 P ne voit rien du tout… il finit cependant par masquer les cercles mais n'obtient pas d'autre résultat pour autant.
D1 Quiéta	CP	A		
D1 Groupe OPQ		**A**	La droite IK se déplace quand on déplace les points P, R. Seul le point K bouge quand on prend C Seul le point I bouge quand on prend A I et K se déplacent sur les médiatrices. Les points I K sont les centres de gravité des triangles PAR RCP : on a tracé les cercles de centre I et K. PAR et RCP ont en commun le segment PR donc 2 points IK bougent car RP est un segment commun pour les triangles PAR et RCP	

Groupe D, sous-groupe D2

Production	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur(IK)	Ce qui est fait sous Cabri
D2 Reine	MP	A		Fait 4 figures, dont 2 pour voir ce qui se passe dans le cas particulier où PARC est un rectangle
D2 Sophie	MP	A		
D2 Tania	CC	F G1I	Elle ne bouge pas si on déplace le point C (même si le point K se déplace sur la droite) car I et K et tous les points de la droite sont équidistants de C KP = KC (tous les points d'une médiatrice sont équidistants des 2 extrémités de ces segments) KC = KR (même règle) Donc KP = KC = KR	Trace de nombreux cercles, en particulier ceux de centre K passant par P et de centre I passant par P. Constate probablement visuellement que ces cercles passent l'un par C et R, l'autre par A et R, mais aucune remarque n'est faite sur les cercles circonscrits ni sur la médiatrice de [PR]
D2 Groupe RST	MP	E G1I G2	Si on trace un cercle de centre K, ce cercle passe par les points PAR. IK est la médiatrice de PR ! [Sophie a bougé le point R et j'ai remarqué que la droite IK passait par le milieu de PR à angle droit, à vue d'œil]. On a tracé les cercles de centre P et de rayon PR et de centre R et de même rayon. Les deux points d'intersection se situent sur IK. IK est donc la médiatrice de PR. On a ensuite fait référence à notre « savoir » : les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point (I ou K) le centre du cercle circonscrit au triangle (K : PRC, I :PAR). Ils ont un côté commun donc la médiatrice passera par I et K.	Effectue la construction décrite ci-contre des cercles pour vérifier l'existence de la médiatrice..

Groupe D, sous-groupe D3

Production	Procédure construction	Conjecture et validation	Commentaire écrit sur(IK)	Ce qui est fait sous Cabri
D3 Ursa	MP	F **G1I**	K : centre du cercle circonscrit au triangle PCR I : centre du cercle circonscrit au triangle PAR (IK) est perpendiculaire à (PR) (IK) axe de symétrie : P est symétrique à R par rapport à (IK) *n'utilise pas le mot médiatrice*	Trace les cercles de centre K passant par P et de centre I passant par A Trace le symétrique de P par rapport à (IK) Demande si (IK) et [PR] sont perpendiculaires 
D3 Véro	MP après essais cercles	F **G1I**	IK perpendiculaire à PR	Fait aussi plusieurs fois la figure. La première fois, tâtonne pour trouver une procédure pour tracer les médiatrices. Elle essaie en traçant des cercles, mais ça ne donne rien. Elle finit par MP.
D3 Wanda	CP	A		
D3 Yona	MP	A		Fait 4 fois la figure. La première fois, la procédure pour tracer une médiatrice est erronée. La deuxième fois, la droite (IK) n'est pas tracée. La troisième fois, (IK) est tracée et demande à Cabri si (IK) et [PR] sont perpendiculaires (version après le travail en groupe)
D3 Groupe UVWY	MP	C **G1I** **G2I**	Vérification que (IK) est perpendiculaire à [PR] et que (IK) passe par le milieu de [PR]	Vérifie que (IK) et [PR] sont perpendiculaires  puis place le milieu de [PR] et vérifie visuellement qu'il est sur (IK).

Annexe 26 : Tableau synthétique des productions pour la situation PARC

Etudiant	A A	A B	A C	A D	A E	A F	A G	B H	B I	B J	B K	groupe B	C L	C M	groupe C	D O	D P	D Q	groupe D1	D R	D S	D T	Groupe D2	D U	D V	D W	D Y	Groupe D3
Procédure pour tracer les médiatrices	M P	M P	M P	M P	M P	M P	M P	M P	M P	M P	M P		M P	M P		M P	M P	C P		M P	M P	C C		M P	M P	C P	M P	
Ne repère pas la médiatrice								X			X			X		X	X	X		X	X			X	X	X	X	
Effectue des vérifications visuelles	X			X		X																X						X
Effectue des « cabri vérifications »	X	X	X	X	X		X		X	X			X											X				X
Ne cherche pas de démonstration	X	X		X	X				X	X			X															X
Cherche une démonstration et ne trouve pas						X	X								X	X												
Cherche une dém. et trouve en utilisant l'intersection des 3 médiatrices d'un triangle			X									X											X					
Explicite des égalités de distance															X							X						
Formule que les points de la médiatrice sont équidistants des extrémités du segment	X													X	X													
Cherche une dém. et trouve en utilisant les égalités de distance																												
Repère les triangles PAR et PCR et leur côté commun																			X									
I et K sont les centres des cercles circonscrits																X			X			X		X				

Annexe 27 : Tableaux synthétiques des paradigmes exploités dans le test et la situation PARC

Prénom	Triangle 13 / 8 / 5			Triangle 3 / 4 / 5			Carré et Thalès			Situation PARC		
	G1I	G2I	G2	G1I	G2I	G2	G1I	G2I	G2	G1I	G2I	G2
Anne	x							x		x	x	
Béa							x				x	
Carole	x						x	x	x		x	x
Dévi	x							x		x	x	
Emma	x							x			x	
France							x			x		
Gala			x				x	x			x	
Hélène	x				x		x					
Irène	x		x		x			x			x	
Jeanne	x	x			x			x			x	
Kédy	x					x	x					
Louis	x				x		x			x	x	
Marie	x				x			x				
Noémie			x		x	x	x					

<table>
<tr><th colspan="9">Situation PARC</th></tr>
<tr><th></th><th colspan="2">procédure</th><th colspan="6">paradigme</th></tr>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Travail individuel</th><th rowspan="2">Travail de groupe</th><th colspan="3">Travail individuel</th><th colspan="3">Travail de groupe</th></tr>
<tr><th>G1I</th><th>G2I</th><th>G2</th><th>G1I</th><th>G2I</th><th>G2</th></tr>
<tr><td>Olga</td><td>A</td><td rowspan="3">A</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">x</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Pierre</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Quiéta</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Reine</td><td>A</td><td rowspan="3">E</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">x</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">x</td></tr>
<tr><td>Sophie</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tania</td><td>F</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Ursa</td><td>F</td><td rowspan="4">C</td><td>x</td><td></td><td></td><td rowspan="4">x</td><td rowspan="4">x</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Véro</td><td>F</td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Wanda</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Yona</td><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Annexe 28 : Géométrie plane. Séance gp1. 2000-2001

Se mettre par groupes de 5 ou 6

Activité 1 : Quadrilatères. ½ heure.
Faire un organigramme des quadrilatères convexes, en mettant notamment les quadrilatères suivants : carré, losange, rectangle, parallélogramme, trapèze, trapèze rectangle et en précisant à chaque fois quelle propriété on ajoute (ou on retire) pour passer d'une classe à une autre.

Activité 2 : Suivre un scénario de construction. 1/4 heure.
Choisir un des trois scénario de construction (pas tous le même). Le suivre (vous pourrez vous entraîner chez vous avec ceux que vous n'aurez pas testé vous-même). Comparer très rapidement les scénario qui donnent le même résultat.

Scénario 1 :
1. Tracer un cercle de centre O et de rayon r.
2. Placer sur ce cercle deux points A et B tels que les rayons OA et OB soient perpendiculaires.
3. Placer le point I au milieu du rayon OA.
4. Tracer le cercle de centre I et de rayon r/2.
5. Tracer le segment [B, I].
6. Placer le point J au point d'intersection de ce segment [B, I] et du cercle de rayon r/2.
7. Prendre l'écartement BJ avec le compas.
8. Reporter 10 fois l'écartement sur le cercle de rayon r.
9. Relier les 10 points obtenus.
10. Relier 1 point sur 2.

Scénario 2 :
1. Tracer un cercle de centre O.
2. Placer un point A sur le cercle.
3. Placer le point I au milieu de OA.
4. Tracer la perpendiculaire au segment [O,A] passant par le point I.
5. Placer le point J à une intersection du cercle et de cette perpendiculaire.
6. Avec le compas, prendre l'écartement IJ.
7. Reporter cet écartement sur le cercle 7 fois.
8. Relier les 7 points obtenus.

Scénario 3 :
1. Tracer une droite d et deux points O et A sur d
2. Tracer un cercle C de centre O et de rayon OA.
3. Tracer un cercle C' de diamètre [O,A]. Soit K son centre.
4. Soit I et J deux points tels que [I,J] soit un diamètre de C, perpendiculaire à [O,A].
5. Tracer la droite (IK). Elle coupe le cercle C' en deux points R et S.
6. Tracer le cercle de centre I et de rayon IR. Il coupe le cercle C en deux points T et U.
7. Tracer le cercle de centre I et de rayon IS. Il coupe le cercle C en deux points V et W.
8. Relier les points J,T,U,V,W dans un ordre astucieusement choisi.

Activité 3 : Rédiger un scénario de construction. 3/4 heure.
Sur le verso de cette feuille, vous avez des figures qui vous montrent comment obtenir la longueur du côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle donné. Faites deux sous-groupes dans chaque groupe de 5 ou 6 (ou 3 sous-groupes si vous préférez travailler à un ou 2). Chaque sous-groupe sera successivement émetteur puis récepteur.

- **Mission émetteur :**

Choisir un des polygones réguliers et rédiger un programme de construction pour que votre groupe binôme récepteur puisse tracer la figure que vous avez sous les yeux sans bien sûr l'avoir elle-même sous les yeux. Passer votre message à l'autre sous-groupe (à 3 sous-groupes, on fait « tourner » les messages : A passe à B qui passe à C qui passe à A).

- **Mission récepteur :**

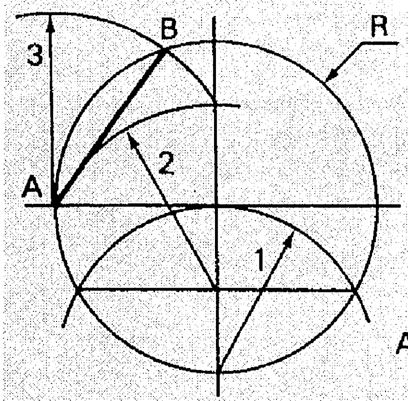
A partir du message reçu, essayer de construire la figure décrite.

- **Ensemble :**

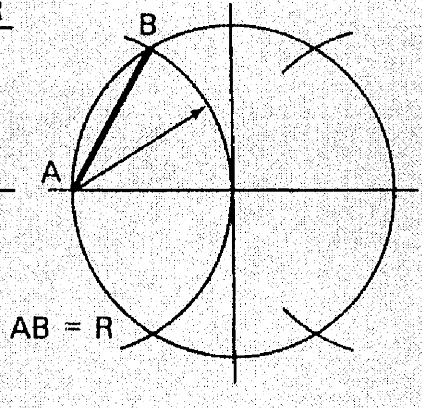
Comparer les figures dessinées aux figures initiales.

Tracé des polygones réguliers

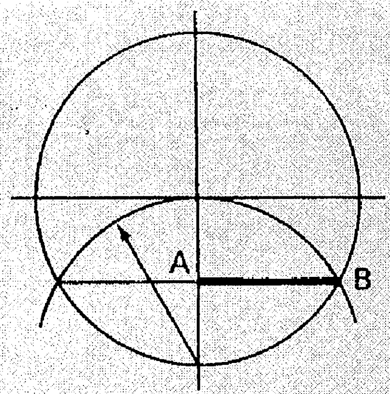
Ces polygones s'inscrivent dans des cercles.
AB correspond au côté du polygone qu'il suffit de reporter sur le cercle pour obtenir les différents sommets des figures.



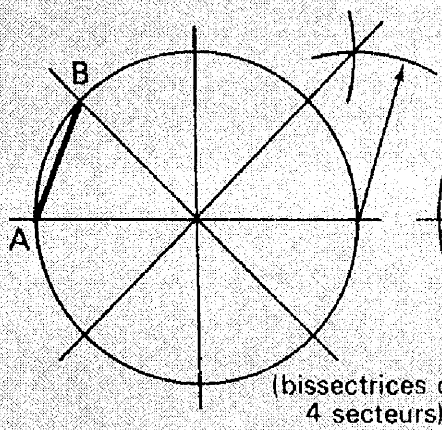
PENTAGONE



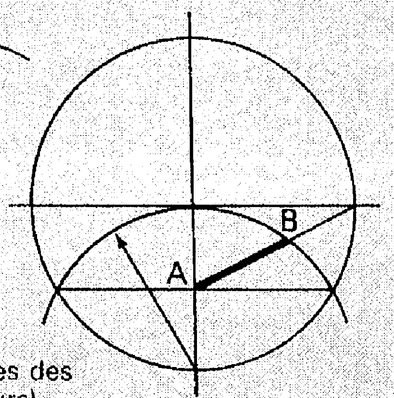
HEXAGONE



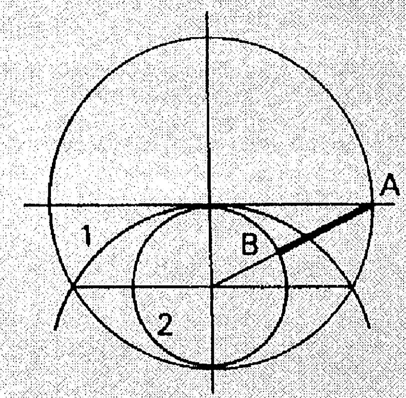
HEPTAGONE



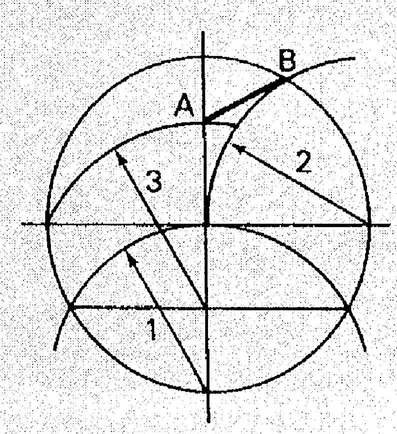
OCTOGONE



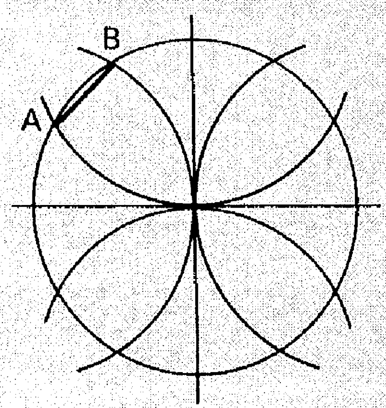
ENNEAGONE



DECAGONE



HENDECAGONE



DODECAGONE

Annexe 29 : Ateliers de géométrie plane 2005-2006

Activité 1 : Les outils usuels de la géométrie : compas, règle et rapporteur.

1. Tracer la médiatrice d'un segment à la règle et au compas.
2. Tracer la bissectrice d'un angle à la règle et au compas.
3. Tracer la hauteur d'un triangle à la règle et au compas.
4. Tracer un triangle rectangle à la règle et au compas.
5. Tracer un triangle isocèle à la règle et au compas.
6. Tracer un triangle équilatéral à la règle et au compas.
7. Construire un angle de 30°, 45°, 60° à la règle et au compas.
8. Tracer un segment de longueur $\sqrt{3}$ fois un segment de longueur [AB] donné (à la règle non graduée, au compas et à l'équerre).
9. Tracer un segment [AB], puis un segment de longueur $\frac{1}{3}AB$, puis $\frac{1}{5}AB$ (à la règle non graduée, à l'équerre et au compas).

A chaque étape, on justifiera la construction par des propriétés ou théorèmes mathématiques.

Activité 2 : Les outils usuels de la géométrie ... et les autres : pliage.

1. Obtenir un triangle rectangle par pliage.
2. Obtenir un triangle isocèle par pliage.
3. Obtenir un triangle isocèle et rectangle par pliage.
4. Obtenir un triangle équilatéral par pliage
5. Obtenir des angles de 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90 ° par pliage.
6. Obtenir la médiatrice d'un bipoint par pliage.
7. Obtenir la bissectrice d'un angle par pliage.
8. Obtenir la hauteur d'un triangle par pliage.

Activité 3 : Polygones réguliers.

Tracer tous les polygones réguliers que l'on peut tracer à la règle et au compas
Tracer d'autres polygones réguliers à la règle, au compas et au rapporteur

Activité 4 : Suivre un scénario de construction

Tracer un cercle de centre O et de rayon r.
Placer sur ce cercle deux points A et B tels que les rayons OA et OB soient perpendiculaires.
Placer le point I au milieu du rayon OA.
Tracer le cercle de centre I et de rayon r/2.
Tracer le segment [B, I].
Placer le point J au point d'intersection de ce segment [B, I] et du cercle de rayon r/2.
Prendre l'écartement BJ avec le compas.
Reporter 10 fois l'écartement sur le cercle de rayon r.
Relier les 10 points obtenus.
Relier 1 point sur 2.

Activité 5 : Suivre un scénario de construction

Tracer un cercle de centre O.
Placer un point A sur le cercle.
Placer le point I au milieu de OA.
Tracer la perpendiculaire au segment [O,A] passant par le point I.
Placer le point J à une intersection du cercle et de cette perpendiculaire.
Avec le compas, prendre l'écartement IJ.
Reporter cet écartement sur le cercle 7 fois.
Relier les 7 points obtenus.

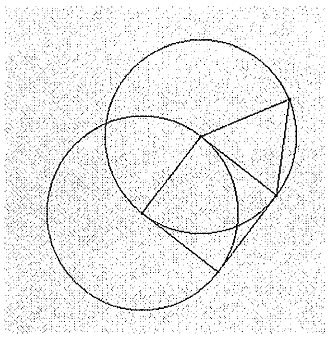
Activité 6 : Suivre un scénario de construction

Tracer une droite d et deux points O et A sur d
Tracer un cercle C de centre O et de rayon OA.
Tracer un cercle C' de diamètre [O,A]. Soit K son centre.
Soit I et J deux points tels que [I,J] soit un diamètre de C, perpendiculaire à [O,A].
Tracer la droite (IK). Elle coupe le cercle C' en deux points R et S.
Tracer le cercle de centre I et de rayon IR. Il coupe le cercle C en deux points T et U.
Tracer le cercle de centre I et de rayon IS. Il coupe le cercle C en deux points V et W.
Relier les points J,T,U,V,W dans un ordre astucieusement choisi.

Activité 7 : Rédiger un scénario de construction.

Faire une figure comportant au moins quatre polygones ou cercles distincts.*
Rédiger un scénario de construction du dessin.
Echanger votre message avec celui de quelqu'un d'autre.
Suivre le programme de construction reçu.
Comparer les résultats obtenus avec les figures de départ.
Analyser les éventuelles différences. D'où proviennent-elles ?

* : Distincts ne veut pas dire disjoints. Il peut par exemple y avoir un triangle, deux carrés, un cercle, etc…), comme dans l'exemple ci-contre (où il serait probablement utile de donner des noms aux points)



* : On peut aussi remplacer cette proposition par : « Tracer un octogone régulier », ou encore par « choisir un des polygones ci-contre » (*Tracés des polygones réguliers)*

Activité 8 : Construction de parallélogramme.

Placer trois points A,B,C, non alignés.
Construire le point D pour que (A,B,C,D) soit un parallélogramme
uniquement à la règle et à l'équerre
uniquement avec le compas
uniquement à la règle graduée

Activité 9 : Construction de losange

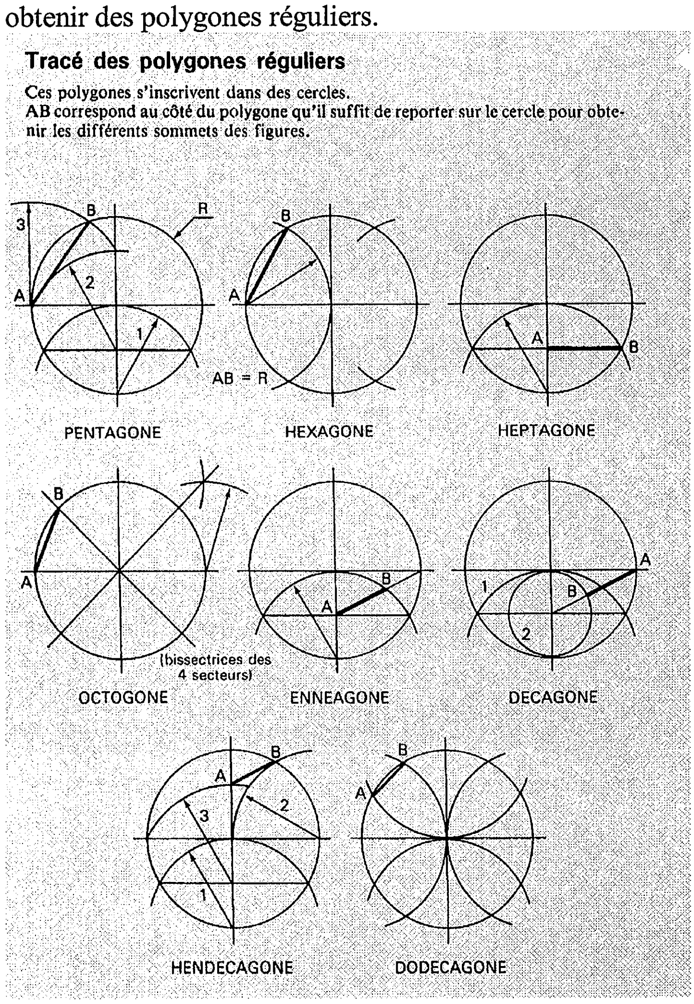
Trouver le maximum de construction différentes d'un losange, en variant les points de départ (côté, diagonale) et les instruments utilisés (règle graduée ou non, compas, rapporteur, équerre…).Donner à chaque fois les propriétés du losange utilisées dans la construction.

Activité 10 : Quadrilatères

Faire un organigramme des quadrilatères convexes, en mettant notamment les quadrilatères suivants : carré, losange, rectangle, parallélogramme, trapèze, trapèze rectangle et en précisant à chaque fois quelle propriété on ajoute.

Activité 11 : Reproduction de figures

Reproduire chacune des figures ci-dessous pour obtenir des polygones réguliers.



Activité 12 : Didactique

Analyser les activités précédentes au regard des instructions officielles de l'école élémentaire. Quelles compétences développent chacune d'elles ?
Retrouver les activités de description, reproduction, construction.

Annexe 30 : Situation 1 : tracer un triangle rectangle

NOM Prénom : Bac : 4 novembre 2005

durée des suppléances : Licence : Groupe :

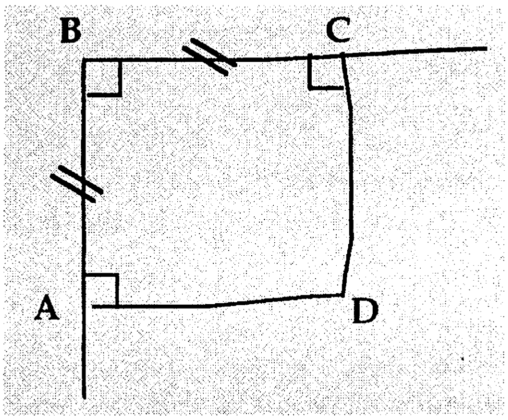
---

1. Tracer un triangle ABC rectangle en B, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas.
2. Ecrire un scénario de construction correspondant à cette construction.
3. Donner les propriétés qui justifient que l'on a bien tracé un triangle rectangle avec ce scénario.

NB : évitez d'une part le crayon à papier pour les questions 2 et 3, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en td. Merci.

Annexe 31 : Situation 2 : Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?

NOM Prénom : 4 nov. 2005. Groupe :



Le quadrilatère ABCD est-il un carré ?
Justifier votre réponse.

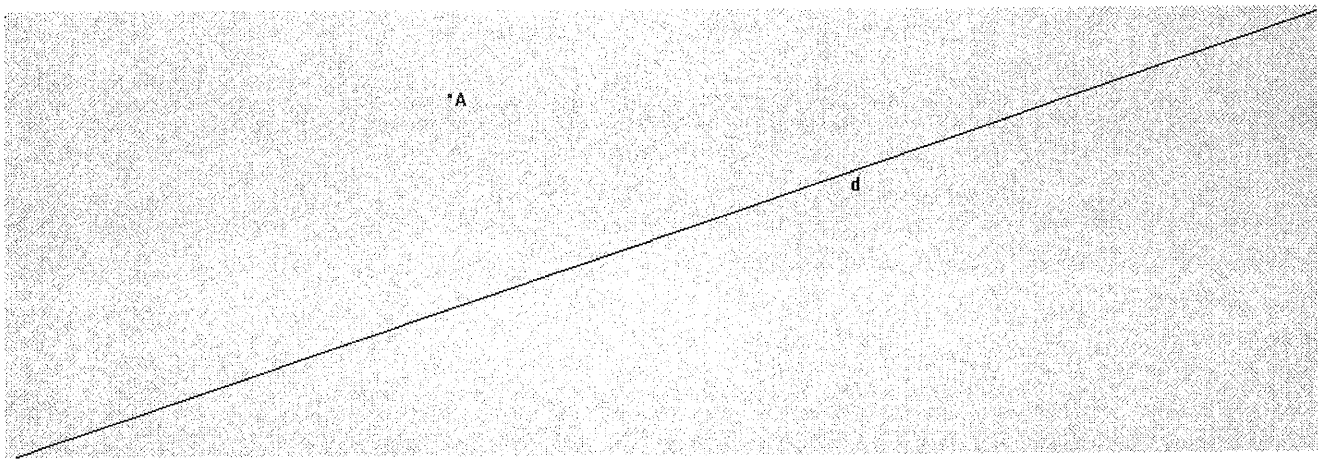
NB : évitez le crayon à papier. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue. Merci.

Annexe 32 : Situation 3 : Tracer une droite parallèle à d passant par A

NOM Prénom : 18 nov. 2005. Groupe :

1. Tracer une droite parallèle à d, passant par A, en utilisant seulement la règle non graduée et le compas.
2. Ecrire un scénario de construction correspondant à cette construction.
3. Donner les propriétés qui justifient que l'on a bien avec ce scénario tracé la droite parallèle à d passant par A.

NB : évitez d'une part le crayon à papier pour les questions 2 et 3, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en td. Merci.



Annexe 33 : Situation 4 : Médiatrice

NOM Prénom : 25 nov. 2005. Groupe :

Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.

Tracer le cercle C_1 de centre O et de rayon 2 cm. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.

Tracer le cercle C_2 de centre O et de rayon 4 cm.

Tracer le cercle C_3 de centre A et de rayon 4,5 cm. Ce cercle coupe le cercle C_2 en deux points C et D.

Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ? Conclure.

NB : évitez d'une part le crayon à papier pour la dernière question, et d'autre part le recto-verso. Votre production sera photocopiée à la pause si vous le voulez bien et vous sera rendue en td. Merci.

Annexe 34 : Plan du début du cours de géométrie plane

Document distribué aux étudiants au début du cours, en même temps qu'un dossier rassemblant tous les documents utilisés dans le cours (diapos des présentations PowerPoint du cours, sujets et corrigés des exercices, extraits d'instructions officielles ...)

CFP AVRILLE Géométrie plane 2005-2006

Plan *prévisionnel* des séances

Séance ge6 : tous 4 novembre 2005

Le point sur les quadrilatères (diapos 5 à 8)

Grille de lecture des IO (diapos 10 à 21)

Exercice de géométrie plane

Séance gp1 : en groupe de 35 4 novembre 2005

Atelier 1 ou 2 ou 3 : se remémorer et utiliser des connaissances de géométrie plane. page 1

Quel type de géométrie ? (diapos 23 à 26)

Séance gp2 : tous 18 novembre

Les instruments de dessin en géométrie (diapo 27)

Les difficultés des élèves en géométrie plane (diapos 28 à 30)

Analyse de manuels : Puzzle, Pays de Loire 2000 document page 15 (diapos 31 à 42)

Exercice de géométrie plane

Séance gp3 : en groupe de 35 18 novembre 2005

Atelier 1 ou 2 ou 3 : se remémorer et utiliser des connaissances de géométrie plane. page 1

Séance gp4 : tous 25 novembre 2005

Analyse de productions d'élèves : document pages 16-17

Analyse Pays de Loire 1997 CFP (diapos 43 à 51)

Analyse de scénario TOURS IUFM (diapos 52 à 58)

Exercice de géométrie plane

Séance gp5 : en groupe de 35 25 novembre 2005

Démonstration en géométrie plane exercices pages 28-32

Annexe 35 : Codage exercices 2005-2006

Numéro de copie :
Bac :
L E S A NR
Licence :
L E SH S P A NR
Suppléances (mois) :

Triangle rectangle

Procédures
a. Médiatrice : 2 inters arcs de cercle de même rayon MN
b. Médiatrice : 2 inters arcs de cercle de même rayon ≠ MN
c. Triangle inscrit dans cercle
d. « à l'œil »
e. Autre
f. Médiatrice : 1 intersection et milieu

Scénario
a. Absent
b. Incomplet
c. Complet

Formulation du scénario
a. Très bien
b. Correcte
c. Correcte mais maladroite
d. Incorrecte
e. Très incorrecte
f. Absente

Vocabulaire utilisé
a. Cercle
b. Centre
c. Rayon
d. Intersection
e. Arc de cercle
f. Compas
g. Ecartement – Ecart - ouverture
h. Pointe du compas - Pointer
i. Reporter
j. Croisement-Rencontre-Se rejoindre
k. Joindre – Rejoindre – Relier – Prolonger
l. En partant de … A partir de …
m. Autre
n. rien

Repères dans position feuille
a. Oui
b. Non

Conception d'un O G erronée
a. Oui
b. Non

Justification : ce qui est dit est
a. Totalement exact
b. Propriété citée réciproque de la propriété utilisée
c. Inexact
d. Pas de justification

Justification : ce qui est dit démontre
a. Totalement
b. Un peu
c. Pas du tout
d. Pas de justification

Formulation de la justification
a. Très bien
b. Correcte
c. Correcte mais maladroite
d. Incorrecte
e. Très incorrecte
f. Absente

Quadrilatère ABCD

Réponse et justification
a. Oui et non, dans G1-G2
b. Oui et justification exacte dans G2
c. Oui et justification erronée dans G2
d. Oui sans justification
e. Non et exhaustivité
f. Non et G1
g. Non et autre
h. Autre

Précision du tracé
a. Avec remarque sur le manque de précision
b. Pas de remarque sur le manque de précision

Droites parallèles

Procédures
a. Deux médiatrices
b. Parallélogramme non losange sans repérer 2 points d'intersection
c. Losange
d. Rectangle
e. Carré
f. Droite tangente à des cercles
g. Autre procédure correcte
h. Autre procédure incorrecte

Scénario
a. Absent
b. Incomplet
c. Complet

Formulation du scénario
a. Très bien
b. Correcte
c. Correcte mais maladroite
d. Incorrecte
e. Très incorrecte
f. Absente

Vocabulaire utilisé
a. Cercle
b. Centre
c. Rayon
d. Intersection
e. Arc de cercle
f. Compas
g. Ecartement – Ecart – ouverture
h. Pointe du compas - Pointer
i. Reporter
j. Croisement-Rencontre-Se rejoindre
k. Joindre – Rejoindre – Relier – Prolonger
l. En partant de … A partir de …
m. Autre
n. Rien

Repères dans position feuille
a. Oui
b. Non

Conception d'un O G erronée
a. Oui
b. Non

Amélioration scénario
a. Pas d'amélioration
b. Un peu d'amélioration
c. Beaucoup d'amélioration
d. Totale amélioration

Justification : ce qui est dit est
a. Totalement exact
b. Propriété citée réciproque de la propriété utilisée
c. Inexact
d. Pas de justification

Justification : ce qui est dit démontre
a. Totalement
b. Un peu
c. Pas du tout
d. Pas de justification

Formulation de la justification
a. Très bien
b. Correcte
c. Correcte mais maladroite
d. Incorrecte
e. Très incorrecte
f. Absente

Médiatrice

Moyens proposés
a. 0
b. 1
c. Plusieurs

Présence preuve-démonstration
a. Correcte dans G2
b. Incomplète dans G2
c. (AB) médiatrice de [CD]
d. Incorrecte dans G2
e. Correcte dans G1
f. Incomplète dans G1
g. Incorrecte dans G1
h. Absente

Arguments - moyens proposés
a. G1
b. G2
c. G1 et G2
d. Aucun

Pense être en
a. G1
b. G2
c. G1 et G2
d. Ne sait pas
e. N'indique pas

Annexe 36 : Tracé de parallèles dans un ancien manuel

Extrait de [Manuel.1940, pages 64-65], manuel de géométrie correspondant aux programmes de 1938, destiné aux classes de 5ème, 4ème, 3ème.

64 GÉOMÉTRIE

§ III. Angles ayant leurs côtés parallèles ou perpendiculaires.

89. Théorème. — Deux angles qui ont leurs côtés respectivement parallèles sont égaux ou supplémentaires.

Ils sont égaux s'ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus.

Ils sont supplémentaires si l'un est aigu et l'autre obtus.

Hypothèse : Soient les angles aigus a et c qui ont leurs côtés respectivement parallèles (fig. 105).

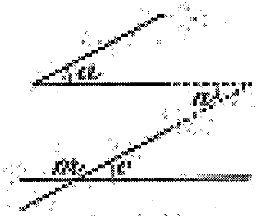


Fig. 105.

Conclusion : Il faut démontrer que $\widehat{a} = \widehat{c}$.

Prolongeons jusqu'à leur rencontre deux côtés non parallèles ; les angles a et n sont égaux comme alternes-internes ;

de même $\widehat{c} = \widehat{n}$;

donc $\widehat{a} = \widehat{c}$.

Considérons ensuite l'angle obtus m et l'angle aigu a, nous avons :

$$\widehat{m} + \widehat{c} = 2 \text{ dr.}$$

or $\widehat{c} = \widehat{a}$;

donc $\widehat{m} + \widehat{a} = 2 \text{ dr.}$

90. Théorème. — Deux angles qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

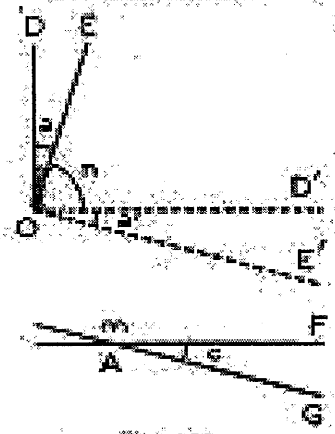


Fig. 106.

Ils sont égaux s'ils sont tous deux aigus ou tous deux obtus.

Ils sont supplémentaires, si l'un est aigu et l'autre obtus.

Hypothèse : Soient les angles aigus a et c (fig. 106) qui ont leurs côtés respectivement perpendiculaires.

Conclusion : Il faut démontrer que $\widehat{a} = \widehat{c}$.

Menons OD′ perpendiculaire à OD et OE′ perpendiculaire à OE ; nous obtenons :

$$\widehat{a} + \widehat{n} = 1 \text{ dr.}$$
$$\widehat{a'} + \widehat{n} = 1 \text{ dr.}$$

d'où
$$\widehat{a'} = \widehat{a}.$$

Mais OD′ et AF sont parallèles comme perpendiculaires à la même droite OD ; il en est de même des droites OE′ et AG ; ainsi les angles aigus a' et c sont égaux comme ayant leurs côtés parallèles.

Donc
$$\widehat{a} = \widehat{c}.$$

L'angle obtus m et l'angle aigu c étant supplémentaires, les angles m et a le sont aussi.

§ IV. Applications graphiques.

91. Problème. — *Mener par un point* A *une parallèle à une droite* CD.

1er Moyen. (fig. 107) — Du point A comme centre, avec un rayon arbitraire AD, on décrit un arc DB ; puis du centre D, avec le même rayon, on en décrit un second AC. En prenant ensuite la corde DB égale à AC, on détermine un point B qui appartient à la parallèle cherchée.

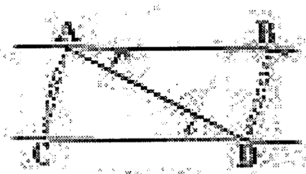


Fig. 107.

En effet, les triangles isocèles ACD et ABD sont égaux car, par construction, ils ont leurs trois côtés respectivement égaux ; donc les angles i et r sont égaux et AB est parallèle à CD (85).

2e Moyen. — *A l'aide de la règle et de l'équerre* (fig. 108). On pose un des grands côtés de l'équerre sur la droite CD, puis la règle contre le petit côté de l'équerre, on tient ensuite la règle fixe et on fait glisser l'équerre en A, on trace la droite AB qui est la parallèle demandée, car AB et CD font avec EF des angles correspondants égaux.

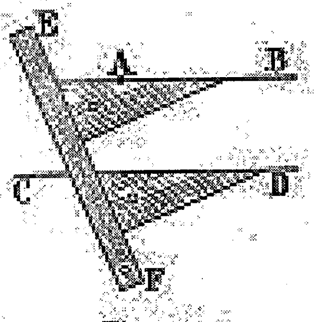


Fig. 108.

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB :

http://iremp7.math.jussieu.fr

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :
Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique

AUTEUR :
Françoise Lemonnier Jore

RESUME :
Ce travail prend appui sur un cadre théorique qui distingue deux paradigmes de géométrie enseignée : d'une part G1 (*spatio-graphique*), dont les objets sont physiques et les validations de nature perceptive, et d'autre part G2 (*proto-axiomatique*), dont les objets sont théoriques et les validations de type hypothético-déductif.

Le rapport à la géométrie des professeurs d'école en formation initiale (PE1), dans le champ de la géométrie plane, pose problème car ils sont amenés à faire travailler leurs élèves presque exclusivement dans G1, tandis que dans les problèmes de géométrie posés au concours de recrutement, ils sont censés se situer dans G2. Pour enseigner au primaire, il est en fait essentiel qu'ils soient à l'aise dans les deux.

Ce travail a permis de mettre en évidence les procédures que les PE1 utilisent pour tracer « aux instruments » une médiatrice sous diverses contraintes et de faire émerger une première approche de leur degré d'expertise dans le tracé d'une médiatrice, par l'étude de leur adaptabilité à ces contraintes, adaptabilité liée au caractère disponible ou non de G2.

Cette recherche confirme que les PE1 se situent dans différents paradigmes, G1, G2, mais aussi un « pseudo-paradigme » local et personnel, qui relève à la fois de G1 et de G2. En outre, l'« évidence de la figure », le manque de connaissances et de compétences dans G2, l'automatisation de procédures de construction qui les vide de sens, restent autant d'éléments déterminants dans le fait qu'ils ne soient pas à même de travailler dans G2 lorsque la situation l'exige (en particulier dans la préparation au concours de recrutement). Ce travail a aussi montré qu'une prise de conscience de ces paradigmes peut néanmoins se mettre en place au travers d'une ingénierie spécifique, centrée sur la rédaction et la justification de scénarios de construction, et permettre – au moins à court terme – de faire évoluer les étudiants vers G2 et d'améliorer leurs compétences dans ce dernier paradigme.

MOTS CLES :
géométrie plane, paradigme géométrique, géométrie spatio-graphique, géométrie proto-axiomatique, pseudo-paradigme, dessin, objet géométrique, figure, médiatrice, scénario de construction, formation initiale des professeurs des écoles, environnement papier-crayon, environnement informatique, Cabri-géomètre, analyse implicative.

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R.CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2007
ISBN : 2-86612-289-5